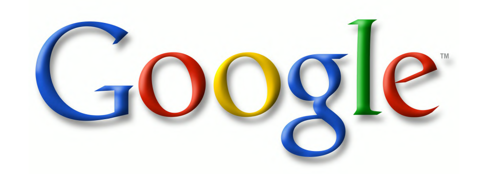






SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE



# ABHANDLUNGEN

ACHTZEHNTER BAND.

# ABHANDLUNGEN

## DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

# GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.




ACHTZEHNTER BAND.

MIT ACHT TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1878.

# ABHANDLUNGEN

## DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE

## DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

# GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.




EILFTER BAND.

MIT ACHT TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1878.

# INHALT.

UEBER DEN

# AUSGANGSWERTH

DER

# KLEINSTEN ABWEICHUNGSSUMME,

DESSEN

## BESTIMMUNG, VERWENDUNG UND VERALLGEMEINERUNG

VON

**G. TH. FECHNER**

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

---

Des XI. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº I.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1874.

Vom Verfasser übergeben den 2. Mai 1874.
Der Abdruck vollendet den 23. Mai 1874.

UEBER DEN

# AUSGANGSWERTH DER KLEINSTEN ABWEICHUNGSSUMME,

DESSEN

BESTIMMUNG, VERWENDUNG UND VERALLGEMEINERUNG

VON

G. TH. FECHNER.

# I. Eingang.

Die folgende Untersuchung hat sich von einer allgemeineren Untersuchung über die gesetzlichen Massverhältnisse von Collectivgegenständen, mit der ich seit längerer Zeit beschäftigt bin, abgezweigt; da sie jedoch über die Beziehung dazu weit hinausgreift, biete ich sie hier, nur unter Mitberücksichtigung dieser Beziehung, besonders dar.

Unter einem Collectivgegenstande verstehe ich einen Gegenstand, der in einer unbestimmten Mehrzahl zufällig variirender Exemplare, welche sich unter einem gemeinsamen Begriffe vereinigen, vorkommt; eine Erklärung, die sich durch später folgende Beispiele näher erläutern wird.

Das seither nur sehr oberflächlich und aus allgemeinem Gesichtspuncte fast gar nicht in Angriff genommene quantitative Untersuchungsfeld solcher Gegenstände tritt zum Theil unter andere Gesichtspuncte als das physikalische und astronomische Beobachtungsfeld, und führt daher überhaupt zu manchen Bemerkungen, Sätzen und Aufgaben, worauf zu kommen im letzteren Gebiete kein Anlass ist. Hiezu wird das Folgende manche Belege bieten.

Da sich der Inhalt dieser Abhandlung von ihrem Ausgangspuncte aus nach mehrern Richtungen verzweigt, gebe ich vorweg eine Uebersicht darüber, indem ich dabei an etwas Allbekanntes anknüpfe.

Das arithmetische Mittel, seinem Begriffe nach als Quotient einer Summe gegebener Werthe durch die Zahl derselben bestimmt, lässt sich bekanntlich gleichgeltend damit durch die Eigenschaft als be-

stimmt ansehen, eine gleiche Summe positiver und negativer Abweichungen von sich abhängig zu haben. Hiemit solidarisch aber ist die Eigenschaft desselben, dass die Summe der Quadrate der Abweichungen bezüglich desselben kleiner als bezüglich irgend eines andern Werthes ist, den man dafür als Ausgangspunct der Abweichungen substituiren möchte, gleichgültig, welcher Art die betreffenden Grössen sind, und welches Gesetz die Abweichungen befolgen, ja ob sie überhaupt ein solches befolgen. Es ist eine leicht erweisliche mathematische Nothwendigkeit, welche die angegebenen Bestimmungen des arithmetischen Mittels an einander knüpft.

Unstreitig kann man nun auch fragen: wenn das arithmetische Mittel der Werth ist, welcher die kleinste Summe der Quadrate der Abweichungen von sich abhängig hat, ob es nicht einen Werth von entsprechender Bestimmtheit giebt, der die kleinstmögliche Summe der unquadrirten Abweichungen von sich abhängig hat; wobei ich hier, wie folgends immer, unter Summe der Abweichungen die positiven und negativen Abweichungen nach absolutem Werthe oder als ob alle positiv wären, zusammengerechnet verstehe. Es ist mir nicht bekannt, dass man diese Frage schon aufgeworfen hätte, weil sich unstreitig seither kein Interesse daran geknüpft hat; doch wird sich zeigen, dass dem Werthe, mit dem sich die Frage beantwortet, in der That ein gewisses mathematisches und empirisches Interesse nicht abgeht, erstres in Betracht der Analogie seiner Bestimmtheit mit der des arithmetischen Mittels und der sich daran knüpfenden Verallgemeinerungen, letzteres insofern, als dieser Werth im Untersuchungsfelde der Collectivgegenstände eine Rolle spielt, indem er bezüglich der Bestimmung dieser Gegenstände mit dem arithmetischen Mittel in Concurrenz tritt.

Es wird nämlich im Folgenden bewiesen werden, dass der in Frage stehende Werth der ist, welcher unter den, ihrer Grösse nach geordneten, Werthen, aus denen er zu bestimmen ist, die mittelste Stelle einnimmt, mithin die gleiche Zahl positiver und negativer Abweichungen, statt wie der arithmetische Mittelwerth, die gleiche Summe derselben, von sich abhängig hat. Wegen dieser Eigenschaft werde ich ihn den Centralwerth nennen und mit $C$ bezeichnen, indess ich den arithmetischen Mittelwerth mit $A$ bezeichne.

Dem $C$ kommt seine Eigenschaft, die kleinste Summe der ein-

fachen Abweichungen von sich abhängig zu haben, eben so unabhängig von einer besondern Beschaffenheit der Grössen und einem besondern Gesetze der Abweichungen zu, als dem $A$ die entsprechende Eigenschaft, die kleinste Summe der Abweichungsquadrate von sich abhängig zu haben, und lässt sich daher eben so an beliebigen selbstgemachten Beispielen bewähren. Ich nenne diese einander entsprechenden Eigenschaften des $C$ und $A$ die potenziellen Eigenschaften derselben.

Von dem Interesse, was es hat, auf das $C$ neben dem $A$ im Untersuchungsfelde der Collectivgegenstände Rücksicht zu nehmen, und den Verhältnissen dieser Gegenstände, in welche das $C$ eingreift, wird im 2. Abschnitte, von der Bestimmungsweise des $C$ und verschiedenen Verhältnissen desselben gegenüber dem $A$ im 3. Abschnitte die Rede sein.

Die potenzielle Eigenschaft des $C$ bot sich mir zuerst so zu sagen zufällig als Folgerung aus Formeln dar, die ich im Untersuchungsfelde der Collectivgegenstände zur Beurtheilung der Abänderung der Abweichungssumme je nach Verlegung ihres Ausgangspunctes zu entwickeln hatte, da es sich in diesem Gebiete nicht so wie im physikalischen und astronomischen Beobachtungsgebiete blos um Verfolgung der Abweichungen von $A$, sondern auch von $C$ und selbst noch von einem dritten Hauptwerthe, wovon später (unter II), handelt, und überhaupt eine grössere Wahl zwischen verschiedenen Ausgangspuncten der Abweichungen stattfindet, als im letzteren Gebiete. In Voraussetzung, dass diese Formeln auch Andern, welche sich mit ersterem Gebiete beschäftigen wollen, dienlich sein können, theile ich sie mit ihrer Herleitung, und den Folgerungen daraus, die ein Interesse haben können, im 4. Abschnitte mit.

Nachdem wir im Centralwerthe einen Werth gefunden haben, welcher die kleinste Summe der einfachen Abweichungen von sich abhängig hat, dazu im arithmetischen Mittel einen Werth haben, welcher die kleinste Summe der Quadrate der Abweichungen von sich abhängig hat, verallgemeinert sich alsbald die Frage dahin, ob sich nicht auch Werthe bezeichnen lassen, welche die kleinste Summe der Cuben, der Biquadrate u. s. w. der Abweichungen von sich abhängig haben. In der That wird sich diess zeigen, und sogar eine sehr einfache, von einer einfachen Differenzial-Minimum-Gleichung

abhängige, Regel für die Bestimmung solcher Werthe von beliebiger Ordnung aufstellen lassen, worunter die des Centralwerthes und arithmetischen Mittelwerthes nur als besondere Fälle niederster Ordnung begriffen sind. Allgemein nenne ich solche Werthe Potenz-Mittelwerthe und handle näher davon im 5. Abschnitte.

Da hienach der arithmetische Mittelwerth nur ein besonderer Fall der Potenzmittelwerthe, einer unter andern solchen Werthen, und zwar weder von niederster noch höchster Ordnung ist, und da die zwar schon oft behandelte Frage nach dem Vorzuge des Principes des arithmetischen Mittels im physikalischen und astronomischen Beobachtungsgebiete meines Wissens doch noch nicht mit Rücksicht auf jene Unterordnung behandelt worden ist, so hat es mir nützlich geschienen, aus dem Gesichtspuncte derselben in einem besonderen Abschnitte, dem 6., einen Blick auf diese Frage zu werfen. Hiedurch hat sich, wie vorauszusehen, der Vorzug des Principes des arithmetischen Mittels vor jedem andern Princip in jenem Gebiete nur bestätigt; doch hat die Rücksicht auf jene Unterordnung zu einigen Abweichungen von bisher aufgestellten Gesichtspuncten geführt, welche zwar nicht das Resultat, aber den Weg dazu betreffen.

Der 7. und 8. Abschnitt sind Anhangs-Abschnitte zum 6. Der 7. insbesondere giebt zu dem bekannten (Gauss'schen) Fehlergesetze, welches in Bezug zur Gültigkeit des Principes des arithmetischen Mittels steht, eine Verallgemeinerung dieses Gesetzes für den Fall, dass irgend ein anderes Potenzmittel grössere Gültigkeit in Anspruch nehmen sollte, mit dem Nachweise, dass die Gesetze für das *C* so wie für die höheren Potenzmittel zu weit von dem bezüglich des *A* gültigen abweichen, um nicht nach der erfahrungsmässigen Bewährung des letzteren bezüglich der Beobachtungsfehler an das Princip des *A* gebunden zu bleiben. Der 8. Abschnitt fügt zu den schon bekannten Bewährungen des Gauss'schen Fehlergesetzes im Gebiete der Beobachtungsfehler eine solche im Gebiete der thermischen Monatsabweichungen und weist direct daran nach, dass der Ausgang der Abweichungen vom arithmetischen Mittel zu grösserer Sicherheit führt, als von den nächsten Potenzmitteln unter und über dem *A*.

Im 9. Abschnitte endlich gedenke ich in Kürze noch zweier Weisen der Mittelbestimmung, welche mit der Potenzmittelbestimmung, das

arithmetische Mittel und ein Aufsteigen von da zu höhern Ordnungen, aber in anderm Sinne, gemein haben.

Wenn ich die im Grunde sehr einfachen Sätze, die ich werde aufzustellen haben, zumeist noch durch Zahlenbeispiele erläutere und belege, so wird diess zwar für Fachmathematiker, welche keine Schwierigkeit finden, abstracte Sätze ins Concrete zu übersetzen und an der aprioristischen Bewährung derselben genug haben, sehr überflüssig sein, aber doch vielleicht manchen Andern erwünscht sein, welche durch das empirische Interesse, worauf diese Abhandlung mit eingeht, veranlasst sein könnten, nähere Kenntniss vom Inhalt derselben zu nehmen.

---

## II. Verwendung des Centralwerthes im Untersuchungsfelde der Collectivgegenstände. Allgemeinere Verhältnisse derselben, in die er eingreift.

Von einem empirischen Interesse der Potenzmittel über das *C* und *A* hinaus lässt sich bisher überhaupt nichts sagen, und im physikalischen und astronomischen Beobachtungsgebiete kann selbst das *C* auf ein solches nicht Anspruch machen, sondern nur das *A*. Denn da man immer berechtigt bleiben wird, das *A* der Beobachtungswerthe als den Werth anzusehen, welcher dem wahren Werthe, den man sucht, mit grösster Wahrscheinlichkeit am nächsten kommt, hat man keinen Anlass, sich neben dem *A* noch um das *C* zu kümmern, zumal dessen Berücksichtigung in der des *A* gewissermassen mit eingeschlossen ist.

Die Abwesenheit constanter Fehler vorausgesetzt nämlich ist kein Grund, an einer symmetrischen Wahrscheinlichkeit der Abweichungen oder sog. Fehler bezüglich der wahren Grösse, um deren Ermittelung es bei physikalischen oder astronomischen Beobachtungen zu thun ist, zu zweifeln. Unter Voraussetzung solcher Symmetrie aber fallen *C* und *A* wesentlich zusammen, das heisst — und in diesem Sinne verstehe ich hier und entsprechend künftig bei analoger Verwendung

den Ausdruck »wesentlich« — beide würden zusammenfallen, wenn man statt der unendlichen Zahl von Beobachtungswerthen, welche die Fehler geben, die eigentlich zu fordernde unendliche Zahl derselben zur Ableitung benutzen könnte, und man nähert sich diesem Erfolge um so mehr, je mehr man die Zahl der zur Ableitung dienenden Werthe vervielfältigt. Also weicht zwar das *C* vom *A* bei einer endlichen Zahl von Beobachtungsfehlern wegen unausgeglichener Zufälligkeiten der Vertheilung der Fehler bald in diesem bald in jenem Sinne ab, aber diese Abweichung mindert sich allgemein gesprochen mit der Zahl der Fehler, und man zieht vor, sich an das *A* als das *C* zu halten, weil jenes sichrer bestimmbar als dieses ist.

Auch bei Massbestimmungen im Felde von Collectivgegenständen nun hat man sich bisher ausschliesslich an den arithmetischen Mittelwerth der einzelnen Exemplare als denjenigen Werth gehalten, welcher am charakteristischsten für den Gegenstand sei, nach welchem verschiedene Collectivgegenstände zu vergleichen und von welchem an die Abweichungen der einzelnen Exemplare gleichsam als Fehler zu rechnen. Gelte es z. B. die Körperlänge, das Körpergewicht oder die Schädeldimensionen von Menschen verschiedener Nation, verschiedenen Geschlechts oder Alters, die Wachsthumshöhe verschiedener Pflanzenarten oder Länge der verschiedenen Internodien bei derselben Pflanzenart, oder die Dimensionen verschiedenartiger artistischer Gegenstände*) zu vergleichen, so hält man sich an das *A* der Exemplare als einen Werth, um den die einzelnen Exemplare als wie um einen Normalwerth schwanken. Im weiteren Sinne kann man auch Objecte der Meteorologie, als wie die monatlichen oder jährlichen mittleren Thermometerstände, Barometerstände, Regenmengen an einem gegebenen Orte unter den Begriff von Collectivgegenständen bringen, insofern als z. B. der mittlere Thermometerstand eines gegebenen Monates an einem

---

*) Ich habe u. a. die Dimensionen von Galleriegemälden (Genrebildern, Landschaftsbildern, Stillleben in gesonderterBehandlung) so wie von Druckformaten nach Breite und Höhe, von Visitenkarten, Adresskarten, Glückwünschungskarten nach Länge und Breite u. s. w. in Untersuchung gezogen, theils in Bezug auf gewisse elementare ästhetische Fragen, hauptsächlich aber, um die Abweichungsverhältnisse der Exemplare solcher der Willkühr des Menschen ihren Ursprung verdankenden Collectivgegenstände bezüglich ihrer (oben zu betrachtenden) Hauptwerthe und die Verhältnisse dieser Hauptwerthe selbst vergleichungsweise mit denen der natürlichen Gegenstände zu studiren.

gegebenen Orte in jedem Jahre ein etwas anderer ist, und man, durch so viele Jahre als man ihn beobachtet hat, so viele Exemplare eines zeitlich variirenden Collectivgegenstandes daran hat, dessen quantitative Bestimmungen sich in der That, wie künftig zu zeigen, gemeinsamen Regeln mit denen der örtlich variirenden Gegenstände unterordnen lassen. Auch bei solchen zeitlich variirenden Collectivgegenständen aber hat man bisher nur auf den arithmetischen Mittelwerth als Anhalt zum Vergleiche Rücksicht genommen.

Nun ist aber zu bemerken, dass im Gebiete der örtlich wie zeitlich variirenden Collectivgegenstände, der organischen, artistischen, wie meteorologischen, keineswegs allgemein dieselbe symmetrische Wahrscheinlichkeit der Abweichungen bezüglich des arithmetischen Mittels besteht, als man Grund hat, im physikalischen und astronomischen Beobachtungsgebiete bei Ausschluss constanter Fehler vorauszusetzen, und dass demgemäss die beiden Werthe *A* und *C* in jenem Gebiete keineswegs eben so wesentlich zusammenfallen, als in diesem. In der That hat schon Quetelet in s. Lettres sur la probabilité darauf hingewiesen, dass für nicht wenige Collectivgegenstände eine wesentliche, also nicht mit wachsender Zahl der Werthe sich mindernde, Asymmetrie der Abweichungen bezüglich *A* in so fern besteht, als je nach der Natur des Gegenstandes entweder die Zahl der positiven oder negativen Abweichungen bezüglich desselben wesentlich die grössere ist, wonach positive und negative Asymmetrie zu unterscheiden; und ich selbst habe mittels einer, gegen die seinige sehr erweiterten, Untersuchung die Fälle dieser Art so verbreitet gefunden, dass ich glauben möchte, der Fall der Symmetrie im Felde der Collectivgegenstände sei nur ein ganz specieller, vielleicht streng genommen nicht vorhandener, des allgemeinen Falles der Asymmetrie; wenn schon solche in sehr vielen Fällen klein genug ist, um bei nicht hinreichender Zahl der Exemplare unter den zufälligen Abweichungen nicht sicher erkannt werden zu können, und überhaupt zufällige Asymmetrie nicht mit wesentlicher verwechselt werden darf.

Wie dem auch sei, so leuchtet jedenfalls ein, dass in Fällen, wo eine Asymmetrie der Zahl der Abweichungen bezüglich des arithmetischen Mittels wesentlich besteht, der Centralwerth mit dem arithmetischen Mittel nicht wesentlich im obigen Sinne zusammenfallen kann. Nun gehört aber zur vergleichenden Charakteristik ver-

schiedener Collectivgegenstände ganz wesentlich die, freilich seither vernachlässigte, Bestimmung über das Vorhandensein oder Fehlen, die Richtung und den Grad der Asymmetrie der Abweichungen, eine Charakteristik, die einerseits dadurch geschehen kann, dass man die Zahlendifferenz der beiderseitigen Abweichungen im Verhältniss zur Totalzahl und die Richtung dieser Differenz angiebt, von anderer Seite aber auch dadurch, dass man die Differenz zwischen *C* und *A* ihrer Grösse und Richtung nach im Verhältniss zum mittleren Werthe der gesammten Abweichungen angiebt. Auch weiss man, wenn man das *C* eines Collectivgegenstandes kennt, sofort, ob ein gegebenes Exemplar des Gegenstandes der unteren oder oberen Grössenabtheilung desselben angehört, d. h. von mehr Werthen der Grösse nach überschritten oder unterschritten wird, was man bei Kenntniss des *A* noch nicht weiss. In dieser Beziehung hat der Centralwerth eine analoge Bedeutung für die Exemplare eines Collectivgegenstandes, als der wahrscheinliche Fehler für die Beobachtungsfehler, deren Abweichungen von ihrem arithmetischen Mittel (die man Fehler 2. Ordnung nennen kann) nicht minder unsymmetrisch dazu sind. Und so gewinnt überhaupt die Berücksichtigung des Centralwerthes und seiner Eigenschaften im Felde der Collectivgegenstände eine Bedeutung, die ihr im physikalischen und astronomischen Beobachtungsfelde nicht eben so zukommt.

Schon desshalb aber kann die einseitige Berücksichtigung des *A* im Untersuchungsfelde von Collectivgegenständen nicht das gleiche Interesse in Anspruch nehmen, als im physikalischen und astronomischen Beobachtungsfelde, weil das *A* in jenem Felde nicht eben so wie in diesem den Werth bedeuten kann, der mit grösster Wahrscheinlichkeit dem wahren am nächsten kommt; denn alle Exemplare des Collectivgegenstandes sind gleich wahr und wirklich, und der arithmetische Mittelwerth, als nur zufällig mit einem derselben zusammenfallend, in der Regel sogar unwirklich. Wenn es aber doch zur Charakteristik eines Collectivgegenstandes wesentlich gehört, den Werth zu kennen, der bezüglich desselben die Eigenschaften des *A* vereinigt, so wird es nicht minder wesentlich dazu sein, den Werth zu kennen, der bezüglich desselben die Eigenschaften des *C* vereinigt, wofern beide überhaupt auseinanderfallen. Denn unstreitig ist die Eigenschaft des *C*, die gleiche Zahl und kleinste Summe der einfachen

Abweichungen von sich abhängig zu haben, nicht minder beachtenswerth und charakteristisch, als die Eigenschaft des *A*, die gleiche Summe der einfachen Abweichungen und die kleinste Summe ihrer Quadrate von sich abhängig zu haben. Im arithmetischen Mittelwerthe eines Collectivgegenstandes hat man so zu sagen nur den Schwerpunct desselben; indem man auch die anderen Hauptwerthe, die sich darin auffinden lassen, die Verhältnisse derselben unter einander und der Abweichungen zu jedem insbesondere berücksichtigt, gewinnt man so zu sagen erst Kenntniss von der ganzen quantitativen Structur oder Organisation des Gegenstandes.

In dieser Beziehung aber mag vorgreiflich aus den künftig mitzutheilenden eingehenderen Untersuchungen noch eines dritten Hauptwerthes gedacht werden, welcher bei vorhandener Asymmetrie, die ich bemerktermassen als den allgemeineren Fall betrachte, zur Ergänzung der beiden vorigen Hauptwerthe wesentlich gehört, und sogar als Ausgangspunct der Abweichungen in einem gewissen unten zu bezeichnenden Sinne eine bevorzugte Bedeutung vor beiden hat. Es ist der Werth, um den sich die Einzelwerthe und mithin Abweichungen am dichtesten schaaren, so dass in gleichen Intervallen um so mehr davon liegen, je näher die Intervalle diesem Werthe liegen, mag man sie von ihm aus nach positiver oder negativer Seite in Betracht nehmen; wonach ich diesen Werth den dichtesten Werth nenne und mit *D* bezeichne.*)

Wo nun *C* mit *A* im obigen Sinne wesentlich zusammenfällt, fällt allerdings auch *D* mit beiden wesentlich zusammen, hingegen hat sich ausnahmslos gefunden, dass, wo *C* von *A* wesentlich abweicht, auch *D* mit keinem von beiden zusammenfällt, sondern noch über *C* hinaus von *A* abliegt, so dass eine positive Asymmetrie bezüglich *A* zu einer negativen bezüglich *D* wird.

Quetelet freilich hat eine für den ersten Anblick sehr ansprechende Theorie der Asymmetrie aufgestellt, aus welcher folgen würde, dass das wesentliche Zusammenfallen des *D* mit *A* auch im Falle wesentlicher Asymmetrie bezüglich *A*, wo also *C* mit *A* nicht wesentlich zusammenfällt, noch fortbesteht; aber er hat diess nicht

*) Die nicht ganz einfache Bestimmungsweise dieses Werthes aus dem Gange der geordneten Werthreihe auseinanderzusetzen, würde hier zu weit führen.

empirisch constatirt, und selbst das einzige, in einiger Ausführung von ihm mitgetheilte, (meteorologische) Beispiel der Asymmetrie widerspricht bei näherem Zusehen dieser Folgerung. Aber nicht blos diess eine Beispiel widerspricht ihr, sondern in allen bisher von mir untersuchten zahlreichen Fällen der Asymmetrie aus anthropologischem, botanischem, artistischem und meteorologischem Gebiete, wo die Vertheilung der Werthe regelmässig genug war, um die Lage des $D$ mit einiger Genauigkeit bestimmen zu können, was freilich nicht überall der Fall ist, habe ich alle drei Werthe ausnahmslos im Sinne obiger Regel auseinanderfallend gefunden, wonach die Quetelet'sche Theorie nicht richtig sein kann. Auch lässt sich eine andere, wie mich dünkt noch rationalere, Theorie der Asymmetrie aufstellen, welche das Auseinanderfallen von $A$, $C$, $D$ im obigen Sinne unter sich fasst, und worunter die Symmetrie nur als der besondere Fall einer verschwindenden Distanz zwischen diesen drei Hauptwerthen tritt. Die mühseligen empirischen Untersuchungen zur Prüfung dieser Theorie sind aber noch nicht so weit von mir geführt, um den Grad der Zulänglichkeit derselben vollständig beurtheilen zu können; daher ich für jetzt um so weniger davon spreche, als ein eingehender Verfolg dieses Gegenstandes überhaupt nicht in der Absicht dieser Abhandlung liegt. Doch mag noch folgenden Bemerkungen zur Vervollständigung des Vorigen Raum gegeben werden.

Der Werth $D$ steht als Ausgangswerth der Abweichungen zwar gegen die andern beiden Hauptwerthe insofern im Nachtheil, als weder die Summe der einfachen noch quadrirten Abweichungen bezüglich desselben ein Minimum oder nach beiden Seiten gleich ist, hat, aber abgesehen von dem bedeutungsvollen Umstande, dass seine Wahrscheinlichkeit als Einzelwerth genommen am grössten ist, folgenden wichtigen Umstand vor jenen voraus, den ich mit dem Namen relativer Symmetrie bezeichne.

Sei eine Abweichung bezüglich $D$ auf einer Seite mit $\Delta'$, auf der andern mit $\Delta_,$ bezeichnet, die Zahl der Abweichungen beiderseits $m'$ und $m_,$, die Summe $\Sigma\Delta'$ und $\Sigma\Delta_,$ die einfache Durchschnittsabweichung jeder Seite insbesondere $\frac{\Sigma\Delta'}{m'}$ und $\frac{\Sigma\Delta_,}{m_,}$ oder kurz $\varepsilon'$ und $\varepsilon_,$, die Zahl der Abweichungen, welche von $D$ an bis zu einem bestimmten $\Delta'$ oder $\Delta_,$ auf einer oder der andern Seite reicht,

respectiv $\mu'$ und $\mu_{,}$, so ist der Fall der relativen Symmetrie der Abweichungen bezüglich *D* der, dass zu gleichen Verhältnissen $\frac{\Delta'}{\varepsilon_{,}}$, $\frac{\Delta'}{\varepsilon_{,}}$ beiderseits auch gleiche Verhältnisse $\frac{\mu'}{m'}$, $\frac{\mu_{,}}{m_{,}}$ wesentlich gehören, was nur der allgemeinere Fall der absoluten Symmetrie ist, wo $\varepsilon' = \varepsilon_{,}$ und $m' = m_{,}$.

Leicht sieht man, dass relative wie absolute Symmetrie überhaupt nur bezüglich des dichtesten Werthes möglich ist, da man bezüglich jedes andern Werthes eine einseitige Erhöhung der Abweichungscurve bei *D* erhält, der keine solche auf der andern Seite entspricht; daher auch der arithmetische Mittelwerth nur insofern als Centrum absoluter Symmetrie auftreten kann, als er zugleich den dichtesten Werth vorstellt.

Die Bewährung der relativen Symmetrie bezüglich *D* kann natürlich wie überhaupt Bewährungen in diesem Gebiete nur an Collectionen aus einer grossen Anzahl von Exemplaren desselben Gegenstandes mit hinreichend regelmässiger Werthvertheilung geschehen. An solchen Werthreihen, die allerdings nicht häufig zu Gebote stehen, habe ich das Gesetz der beiderseitigen Abweichungen bezüglich *D* wesentlich mit dem Gauss'schen Gesetze zufälliger Abweichungen übereinstimmend gefunden, nur so, dass für jede Seite der, ihr besonders zukommende, Mittelfehler zur Berechnung der $\mu_{,}$ und $\mu'$ zu Grunde zu legen war. Hiemit scheint freilich eine Discontinuität des Gesetzes beim dichtesten Werth eingeführt, wofür sich aber meines Erachtens ein plausibler Gesichtspunct aufstellen lässt. Jedenfalls habe ich nach meinen bisherigen Erfahrungen auf nichts Anderes kommen können.

Wo die Asymmetrie der Abweichungen bezüglich des arithmetischen Mittels nicht sehr bedeutend war, erhielt ich doch auch nach der gewöhnlichen Rechnung, unter Zugrundelegung eines aus den beiderseitigen Abweichungen bezüglich *A* gemeinsam berechneten Mittelfehlers, bei Zusammenrechnung der Abweichungen beider Seiten bezüglich *A*, Resultate, die mit dem Gauss'schen Gesetze gut genug stimmten.

Schliesslich noch folgende fundamentale Bemerkung.

Im Allgemeinen findet man, dass die (nach dem Durchschnittswerthe der Abweichungen von einem der Hauptwerthe zu beurthei-

lende) Variation eines Gegenstandes mit der Grösse des Gegenstandes selbst in einem gewissen Verhältnisse steht, so dass sie zwar nicht allein, aber wesentlich mit davon abhängt; wonach z. B. die Höhe eines Grashalmes zwar absolut genommen weniger variirt als die einer Tanne, ohne dass man aber behaupten kann, sie variire verhältnissmässig weniger. Hienach ist die Variation jedes Gegenstandes unstreitig zwar einerseits durch einen ihm eigenthümlichen, nicht von seiner Grösse, sondern von seiner Qualität oder innern Beschaffenheit abhängigen, constanten Factor als bestimmt anzusehen, anderseits aber zu fragen, ob sie nicht vielmehr nach Verhältnissabweichungen als nach arithmetischen Abweichungen zu beurtheilen sei.*) Für die Fälle nun, wo die arithmetischen Abweichungen der Einzelwerthe nur klein in Verhältniss zu dem Hauptwerthe sind, zu dem sie in Beziehung stehen, wie es meistens der Fall ist, macht es keinen erheblichen Unterschied, ob man die Rechnung auf arithmetische Abweichungen oder auf Verhältnissabweichungen (unter Uebersetzung derselben und ihres Ausgangswerthes in Logarithmen) stellt, und lässt sich über den principiellen Vorzug der einen oder andern Rechnungsweise empirisch nichts entscheiden; hingegen kann der Unterschied in den Resultaten bei verhältnissmässig grossen Abweichungen beträchtlich werden, und es wird meines Erachtens principiell die Rechnungsweise vorzuziehen sein, welche der relativen Symmetrie der Abweichungen bezüglich des dichtesten Werthes (als welcher allein eine solche Symmetrie zulässt) am besten entspricht. Das war aber in den Fällen, die sich mir in dieser Beziehung als massgebend darboten, und denen allerdings noch eine grössere Ausdehnung zu wünschen, entschieden mit der auf Verhältnissabweichungen gestellten (logarithmisch geführten) Rechnung der Fall, wonach ich geneigt bin, dieser Rechnung überhaupt für Collectivgegenstände den principiellen Vorzug zu geben; indess man sich doch in Fällen, wo man

*) Seien $a$ die Einzelwerthe, zwischen denen ein Hauptwerth $M$ liegt, $a'$ die Werthe $a$, welche grösser als $M$ sind, $a_{,}$ die, welche kleiner als $M$ sind, so hat man in $(a'-M)$, $(a_{,}-M)$, positive und negative arithmetische Abweichungen, in $\frac{a'}{M}$, $\frac{a_{,}}{M}$ obere und untere Verhältnissabweichungen, und in $\log a' - \log M$, $\log a_{,} - \log M$ die zur Berechnung der Verhältnissabweichungen nöthigen positiven und negativen logarithmischen Abweichungen bezüglich $\log M$.

mit verhältnissmässig kleinen Abweichungen zu thun hat, immer lieber an die einfachere Rechnung mit arithmetischen Abweichungen halten wird und auch halten kann. Jene Rechnung aber ist so zu führen.

Den Einzelwerthen $a$, aus denen die Hauptwerthe zu bestimmen, werden ihre Logarithmen substituirt, das arithmetische Mittel, der Centralwerth und dichteste Werth dieser Logarithmen eben so wie sonst diese Hauptwerthe aus den direct gegebenen Grössen bestimmt, und die Abweichungen der einzelnen log $a$. vom dichtesten Werthe dieser Logarithmen, den ich mit $D_{\log}$ bezeichne,*) als sog. logarithmische Abweichungen bezüglich desselben genommen. Geht man dann von den Logarithmen zu den, in den Tafeln zugehörigen, Zahlwerthen über, so tritt an die Stelle des arithmetischen Mittels $A$ das, stets etwas kleinere, geometrische $G$; an die Stelle des arithmetisch dichtesten Werthes $D$ der etwas davon verschiedene, aus $D_{\log}$ abgeleitete, geometrisch dichteste Werth $D'$, indess $C$ wesentlich denselben Werth als bei der auf arithmetische Abweichungen gestellten Rechnung behält. Der Uebergang von den logarithmischen Abweichungen zu den zugehörigen Zahlwerthen liefert die Verhältnissabweichungen, und das arithmetische Mittel der logarithmischen Abweichungen als zugehörigen Zahlwerth die mittlere Verhältnissabweichung.

In Betreff des eben bemerkten Umstandes, dass $C$ constant bleibt, während die beiden andern Hauptwerthe sich je nach der Berechnungsweise ändern, ist zu erinnern, dass ihm allerdings nur eine bedingte Gültigkeit zukommt, indem Folgendes in Rücksicht kommt. Bei gerader Zahl der Werthe ist man überhaupt darauf angewiesen, irgend einen Werth zwischen den zwei, inmitten der geordneten Werthreihe stehenden, Werthen, die ich die Seitenwerthe des $C$ nenne, als definitives $C$ gelten zu lassen, worüber Bemerkungen im nächsten Abschnitte folgen; und man wird natürlich der Consequenz halber das arithmetische oder Verhältnissmittel (geometrische Mittel) der zwei Seitenwerthe dabei zu bevorzugen haben, je nachdem man überhaupt die Rechnung auf arithmetische oder Verhältnissabweichungen stellt. Inzwischen weichen diese beiden Mittel, obwohl princi-

*) Principiell zu unterscheiden, obwohl im Allgemeinen wenig abweichend, von log $D$, welches der Logarithmus des aus den arithmetischen Abweichungen bestimmten dichtesten Werthes $D$ ist.

piell nur in dem Falle ganz zusammenfallend, wo die Werthe, aus denen sie zu ziehen, einander gleich sind, um so weniger von einander ab, je mehr sich beide Seitenwerthe mit wachsender Zahl der Werthe einander nähern, das ist im Allgemeinen unmerklich, insoweit man die praktisch zur Untersuchung verwendbaren Reihen und zu berücksichtigenden Differenzen im Auge hat. Ausserdem unterliegt die Wahl eines bestimmten $C$ zwischen seinen beiden Seitenwerthen an sich einer gewissen, im folgenden Abschnitte zu betrachtenden, Unsicherheit, in welche die Wahl zwischen dem arithmetischen und Verhältniss-Mittel beider Seitenwerthe nur mit hineintritt.

Insoweit man nun nach Vorigem Anlass hat, die Rechnung vielmehr auf logarithmische oder Verhältniss-Abweichungen als auf arithmetische Abweichungen zu stellen, ist auch die Bewährung der relativen Symmetrie und des Gauss'schen Gesetzes im angegebenen Sinne vielmehr an jenen als an diesen zu suchen, und die Hauptfälle der Bewährung in dieser Hinsicht, die ich werde darzubieten haben, beziehen sich in der That auf die Vertheilung logarithmischer Abweichungen bezüglich des logarithmisch dichtesten Werthes $D_{\log}$ zu dessen beiden Seiten.

Dass das Gauss'sche Fehlergesetz in Beziehung auf arithmetische Abweichungen, wozu die Beobachtungsfehler gehören, überhaupt keine Geltung ins Unbestimmte haben kann — wie denn Gauss selbst nur eine approximative Gültigkeit in endlichen Grenzen dafür in Anspruch nimmt — leuchtet a priori ein, sofern ein Gegenstand sich nicht um mehr als seine eigene Grösse verkleinern kann, das Gesetz aber für die Abweichungen, auf die es bezogen wird, eine Gränze eben so wenig nach unten als oben kennt. Diese principielle Beschränkung der Gültigkeit des Gesetzes auf die arithmetischen Abweichungen fällt bei Beziehung auf die logarithmischen und daraus folgenden Verhältnissabweichungen weg, da jeder Gegenstand sich ebenso in unbestimmt weit getriebenem Verhältnisse verkleinern als vergrössern kann. Diess erscheint von vorn herein für die Beziehung des Gesetzes auf Abweichungen letzter Art bei Collectivgegenständen günstig, kann aber natürlich eine empirische Bewährung nicht entbehrlich machen, da man von vorn herein eben so in Zweifel sein könnte, ob nicht das Gesetz seiner Natur nach nur auf arithmetische Abweichungen bezogen werden könne; und obwohl ich keine aprio-

ristische Begründung für diesen Zweifel finde, gestehe ich doch, dass er mir nur durch entscheidende Erfahrungen benommen worden ist. Von anderer Seite aber lässt sich nicht daran denken, auch im physikalischen und astronomischen Beobachtungsgebiete mit Verhältnissabweichungen rechnen zu wollen, sofern die Fehler, die man bei Messung von Grössen, als Längen, Winkel, in diesem Gebiete begeht, von der zu messenden Grösse wesentlich unabhängig sind. Es gehört das nun eben zu den Puncten, in denen sich das eine Untersuchungsfeld vom andern scheidet.

Der Nachweis und die eingehende Erörterung von all' dem wird nicht ohne Umständlichkeit geschehen können. Und da ich nicht weiss, ob ich überhaupt noch werde im Stande sein, die weitschichtige Untersuchung dieses Feldes und die Redaction des Untersuchungs-Materials bis zu einem genügenden Abschluss durchzuführen, wünschte ich wenigstens diese vorläufige Notiz darüber in Anknüpfung an die mit hineinspielenden Verhältnisse des $C$ zu geben.

---

## III. Bestimmungsweise und verschiedene Verhältnisse des Centralwerthes gegenüber dem arithmetischen Mittel.

Um den Centralwerth aus einer gegebenen Anzahl von Werthen zu bestimmen, sind sie vor Allem ihrer Grösse nach zu ordnen, wonach die Bestimmung durch Abzählen von einem Ende der Reihe herein bis zu ihm, als der Ordnungszahl nach dem mittelsten, unter Rücksichtsnahme auf folgende Regeln, leicht geschehen kann.

Als Hauptregel hat zu gelten, dass man durch Abzählen vom einen und vom andern Ende der Reihe herein auf denselben Werth als $C$ komme. Dieser Foderung würde nicht entsprochen werden, wenn man, bei Bezeichnung der Totalzahl der Werthe mit $m$, den $\frac{m}{2}$. Werth der Reihe, von einem Ende desselben herein, als $C$ neh-

men wollte. Denn sei z. B. die Reihe der 4 Werthe *a*, *b*, *c*, *d* gegeben, so würde man als 2. Werth, von *a* hereingezählt, *b*, hingegen von *d* herein *c* als *C* erhalten, indess *C* seiner gefoderten Mittelstellung nach zwischen *b* und *c* zu suchen ist. Und hätte man die 5 Werthe *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, so würde man als $2\frac{1}{2}$. Werth von *a* herein einen Werth zwischen *b* und *c*, von *e* herein aber zwischen *d* und *c* erhalten, indess *c* seiner Mittelstellung nach selbst als *C* zu betrachten. Hingegen genügt man der Foderung sowohl bei geradem als ungeradem *m*, wenn man den $\frac{m+1}{2}$. Werth sei es vom einen oder andern Ende her als *C* nimmt, indem man dabei, unter der folgends überall festgehaltenen Voraussetzung der Rechnung mit arithmetischen Abweichungen, im Falle eines geraden *m*, das arithmetische Mittel zwischen dem $\frac{m}{2}$. und $\left(\frac{m}{2}+1\right)$. Werth als $\frac{m+1}{2}$. Werth annimmt; wovon bekanntlich das Entsprechende bei Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers durch Abzählen aus einer geordneten Fehlerreihe gilt.

Bei Messung der Exemplare eines Collectivgegenstandes können natürlich nicht unendlich kleine Massdifferenzen unterschieden werden, sondern man geht mit den Abtheilungen des Massstabes und Schätzung der Unterabtheilungen nur bis zu einer gewissen Gränze herab, was macht, dass bei grosser Zahl der Exemplare eine Mehrzahl von Exemplaren auf dasselbe Mass fallen kann. Dabei hat man sich vorzustellen, dass alle Exemplare, die sich auf dasselbe Mass häufen, eigentlich durch ein Intervall von der Grösse der unterschiedenen Intervalle, wovon das betreffende Mass die Mitte bildet, kurz durch dessen Umkreis-Intervall, vertheilt sind; und da man keinen Grund hat, eine Vertheilungsweise vor der andern in diesem Intervalle zu bevorzugen, so hat man die Vertheilung der Exemplare darin, behufs folgender Bestimmung des *C*, als gleichförmig zu denken. Zählt man nun von einem Ende der geordneten Werthreihe herein die Werthe nach obiger Regel ab, um zum *C* zu gelangen, und trifft damit auf einen Werth, in dem sich eine Mehrzahl von Exemplaren vereinigt, so hat man diesen Werth nicht ohne Weiteres genau für das *C* zu nehmen, sondern dessen Lage im Umkreis-Intervalle des getroffenen Werthes durch eine Interpolation unter Festhaltung der obigen Hauptregel zu bestimmen, dass man auf denselben

Werth komme, mag man mit Zählung und Interpolation vom einen oder andern Ende der Reihe ausgehen. Diess fodert aber, dass man im jetzigen Falle den Werth $C$ nicht auf den $\frac{m+1}{2}$. sondern genau auf den $\frac{m}{2}$. Werth fallen lässt, da die obige Regel bezüglich $\frac{m+1}{2}$ nur für den Fall anwendbar ist, dass $C$ irgend einen von vereinzelten, um endliche Intervalle auseinander liegenden, Werthen trifft oder zwischen zwei solche fällt, nicht aber für den Fall, dass $C$ innerhalb des gleichförmigen Flusses der Werthe eines Umkreis-Intervalles aufzusuchen ist.

Zur empirischen Bewährung davon, dass man in diesem Falle mit dem $\frac{m}{2}$. Werthe der gegebenen Hauptregel entspricht, und zugleich zur Erläuterung des Verfahrens mag folgendes willkührlich gewählte Beispiel dienen, in welchem auf jedes Mass (von beliebig gedachter Einheit) eine Mehrzahl von Exemplaren fällt.

| Mass | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Zahl | 2 | 5 | 16 | 10 | 7 |

Die Totalzahl $m$ ist hier 40, und der $\frac{m+1}{2}$. d. i. $20\frac{1}{2}$. Werth sei es vom linken oder rechten Ende der Reihe her abgezählt, schneidet in die Zahl 16 ein, also ist das $C$ durch Interpolation im Umkreis-Intervall des zu 16 zugehörigen Masses 3, aber nicht als $20\frac{1}{2}$. sondern als 20. Werth zu suchen. Die Gränzen des Umkreis-Intervalles von 3 sind $2\frac{1}{2}$ und $3\frac{1}{2}$. Zählen wir nun von der linken Seite her, so haben wir bis zur Gränze $2\frac{1}{2}$ des Umkreis-Intervalles 7 Werthe und fehlen somit an 20 noch. 13, welche in das Umkreis-Intervall von 3 fallen; also haben wir nach einfachstem Interpolationsprincip von der Gränze des Umkreis-Intervalles 2,5 an noch $\frac{13}{16}=0{,}8125$ dieses Intervalles zu nehmen, um zu $C$ zu gelangen, was $C=2{,}5+0{,}8125=3{,}3125$ giebt. Gehen wir statt dessen vom rechten Ende der Reihe aus, so haben wir bis zur Gränze 3,5 des Umkreis-Intervalles 17 Werthe, und fehlen mithin noch 3 an 20, die in das Umkreis-Intervall mit 16 Werthen fallen. Also haben wir von dieser Gränze an $\frac{3}{16}=0{,}8175$ des Intervalles rückwärts zu nehmen, um zu $C$ zu gelangen, was $3{,}5-8{,}1875=2{,}3125$ wie oben giebt.

Um den im 4. und 5. Abschnitt zu gebenden allgemeinen Beweisen der potenziellen Eigenschaft des $C$ eine empirische Bewäh-

rung derselben an einem willkührlichen Zahlenbeispiele vorauszuschicken, und einige Bemerkungen über verschiedene Verhältnisse des *C* daran zu knüpfen, nehme ich nach zufälligem Aufschlagen eines Bandes von 7stelligen Logarithmen die Ziffern der Charakteristik des, mir zuerst in die Augen fallenden, Logarithmus von 6700, d. i. 8260748 als eben so viel besondere Werthe, und ordne sie nach ihrer Grösse, womit die Reihe der sieben Werthe 0, 2, 4, 6, 7, 8, 8 entsteht. Der arithm. Mittelwerth *A* ist 5, der Centralwerth *C* ist 6. Die Summe der Abweichungen bezüglich *C* beträgt 17, bezüglich jedes andern Werthes aber mehr, sei es, dass er aus der Grössenreihe selbst genommen oder zwischen irgendwelchen Werthen derselben angenommen wird, z. B. 17,5 bezüglich 5,5; 18 bezüglich $A=5$; 18 gegen 4; 23 gegen 2 u. s. f. Hiegegen ist die Summe der Quadrate der Abweichungen bezüglich *A* kleiner als bezüglich *C* oder irgend einem andern Werthe, nämlich 58 bezüglich $A=5$; 65 bezüglich $C=6$ u. s. f.

Ungeachtet man nach den oben angegebenen Regeln aus jeder Werthreihe einen bestimmten Werth für *C* finden kann, lässt sich doch bei geradem *m* von einer principiellen Unsicherheit seiner Bestimmung in folgendem Sinne sprechen, die bei ungeradem *m* nicht eben so besteht, und der das *A* überhaupt nicht unterliegt. Eigentlich bilden in einer geordneten Werthreihe bei geradem *m* statt eines Werthes zwei Werthe, die ich die Seitenwerthe des *C* genannt habe, die Werthmitte, und welchen Werth zwischen diesen Seitenwerthen man als *C* annehmen mag, so entspricht er gleich gut nicht nur der Begriffsbestimmung des *C*, die gleiche Zahl positiver und negativer Abweichungen von sich abhängig zu haben, sondern auch seiner potenziellen Eigenschaft, die kleinste Summe der Abweichungen von sich abhängig zu haben, indem diese Summe bei Ausgang von irgend welchem Zwischenwerthe zwischen den Seitenwerthen, ja selbst noch bei Ausgang von einem oder dem andern der beiden Seitenwerthe selbst, denselben Minimumwerth behält, was sich schon ohne Beweis durch Formeln leicht übersehen lässt. Wenn nämlich die Lage des *C* von seiner Mittellage zwischen beiden Seitenwerthen nach einer oder der andern Seite verschoben, d. h. statt der arithmetischen Mittelgrösse zwischen beiden ein sich dem einen oder andern mehr nähernder Werth dafür angenommen wird, vermindert man jede der Abweichungen

dadurch nach einer Seite um eben so viel, als man jede nach der andern Seite vergrössert, und da die Zahl der Werthe nach beiden Seiten so lange gleich gross bleibt, als man mit der Verschiebung nicht über einen der Seitenwerthe hinausgeht, und damit die Begriffsgränze des $C$ überschreitet, so compensiren sich Zunahme und Abnahme der Abweichungen im Ganzen. So wie aber die Verschiebung diese Gränze überschreitet, wächst auch die Abweichungssumme. Füge man z. B. zur Erlangung einer geraden Zahl von Werthen den Ziffern des vorigen Beispiels noch die Mantissenziffer 3 hinzu, womit man geordnet erhält

0, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 8,

so bilden 4 und 6 die Seitenwerthe von $C$ und kann man daran wie an beliebigen andern Beispielen die vorigen Bemerkungen bewähren.

Nach der obigen Regel, bei Abzählung von einem Ende der geordneten Reihe herein den $\frac{m+1}{2}$. Werth für $C$ zu nehmen, hebt man allerdings die hier bemerkte Unbestimmtheit dadurch, dass man, wie angegeben worden, bei geradem $m$ das arithmetische Mittel zwischen dem $\frac{m}{2}$. und $\left(\frac{m}{2}+1\right)$. Werthe, welches die beiden Seitenwerthe sind, als $\frac{m+1}{2}$. Werth nimmt. Doch ist diess eigentlich Willkühr, da jeder andere Werth zwischen beiden Seitenwerthen eben so gut den $\frac{m+1}{2}$. Werth der Ordnungszahl nach vorstellen kann; und man wird zwar in praxi immer bei der angegebenen Bestimmungsweise als der einfachst möglichen und bequemsten stehen bleiben; nur tritt diese Mitzuziehung des Principes des arithmetischen Mittels zur Bestimmung des $C$ eigentlich aus dem Princip des $C$ selbst heraus, welches an sich dieser Unbestimmtheit nicht zu wehren vermag.

Vielleicht könnte man diese Unsicherheit durch das Princip des zureichenden Grundes ausgeschlossen halten, sofern kein Grund sei, von der Symmetrie der Seitenwerthe bezüglich ihres arithmetischen Mittels vielmehr nach einer als der andern Seite abzuweichen. Aber ausser den Seitenwerthen könnten eben so gut die demselben nächsten und überhaupt je zwei Werthe zu beiden Seiten des $C$ auf Symmetrie dazu Anspruch machen, ohne dass sie für alle zugleich bestehen kann, so dass in der That nur der äussere Vortheil der einfachsten

und bequemsten Bestimmung für das Mittel beider Seitenwerthe als $C$ entscheiden kann.

Von anderer Seite lässt sich bemerken, dass, wenn bei ungerader Zahl der Werthe für das gegebene $C$ irgend ein anderer Werth gesetzt wird, der noch zwischen den beiden Nachbarwerthen des vorigen seiner Grösse nach enthalten bleibt, der neue Werth die Function als $C$ noch so gut als der frühere vertritt, so dass nicht nur die Zahl der beiderseitigen Abweichungen noch gleich sondern auch die Gesammtsumme der Abweichungen bezüglich desselben noch ein Minimum bleibt, wenn schon die absolute Grösse der Abweichungssumme sich ändert; wogegen man das $A$ mit keinem andern Werthe vertauschen kann, ohne dass es seine Eigenschaft, für die gegebenen Werthe noch der arithmetische Mittelwerth zu sein, verliert. Diese Ersetzbarkeit des gegebenen $C$ durch irgend andere Werthe zwischen seinen Nachbarwerthen bei ungerader Zahl der Werthe darf zwar nicht mit der Unbestimmtheit in der Feststellung des $C$ zwischen seinen Seitenwerthen bei gerader Zahl der Werthe verwechselt werden, doch hängen wie leicht ersichtlich beide Umstände durch denselben Grund zusammen und dasselbe gilt von folgendem dritten Umstande:

Ist $C$ in einer nach der Grösse der Werthe geordneten ungeraden Grössenreihe gegeben, oder sind seine Seitenwerthe in einer geraden Grössenreihe gegeben, so kann man die Grössen auf der einen und der andern Seite davon ganz beliebig abändern, ohne dass der Werth des $C$ sich ändert oder seine Eigenschaft, das Minimum der Abweichungssumme von sich abhängig zu haben, verliert, so lange das $C$ nur seine Mittelstellung in der Grössenordnung nicht verliert und damit aufhört, seiner Definition zu entsprechen, wogegen sich der Werth $A$ durch jede Aenderung eines der Einzelwerthe, aus denen er gezogen ist, seinem Werthe nach ändert, und damit seine Eigenschaft, die kleinste Summe von Abweichungsquadraten von sich abhängig zu haben, auf das neue $A$ übergehen lässt, es sei denn, dass die Aenderung des einen Einzelwerthes durch die gleich grosse Aenderung eines andern auf der andern Seite gerade compensirt wird.

Nach der Gesammtheit dieser unter sich zusammenhängenden Puncte ist der Centralwerth weniger abhängig von der Grösse jedes Einzelwerthes, minder sicher aus denselben bestimmbar, als der arith-

metische Mittelwerth und eben damit weniger geeignet, einen Werth darzustellen, auf dessen Bestimmung alle Einzelwerthe einen nach ihrer Grösse bemessenen Einfluss haben sollen, wie diess im Sinne der Bestimmung eines wahrscheinlichsten Beobachtungswerthes ist, daher schon aus diesem Grunde der arithmetische Mittelwerth einen Vortheil vor dem Centralwerthe vorausbehält.

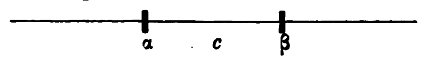
Insoweit jedoch eine Unsicherheit in Feststellung des $C$ aus angegebenen Gründen anzuerkennen ist, fällt dieselbe in Fällen, wo man mit einer unbestimmbar grossen Menge von Werthen zu thun hat, wie es im Allgemeinen bei Collectivgegenständen der Fall ist, wesentlich weg, d. h. mindert sich um so mehr, je mehr man Exemplare zuzieht, und würde, wenn man unendlich viele, sich ihrer Grösse nach an einander schliessende, zuziehen könnte, ganz wegfallen. Kann man aber doch nur eine endliche Zahl zuziehen, so tritt die betreffende Unsicherheit mit in die hinein, die überhaupt jeder Bestimmung einer Function unendlich vieler zufälliger Grössen aus einer endlichen Zahl anhängt, und der auch das $A$ nicht entzogen ist, nur dass sie für das $A$ kleiner als für das $C$ ist.

Indess man überhaupt nicht umhin kann, bei gerader Zahl der Werthe das Princip des arithmetischen Mittels zur Bestimmung des $C$ nebensächlich zuzuziehen, lässt sich auch bei ungerader Zahl der Werthe eine solche Zuziehung mitunter wenigstens vortheilhaft finden, indem man bei grosser Zahl von Einzelwerthen eines Collectivgegenstandes, die sich um $C$ herum unregelmässig vertheilen, statt des seiner Stelle nach wirklich mittelsten Einzelwerthes das arithmetische Mittel der drei mittelsten Werthe als $C$ nimmt, indem man im Allgemeinen sicher sein kann, dem wahren $C$, was aus unendlich vielen Exemplaren zu erhalten, damit näher zu kommen, als mit dem, durch Zufälligkeiten mehr influirten, Einzelwerthe.

---

## IV. Formeln für die Abänderung der Abweichungssumme je nach Verlegung ihres Ausgangspunctes und daraus fliessender Beweis für die potenzielle Eigenschaft des Centralwerths.

Der leichtern Anschaulichkeit halber repräsentire ich die Abweichungen gegebener Werthe $a$ von einem gegebenen Ausgangswerthe durch Längen die auf einer geraden Linie rechts und links von einem gegebenen Puncte $\alpha$ genommen werden, und untersuche, wie sich die Summen und Zahlen dieser immer nach ihrem absoluten Werthe zu rechnenden Abweichungen ändern, wenn man vom ersten Ausgangspunct $\alpha$ zu einem andern Ausgangspunct $\beta$ übergeht, der um $c$ nach einer oder der andern Seite von $\alpha$ abweicht. Statt Summen oder Zahlen von Abweichungen sage ich meist kurz Summen oder Zahlen. Hiezu folgendes Linearschema.




Die mit $c$ gleichseitigen Abweichungen bezüglich $\alpha$, d. h. welche nach derselben Seite gerechnet sind, nach welcher $\beta$ von $\alpha$ abweicht, nenne ich diesseitige bezüglich $\alpha$, die nach der entgegengesetzten Seite davon gerechneten, jenseitige bezüglich $\alpha$; ebenso nenne ich diesseitige bezüglich $\beta$ die, welche von $\beta$ in derselben Richtung abweichen, als $\beta$ von $\alpha$ abweicht, die entgegengesetzt von $\beta$ abweichenden jenseitige bezüglich $\beta$, welche Bezeichnungen sich respective auf die Summen und Zahlen dieser Abweichungen übertragen. In obigem Linearschema wird $c$ durch den Abstand des Punctes $\beta$ von $\alpha$ vorgestellt, und fallen alle diesseitigen Abweichungen bezüglich $\alpha$ wie bezüglich $\beta$ nach Rechts, alle jenseitigen nach Links von ihren respectiven Ausgangspuncten.

Von Abweichungen, die, im Ausgange von $\alpha$ nach $\beta$ zu, oder im Ausgange von $\beta$ nach $\alpha$ zu, ihrer absoluten Grösse nach zwischen 0 und $c$ liegen, so wie von den Grössenwerthen, durch welche diese Abweichungen geliefert werden, sage ich kurz, dass sie in das Intervall $c$ fallen.

Seien nun $S'$ und $S_,$ als diesseitige und jenseitige Summen, $m'$ und $m_,$ als diesseitige und jenseitige Zahlen bezüglich des ersten

Ausgangspunctes $\alpha$ gegeben, und sollen danach $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}_{,}$, $\mathfrak{m}'$ und $\mathfrak{m}_{,}$ als diesseitige und jenseitige Summen und Zahlen bezüglich des zweiten Ausgangspunctes $\beta$ gesucht werden, so ist dazu allgemein gesprochen ausser dem Werthe $c$, um welchen $\beta$ von $\alpha$ abliegt, noch die Kenntniss der Zahl $z$ und Summe $Z$ der Abweichungen bezüglich $\alpha$ nöthig, welche im Intervall $c$ zwischen $\alpha$ und $\beta$ enthalten sind. Die Totalzahlen und Totalsummen bezüglich $\alpha$ wie $\beta$ ergeben sich dann durch Addition der diesseitigen und jenseitigen Partialsummen, so dass

$$S = S' + S_{,}, \quad m = m' + m_{,}$$
$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' + \mathfrak{S}_{,}, \quad \mathfrak{m} = \mathfrak{m}' + \mathfrak{m}_{,}$$

Die Werthe $S'$ $S_{,}$, $\mathfrak{S}'$ $\mathfrak{S}_{,}$, $Z$, $c$ sind alle nach ihrem absoluten Werthe oder als positiv zu verrechnen. Dass diess auch von $c$ gilt, selbst wenn es nach Seite der negativen Abweichungen bezüglich $\alpha$ genommen ist, hängt natürlicherweise damit zusammen, dass die negativen Abweichungen auch selbst als positive gerechnet werden, und die Abweichungen überhaupt hier nicht als positive und negative nach einem Gegensatz des Vorzeichens, sondern als diesseitige und jenseitige bezüglich $c$ unterschieden werden.

Allgemein hat man in Obacht zu nehmen, dass alle, für den ersten Ausgangspunct als gegeben angesehenen, Werthe mit lateinischen, alle für den zweiten Ausgangspunct gesuchten mit deutschen Buchstaben, alle diesseitigen bezüglich des ersten Ausgangspunctes mit einem Strich oben, alle jenseitigen mit einem Strich unten bezeichnet sind, indess abgesehen von $z$, $Z$ und $c$, welche stets diesseits $\alpha$ fallen, die Werthe ohne Strich die Summe diesseitiger und jenseitiger Werthe geben.

Man findet nun zuvörderst ohne Schwierigkeit aus nachfolgender Betrachtung des räumlichen Schema folgende Gleichungen:

$$\mathfrak{S}' = S' + (z - m')c - Z \qquad \ldots (1)$$
$$\mathfrak{S}_{,} = S_{,} + (z + m_{,})c - Z \qquad \ldots (2)$$
$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' + \mathfrak{S}_{,} = S + (m_{,} - m')c + 2\,(zc - Z) \qquad \ldots (3)$$
$$\mathfrak{S}' - \mathfrak{S}_{,} = S' - S_{,} - mc \qquad \ldots (4)$$

Erstens nämlich vermindern sich im Uebergange von $S'$ zu $\mathfrak{S}'$ alle diesseitigen Abweichungen bezüglich $\alpha$, welche grösser als $c$ sind und deren Zahl $m' - z$ ist, um die Grösse $c$, also ist $(m' - z)c$ von $S'$ abzuziehen, um von $S'$ zu $\mathfrak{S}'$ zu gelangen. Zweitens vermindert

sich $S'$ dazu noch um die Summe der Abweichungen, welche bezüglich $\alpha$ in das Intervall $c$ fallen, also kleiner als $c$ sind, d. i. um $Z$, was zusammen die Gleichung (1) giebt.

Weiter vergrössern sich im Uebergange von $S_{,}$ zu $\mathfrak{S}_{,}$ alle jenseitigen Abweichungen bezüglich $\alpha$, deren Zahl $m_{,}$ ist, um den Werth $c$, wonach $m_{,}c$ zu $S_{,}$ zu fügen ist, dazu aber kommt noch die, mit $\mathfrak{Z}$ zu bezeichnende, Summe der $z$ jenseitigen Abweichungen bezüglich $\beta$, welche im Intervall $c$ liegen, eine Summe, die nicht mit $Z$ zusammenfällt, sofern sie von $\beta$ statt wie $Z$ von $\alpha$ aus gerechnet sein soll, daher mit einem deutschen Buchstaben bezeichnet ist, aber sich wie folgt aus den bezüglich $\alpha$ gegebenen Grössen $z$, $Z$, $c$ gleich $z\,c - Z$ findet. Sei $\Delta'$ die diesseitige Abweichung eines Werthes bezüglich $\alpha$ im Intervall $c$, so ist die Abweichung desselben Werthes bezüglich $\beta$ gleich $c - \Delta'$, mithin die Summe der $z$ Abweichungen bezüglich $\beta$ im Intervall $c$, d. i. $\mathfrak{Z}$, gleich $zc - \Sigma\Delta'$, worin $\Sigma\Delta'$ als Summe der $z$ Abweichungen $\Delta'$ bezüglich $\alpha$ im Intervall $c$, kurz durch $Z$ ausgedrückt ist. Fügt man diesen Werth von $\mathfrak{Z}$ noch zu $S_{,} + m_{,}\,c$, so kommt man damit auf Formel (2).

Die Gleichungen (3) und (4) folgen dann unmittelbar aus (1) und (2).

Die vorigen Gleichungen beziehen sich auf die Summen der Abweichungen. Hiezu kann man noch folgende bezüglich der Zahlen derselben fügen, welche sich ohne complicirten Beweis aus der einfachen Anschauung des räumlichen Schema ergeben.

$$\mathfrak{m}' = m' - z;\ \mathfrak{m}_{,} = m_{,} + z \ldots (5)$$

woraus folgt:

$$\mathfrak{m}' + \mathfrak{m}_{,} = m' + m_{,} = \mathfrak{m} = m;\ \text{und}\ \mathfrak{m}' - \mathfrak{m}_{,} = m' - m_{,} - 2z \ \ldots.\ (6).$$

In etwas anderer Weise und Form erhält man wesentlich dieselben Gleichungen so: Sei $\mathfrak{A}$ der erste, $\mathfrak{B}$ der zweite Ausgangswerth, welcher um $c$ von $\mathfrak{A}$ abweicht, so dass $\mathfrak{A} + c = \mathfrak{B}$. Seien $a$ die Werthe, deren Abweichungen bezüglich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zu nehmen, hierunter die Werthe $a' > \mathfrak{A}$, die Werthe $a_{,} < \mathfrak{A}$, so ist die Summe der Abweichungen bez. $\mathfrak{A}$ einerseits $S' = \Sigma' (a' - \mathfrak{A})$, anderseits $S_{,} = \Sigma_{,} (\mathfrak{A} - a_{,})$. Werden jetzt die Abweichungen bez. $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} + c$ genommen, so gehen diese Summen unmittelbar über in

$$\text{einerseits}\ \Sigma' \ [a' - (\mathfrak{A} + c)]$$
$$\text{anderseits}\ \Sigma_{,} \ [(\mathfrak{A} + c) - a_{,}]$$

Indem aber wegen Wachsthums von $\mathfrak{A}$ um $c$ nicht mehr alle $a' > \mathfrak{A} + c$ sind, mischen sich in erster Summe positive und negative Abweichungen, und ist der Theil der Abweichungen $a' - (\mathfrak{A} + c)$, in welchem $\mathfrak{A} + c > a'$, mit entge-

gengesetztem Vorzeichen auf die andere Seite zu bringen, da wir positive und negative Abweichungen nicht minder bezüglich $\mathfrak{B}$ als bez. $\mathfrak{A}$ gesondert haben wollen, und beiderseits nach absolutem Werthe oder als positive rechnen. Theilen wir also $\Sigma'[a'-(\mathfrak{A}+c)]$ in zwei Summen, eine Summe, in welcher $a' < \mathfrak{A}+c$, und eine Summe, in welcher $a' > \mathfrak{A}+c$, und unterscheiden hienach die Werthe $a'$ in $a''$ und $a'''$, so wie $\Sigma'$ in $\Sigma''$ und $\Sigma'''$, so haben wir jetzt:

bez. $\mathfrak{A}$.

$$S' = \Sigma''(a''-\mathfrak{A}) + \Sigma'''(a'''-\mathfrak{A})$$
$$S_, = \Sigma_,(\mathfrak{A}-a_,)$$

bez. $\mathfrak{B}$.

$$\mathfrak{S}' = \Sigma'''(a'''-\mathfrak{B}) = \Sigma'''(a'''-\mathfrak{A})-\Sigma'''c$$
$$\mathfrak{S}_, = \Sigma_,(\mathfrak{B}-a_,) + \Sigma''(\mathfrak{B}-a'')$$
$$= \Sigma_,(\mathfrak{A}-a_,) + \Sigma''(\mathfrak{A}-a'')+(\Sigma_,+\Sigma'')c$$

Substituiren wir nun in den Ausdruck von $\mathfrak{S}'$ für $\Sigma'''(a'''-\mathfrak{A})$ den, aus dem Ausdrucke von $S'$ sich ergebenden, Werth $S'-\Sigma''(a''-\mathfrak{A})$, und in den Ausdruck von $\mathfrak{S}_,$ für $\Sigma_,(\mathfrak{A}-a_,)$ den oben gegebenen Ausdruck $S_,$, so erhalten wir:

$$\mathfrak{S}' = S'-\Sigma''(a''-\mathfrak{A})-\Sigma'''c$$
$$\mathfrak{S}_, = S_,-\Sigma''(a''-\mathfrak{A})+(\Sigma_,+\Sigma'')c$$
$$\mathfrak{S} = S-2\Sigma''(a''-\mathfrak{A})+(\Sigma_,+\Sigma''-\Sigma''')c$$

Diese Werthe von $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}_,$, $\mathfrak{S}$ müssen mit den S. 25 in den Formeln (1), (2), (3) gegebenen stimmen; und in der That ist in Zahlwerthen $\Sigma_, = m_,$, $\Sigma''+\Sigma''' = m'$, $\Sigma'' = z$, mithin $\Sigma''' = m'-z$; in Summenwerthen aber $\Sigma''(a''-\mathfrak{A}) = Z$, sofern $Z$ die Summe der diesseitigen Abweichungen bezüglich $\mathfrak{A}$ ist, welche von Werthen $a$ herrühren, die $> \mathfrak{A}$, aber $< \mathfrak{A} + c$ sind.

Alle diese Formeln kann man an beliebigen Zahlenbeispielen bewähren, nur bedarf es dazu noch einer besonderen Erörterung, wie man die Werthe $m'$, $m_,$, $z$, $Z$ zu bestimmen hat, wenn der erste oder zweite Ausgangswerth oder beide mit bestimmten Werthen der Grössenreihe zusammenfallen. Falle z. B. der erste Ausgangswerth auf einen bestimmten Werth der Reihe, so kann die Frage entstehen, ob man ihn bei $m'$ oder $m_,$ mitzählen, bei $z$ mitzählen oder nicht mitzählen soll. Fällt der zweite Ausgangswerth mit einem bestimmten Werthe der Grössenreihe zusammen, so hat das zwar auf die Bestimmung von $m'$ und $m_,$ keinen Einfluss, aber es fragt sich nicht nur wieder, ob man den zweiten Ausgangswerth bei $z$ mitzählen oder nicht mitzählen, sondern auch ob man ihn in $Z$ als eine Abweichung gleich $c$ mit einrechnen oder nicht einrechnen soll.

Zur allgemeinen Beantwortung der Frage lassen sich folgende zwei, auf dasselbe führende, Regeln aufstellen:

Erste Regel. Man nehme aus den Bestimmungen, zwischen denen die Wahl ist, das Mittel.

Sei z. B. in obigem Beispiele von 7 Werthen

0, 2, 4, 6, 7, 8, 8

der erste Ausgangswerth 2, der zweite 6, also beide mit bestimmten Werthen der Grössenreihe zusammenfallend, so findet man direct, ohne Rückgang auf die Formeln:

$S'$, $S_{,}$, $S$ respectiv = 23, 2, 25 vom 1. Ausg.
$\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}_{,}$, $\mathfrak{S}$ „ = 5, 12, 17 „ 2. „

Dieselben Werthe von $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}_{,}$, $\mathfrak{S}$ wird man nach den Formeln (1) (2) (3) mittelst folgender Bestimmungsweise der darein eingehenden Werthe von $m'$, $m_{,}$, $z$, $Z$ erhalten, wobei $c$ stets 4 bleibt.

Bei $m'$ kann man zwischen 5 und 6, bei $m_{,}$ zwischen 1 und 2 schwanken; man wird also $m' = 5{,}5$, $m_{,} = 1{,}5$ setzen. — Bei $z$ kann man in Betreff des doppelten Zusammenfallens schwanken, ob man beide Ausgangspuncte, oder keinen, oder blos diesen oder blos jenen Ausgangspunct dem übrigens durch 1 gebildeten $z$ zuzufügen habe, was im Mittel 1 als Zusatz dazu giebt, wonach $z = 2$. In Betreff von $Z$ wird man zwischen 2 und $2 + c$ schwanken, also das Mittel $2 + \frac{c}{2} = 4$ als $Z$ zu nehmen haben. Also $m' = 5{,}5$; $m_{,} = 1{,}5$; $z = 2$; $Z = 4$; $c = 4$, was zu den angegebenen, direct erhaltenen, Werthen zurückführt.

Zweite Regel. Denken wir uns den Ausgangspunct, sei es ersten oder zweiten, der mit einem Werthe der Grössenreihe zusammenfällt, von diesem Werthe unendlich wenig, sei es nach diesseits oder jenseits verrückt, so dass der betreffende Werth der Grössenreihe eine unendlich kleine, aber eben desshalb die Summe nicht ändernde, Abweichung $i$ vom fictiven Ausgangspuncte hat, so sind hiemit $m'$, $m_{,}$, $z$, $Z$ für diese Lage des fictiven Ausgangspunctes diesseits oder jenseits des wahren unzweideutig bestimmt, und muss eine, mit der direct bestimmbaren wahren Summe übereinstimmende, Summe nach Aufnahme jener Bestimmungen in die Formeln erhalten werden, gleichgültig, ob man die Verrückung nach diesseits oder jenseits vornehme.

Benutzen wir zur Erläuterung wieder das obige Beispiel, wo beide Ausgangspuncte auf bestimmte Werthe der Grössenreihe fallen, so können

die Verrückungen beider um die unendlich kleine Grösse $i$ auf folgende 4 Weisen eintreten, und hienach folgende Werthe von $m'$, $m_,$, $z$, $Z$ statt finden, indess $c$ immer denselben Werth 4 behält.

| | 1. Ausg. | 2. Ausg. | $m'$ | $m'_,$ | $z$ | $Z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1) | $2+i$ | $6+i$ | 5 | 2 | 2 | 6 |
| 2) | $2-i$ | $6-i$ | 6 | 1 | 2 | 2 |
| 3) | $2+i$ | $6-i$ | 5 | 2 | 1 | 2 |
| 4) | $2-i$ | $6+i$ | 6 | 1 | 3 | 6 |
| | Mittel | | 5,5 | 1,5 | 2 | 4 |

Nun giebt schon jede einzelne der 4 Combinationen durch Substitution der Werthe $m'$, $m_,$, $z$, $Z$ in die Formeln ein mit der directen Bestimmung zutreffendes Resultat, aber auch das untenstehende Mittel, dasselbe, auf das sich schon nach der vorigen Regel kommen liess.

Zur Ableitung der potenziellen Eigenschaft des $C$, die kleinste Abweichungssumme von sich abhängig zu haben, genügt Formel (3). Nehmen wir nämlich $C$ als ersten Ausgangswerth, so folgt aus der Formel, dass bei Uebergang von da zu irgend einem andern Ausgangswerth, welcher dem Begriffe des Centralwerthes nicht entspricht, die Abweichungssumme wächst. Sofern aber nach den früher gemachten Bemerkungen bei gerader Zahl der Werthe die Lage des Centralwerthes innerhalb seiner Seitenwerthe sogar bis zum Zusammentreffen mit dem einen oder andern Seitenwerthe selbst verrückt werden kann, ohne dass der Begriff des Centralwerthes dadurch verlassen wird, folgt zugleich aus der Formel, dass bis zu solchen Gränzen auch kein Wachsthum der Abweichungssumme stattfindet.

In der That nach dem Begriffe des Centralwerthes ist $m'=m_,$. Wird er als erster Ausgangspunct genommen, so gehört zu ihm in Formel (3) die Summe $S$ und geht vermöge jener Gleichheit die Summe $\mathfrak{S}$ bezüglich irgend eines andern, um $c$ von $C$ abweichenden, Ausgangswerthes über in

$$\mathfrak{S}=S+2\ (zc-Z)\ \ldots\ (7).$$

Der Werth $2\ (zc-Z)$ ist aber entweder eine positive Grösse oder null, also $\mathfrak{S}$ grösser als $S$ oder höchstens gleich $S$. Denn $zc$ ist der, in den Formeln stets als positiv angenommene, volle Abstand zwischen beiden Ausgangspuncten $z$mal genommen, $Z$ aber die Summe

der $z$ Abweichungen, welche in das Intervall $C$ fallen, also kleiner als $c$ oder höchstens gleich $c$ sind.

Den Werth null erhält der obige Ausdruck, wenn $z=c$ und $Z=c$, was stets zusammenfällt, oder allgemeiner, den vorigen Fall mit unter sich begreifend, wenn $zc=Z$, worunter sich alle Fälle zusammenfassen, wo $c$ klein genug bleibt, um den zweiten Ausgangspunct die Begriffsgränze des $C$ nicht überschreiten zu lassen. $z=o$ und $Z=0$ sagt nämlich, dass zwischen dem 1. und 2. Ausgangspunct kein Werth, mithin keine Abweichung liegt, was dem Falle entspricht, dass bei geradem $m$ beide Ausgangswerthe zwischen Seitenwerthen desselben $C$ liegen, worauf aber auch die Fälle reducirbar sind, dass ein Zusammentreffen des ersten oder zweiten Ausgangswerthes oder beider respectiv mit einem oder dem andern oder beiden Seitenwerthen des $C$ stattfindet. Denn da der Begriff des $C$ die Gleichheit von $m'$ mit $m_{\prime}$ voraussetzt, so dürfen wir die für solche Fälle angegebenen Regeln hier auch nur so anwenden, dass dieser Bedingung entsprochen wird, was im Sinne der zweiten Regel fodert, dass der erste Ausgangspunct $C$ zwischen die Seitenwerthe hinein um $i$ verrückt gedacht werde, indess zugleich gestattet ist, auch den zweiten zwischen dieselben hinein verrückt zu denken, was zu $z=0$ und $Z=0$ zurückführt. Nun kann zwar der zweite Ausgangspunct auch nach Aussen um $i$ verrückt gedacht werden, ohne dass der Gleichheit von $m'$ mit $m_{\prime}$ Abbruch geschieht; dann wird aber, wenn ein Werth oder auch $z$ Werthe auf den zweiten Ausgangspunct fallen, $Z$ gleich dem vollen $z$-mal genommenen $c$, und wird hiemit der Gleichung $zc=Z$ immer noch genügt.

Um die Fälle besonders zu berücksichtigen, wo $C$ als der erste Ausgangspunct, oder wo der zweite Ausgangspunct, oder wo beide auf bestimmte Werthe der Grössenreihe fallen, so lassen sich nach den aufgestellten Principien folgende Regeln geben.

Seien $z_0$ und $Z_0$ die Zahl und Summe der Abweichungen bezüglich des 1. Ausgangspunctes, welche von Werthen herrühren, die wirklich zwischen beide Ausgangspuncte fallen, ohne mit einem derselben zusammenzufallen, und werde als „Ausg. best." oder „Ausg. unbest." bezeichnet, dass der betreffende Ausgangswerth mit einem bestimmten Grössenwerth der Reihe zusammenfällt oder nicht zusammenfällt, so wird $C$ als Ausgangspunct bei ungeradem $m$ stets bestimmt sein, bei geradem $m$ nur im Falle des Zusammenfallens mit einem Seitenwerthe, und wird man überhaupt für $z$ und $Z$ zu setzen haben:

| 1. Ausg. $C$ | 2. Ausg. | $z$ | $Z$ |
|---|---|---|---|
| bei ungeradem $m$ | | | |
| best. | unbest. | $z_0 + \frac{1}{2}$ | $Z_0$ |
| best. | best. | $z_0 + 1$ | $Z_0 + \frac{c}{2}$ |
| bei geradem $m$ | | | |
| best. | unbest. | $z_0 + \frac{1}{2}$ | $Z_0 + \frac{c}{2}$ |
| unbest. | best. | $z_0 + \frac{1}{2}$ | $Z_0 + \frac{c}{2}$ |
| best. | best. | $z_0 + 1$ | $Z_0 + c$ |
| unbest. | unbest. | $z_0$ | $Z_0$ |

Da $zc - Z$ nach oben gegebener Bestimmung gleich $\mathfrak{Z}$, d. i. gleich der Summe der Abweichungen im Intervall $c$ bezüglich des zweiten Ausgangspunctes ist, so kann man Formel (7) auch durch

$$\mathfrak{S} = S + 2\mathfrak{Z} \dots (8)$$

ersetzen; und lässt sich danach sagen: wenn man den Ausgangspunct der Abweichungen von $C$ auf irgend einen andern Werth verlegt, so vergrössert sich die Abweichungssumme, die bezüglich $C$ genommen ist, um die doppelte Summe aller in das Intervall $c$ fallenden Abweichungen, welche bezüglich des zweiten Ausgangspunctes genommen sind.

So wie die allgemeine Formel (3) für den speciellen Fall des Ueberganges von $C$ zu einem andern Ausgangswerthe in die einfachere Formel (7) oder (8) übergeht, kann man auch eine Vereinfachung derselben für den Uebergang von einem beliebigen Ausgangswerthe zu $A$ erzielen.

Sei $P$ die Summe, $p$ die Zahl der mit $c$ gleichseitigen Abweichungen, welche $c$ an Grösse übersteigen, bezüglich des ersten Ausgangswerthes, so wird die Summe $\mathfrak{S}$ bei Verlegung von da auf den Ausgang von A sein:

$$\mathfrak{S} = 2\,(P - pc) \dots (9).$$

Beim Ausgange von $A$ ist nämlich $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}_{,}$, mithin $\mathfrak{S}$ durch Verdoppelung von $\mathfrak{S}'$, d. i. von $S' - (m' - z) - Z$ zu erhalten. $S' - Z$ ist aber in der Formel (9) durch $P$ und $m' - z$ durch $p$ ersetzt.

Für weitere Folgerungen möge die Differenz zwischen der positiven und negativen Abweichungssumme bezüglich eines gegebenen

Ausgangswerthes kurz Summendifferenz dieses Ausgangswerthes heissen und zwar als diesseitige oder jenseitige Differenz desselben bezeichnet werden, je nachdem man darunter die diesseitige Summe minus der jenseitigen oder die jenseitige Summe minus der diesseitigen versteht.

So verstanden steht der Abstand $c$ zwischen dem ersten und zweiten Ausgangswerthe in einer Beziehung zu ihren Summendifferenzen, welche in allgemeinster Weise durch Formel (4) ausgedrückt wird, wobei, wie überall in unsern Formeln, $c$ als positiv zu verstehen und diess bei der Deutung der Formel festzuhalten ist.

Die allgemeinste Auslegung der Formel (4) geht hienach dahin, dass der Abstand $c$ zwischen dem ersten und zweiten Ausgangswerthe gleich der, durch $m$ dividirten, positiven Differenz zwischen der diesseitigen Summendifferenz $S' - S_{,}$ des ersten Ausgangswerthes und diesseitigen Summendifferenz $\mathfrak{S}' - \mathfrak{S}_{,}$ des zweiten Ausgangswerthes hiemit $c = \frac{(S' + \mathfrak{S}_{,}) - (S_{,} + \mathfrak{S}')}{m}$ ist, ein Werth, der sich in der That stets positiv findet, mag man $c$ nach einer oder der andern Seite des ersten Ausgangspunctes nehmen, und hienach diesseitige und jenseitige Summen unterscheiden.

Für die speciellen Fälle des Ausgangs von $C$ und $A$ vereinfacht sich die vorige Formel. In der That gehe man von $C$ als erstem Ausgange zu $A$ über, so hat man, nach dem Begriffe von $A$, $\mathfrak{S}' = \mathfrak{S}_{,}$, wonach (4) für diesen Fall giebt

$$c = \frac{S' - S_{,}}{m} \quad \ldots . \quad (10)$$

d. h. $A$ liegt um die durch die Gesammtzahl dividirte Summendifferenz des Werthes $C$ von $C$ ab, und zwar in Richtung der grössern Summe, was selbstverständlich ist, weil nur durch Verlegung in dieser Richtung die Ungleichheit der Summen in die bezüglich $A$ gefoderte Gleichheit übergehen kann, was aber auch aus (10) zu folgern ist, weil $c$ den gefoderten positiven Werth nur haben kann, wenn die mit ihm gleichseitige Summe $S'$ die grössere ist.

Nach Gleichung (10) lässt sich die S. 10 erwähnte Charakteristik der Asymmetrie durch das Verhältniss des Abstandes $c$ zwischen $C$ und $A$ zum Mittel der Abweichungen (bezüglich $C$) in folgende übersetzen: Die Asymmetrie ist ihrer Grösse und Richtung nach bestimmt durch die Summendifferenz von $C$, dividirt durch die Totalsumme bezüglich $C$, sofern nach Gleichung (10) $c = \frac{S' - S_{,}}{m}$, und das betreffende Abweichungsmittel $= \frac{S' + S_{,}}{m}$.

Geht man umgekehrt von $A$ als $\alpha$ zu $C$ als $\beta$ über, so muss selbstverständlich der Abstand zwischen beiden noch gleich gross als vorhin gefunden werden, nur in entgegengesetzter Richtung bezüglich $A$ als vorhin bezüglich $C$, was sich nicht minder aus (4) ableitet. Jetzt nämlich hat man $S'$, $S_{,}$ in Bezug auf $A$, und $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}_{,}$ in Bezug auf $C$ zu nehmen, hienach $S' = S_{,}$, mithin

$$c = \frac{\mathfrak{S}' - \mathfrak{S}_{,}}{m} \quad . \; . \; . \; . \quad (11)$$

was sich darein übersetzt: $C$ liegt von $A$ um die durch die Gesammtzahl dividirte Summendifferenz des Werthes $C$, also wie vorhin aber so von $C$ ab, dass die mit $c$ ungleichseitige Summe $\mathfrak{S}_{,}$ die grössere ist, widrigenfalls $c$ nicht positiv sein könnte, d. i. in entgegengesetzter Richtung als vorher.

Inzwischen obschon hienach (11) mit (10) stimmt, kann man doch im Uebergange von $A$ zu $C$ den Abstand $c$ zwischen beiden nicht nach (11) finden, weil $\mathfrak{S}_{,}$, $\mathfrak{S}'$ nicht gegeben sind. Hiegegen lässt sich für diesen Uebergang aber nicht für den umgekehrten die Zahl $z$, welche zwischen $A$ und $C$ liegt, nach (6) finden. Denn geht man von $A$ zu $C$ über, so hat man in der betreffenden Formel zu setzen: $\mathfrak{m}' - \mathfrak{m}_{,} = 0$, mithin $z = \frac{m' - m_{,}}{2}$, was $z$ als halbe Differenz der beiderseitigen Zahlen $m'$, $m_{,}$ bezüglich $A$ giebt; wogegen, wenn man von $C$ zu $A$ übergeht, in Formel (6) zu setzen ist: $m' - m_{,} = 0$, was $z = \frac{\mathfrak{m}_{,} - \mathfrak{m}'}{2}$ giebt. Aber $\mathfrak{m}_{,}$, $\mathfrak{m}'$ sind selbst gesucht.

Im Untersuchungsfelde der Collectivgegenstände kommen ausser den drei Hauptwerthen $A$, $C$, $D$ und den Abweichungen davon noch die Gränzwerthe der gegebenen Grössenreihe in wesentlichen Betracht, wie man denn schon seither gewohnt ist, zur Bezeichnung der Schwankungsweite eines Collectivgegenstandes ausser dem arithmetischen Mittel die extremen Werthe anzuführen. Hienach kann es ein Interesse haben, auch die Abweichungsverhältnisse bezüglich derselben festzustellen, soweit sie sich rücksichtslos auf die besondere Beschaffenheit der Gegenstände feststellen lassen, wodurch man zu folgenden, durch ihre Einfachheit bemerkenswerthen, Sätzen geführt wird.

1) Die Abweichungssumme bezüglich eines Extrems ist (selbstverständlihc) nach einer Seite null, indess sie nach der andern Seite die Totalsumme repräsentirt; man kann aber von jedem Extrem her

eine einseitige Summe erhalten, die abgesehen von einem, unter 4) zu bemerkenden, Specialfalle mit der Summe vom andern Ende her nicht übereinstimmt.

2) Die Abweichungssumme bezüglich jedes Extrems insbesondere ist gleich seinem $m$-fachen Abstande vom arithmetischen Mittel.

Z. B. in unserm Beispiele

0, 2, 4, 6, 7, 8, 8

ist $m = 7$, $A = 5$, die Extreme 0 und 8, ihre Abstände von $A$ respective 5 und 3, die Summe bezüglich 0 gleich $5.7 = 35$, die Summe bezüglich 8 gleich $3.7 = 21$.

Hienach kann der arithmetische Mittelwerth auch so bestimmt werden, dass man die Summe der Abweichungen bezüglich eines Extrems der Grössenreihe mit der Gesammtzahl der Werthe dividirt, und den Quotienten als Abstand des $A$ vom betreffenden Extrem nimmt.

3) Die Summe der beiden einseitigen Abweichungssummen bezüglich der Extreme ist gleich dem $m$-fachen Abstande zwischen beiden Extremen, mithin die durch $m$ dividirte Summe beider einseitigen Summen gleich diesem Abstande selbst, was sich eben so wie der vorige und folgende Satz an obigem Beispiele bewähren lässt.

4) Die Differenz zwischen beiden einseitigen Abweichungssummen ist gleich der $m$-fachen Differenz zwischen den Abständen beider Extreme vom arithmetischen Mittel. Wenn also beide Extreme gleich weit von diesem Mittel abstehen, so sind auch beide Abweichungssummen bezüglich der Extreme gleich, sonst in jedem Falle ungleich.

Der Beweis für diese Sätze kann durch unsere Formeln (1) und (2) geliefert werden.

In der That, sei der erste Ausgang von $A$ genommen, und die Abstände der beiden Extreme von da respective $c_{,}$ und $c_{,,}$. Werde danach der Ausgangspunct auf das, um $c_{,}$ abweichende, Extrem verlegt, und die Summen $\mathfrak{S}'$ und $\mathfrak{S}_{,}$ für diesen Fall gesucht, so hat man in unsere Formeln zu setzen $c = c'$, $S = S_{,} = Z$, $m' = z$, $m_{,} + z = m$; hienach $\mathfrak{S}_{,} = 0$ und $\mathfrak{S}_{,} = mc_{,}$; was den ersten und zweiten Satz giebt.

Entsprechend findet man für die Verlegung nach dem andern Extrem $\mathfrak{S}' = 0$ und $\mathfrak{S}_{,} = mc_{,,}$, mithin für die Summe der beiden ein-

seitigen Summen $m\ (c_{,}+c_{,,})$, für die Differenz derselben $m\ (c_{,}-c_{,,})$, was mit Rücksicht, dass $c_{,}$ und $c_{,,}$ sich zum vollen Abstande zwischen beiden Extremen ergänzen, zum dritten und vierten Satze führt.

Die Sätze 2) bis 4) ergeben sich übrigens auch ohne Rückgang auf unsre allgemeinen Formeln leicht so. Nehmen wir beispielsweise $m$ zum bestimmten Werth 4 an, so werden wir, um den 2. Satz zu finden, in der geordneten Werthreihe $a$, $b$, $c$, $d$ als Abstand des Extrems $d$ vom arithmetischen Mittel haben

$$d-\frac{(a+b+c+d)}{4}=\frac{3d-(a+b+c)}{4}$$

und als Abweichungssumme bezüglich $d$ haben

$$(d-a)+(d-b)+(d-c)=3d-(a+b+c).$$

Letztre soll nach unserm Satze gleich dem 4fachen des ersten Werthes sein, wie sich in der That nach Vergleich der vorigen Ausdrücke findet.

Anderseits ist der Abstand des andern Extremes $a$ von $A$ gleich $\frac{a+b+c+d}{4}-a$, und die Abweichungssumme bezüglich $a$ gleich $(b-a)+(c-a)+(d-a)$, wonach sich der Beweis für die andern Sätze weiter führen lässt.

Ist das Gesetz der Abweichungen in so weit bekannt, dass daraus Beziehungen zwischen den in den allgemeinen Formeln enthaltenen Werthen hervorgehen, so wird man diesen Formeln bestimmtere substituiren können. Setzen wir z. B. die Abweichungen bezüglich eines gewissen Werthes $\mathfrak{A}$, befolgen das Gauss'sche Gesetz zufälliger Abweichungen, es solle von da der Uebergang zu einem andern, um $c$ davon abliegenden, Werthe genommen, und die hiebei erfolgende Aenderung der Abweichungssumme bestimmt werden, so lassen sich $z$ und $Z$ als Functionen des Werthes $c$ bestimmen. Sei nämlich $\varepsilon'=\frac{S'}{m'}$ das einfache Mittel der diesseitigen Abweichungen bezüglich $\mathfrak{A}$, so ist unter Voraussetzung, dass das betreffende Gesetz für jede Seite insbesondre anwendbar ist, nach Uebersetzung der bekannten massgebenden Integrale in unendliche Reihen

$$\frac{z}{m'} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{c}{\varepsilon'} - \frac{c^3}{3\pi\varepsilon'^3} + \ldots\right)$$

$$\frac{Z}{S'} = \frac{c}{\varepsilon'\pi}\left(\frac{c}{\varepsilon'} - \frac{c^3}{3\pi\varepsilon'^3} + \ldots\right)$$

worin $\pi$ die Ludolf'sche Zahl.

Wird nun $c$ als klein gegen $\varepsilon'$ angenommen, so kann man die Glieder mit der dritten und höhern Potenzen von $\frac{c}{\varepsilon'}$ gegen die erste Potenz vernachlässigen, und wird hiemit, unter Rücksicht, dass $S' = m'\varepsilon'$, haben:

$$z = \frac{2m'c}{\pi\varepsilon'}, \quad Z = \frac{m'c^2}{\pi\varepsilon'}$$

$$\mathfrak{S}' = S' - m'c + \frac{m'c^2}{\pi\varepsilon'} \quad \ldots \quad (12)$$

$$\mathfrak{S}_{,} = S_{,} + m_{,}c + \frac{m'c^2}{\pi\varepsilon'} \quad \ldots \quad (13)$$

$$\mathfrak{S} = S + (m_{,} - m')c + \frac{2m'c^2}{\pi\varepsilon}. \quad \ldots \quad (14)$$

Zum Vergleiche mit den bisherigen, auf die Summe der einfachen Abweichungen bezüglichen, Formeln füge ich schliesslich noch die entsprechenden Formeln bezüglich der Summen der Abweichungsquadrate, kurz Quadratsummen, mit einigen Hauptfolgerungen daraus hinzu, ohne jedoch auf die Ableitung derselben einzugehen, welche in analoger Weise als Betreffs der einfachen Summen geschehen ist. Der Richtigkeit dieser Formeln kann man sich an beliebigen Zahlenbeispielen versichern.

Sei wie früher $c$ die Grösse, um welche der zweite Ausgangspunct $\beta$ vom ersten $\alpha$ abweicht, $z$, $Z$ die Zahl und Summe der in das Intervall $c$ fallenden einfachen Abweichungen, $m'$ und $m_{,}$ die diesseitige und jenseitige Zahl der einfachen Abweichungen bezüglich $\alpha$; hingegen seien jetzt $s'$ und $s_{,}$ die diesseitige und jenseitige Summe der einfachen Abweichungen bezüglich $\alpha$; ferner $S'$, $S_{,}$, $S$, $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}_{,}$, $\mathfrak{S}$ jetzt eben so Quadratsummen wie früher einfache Summen von Abweichungen, die ersten 3 bezüglich $\alpha$, die andern 3 bezüglich $\beta$, endlich $Q$ die Summe von Quadraten der Abweichungen bez. $\alpha$, die in das Intervall $c$ fallen; hienach hat man

$$\mathfrak{S}' = S' + (m' - z)c^2 - 2c(s' - Z) - Q \quad \ldots \quad (15)$$

$$\mathfrak{S}_{,} = S_{,} + (m_{,} + z)c^2 + 2c(s_{,} - Z) + Q \quad \ldots \quad (16)$$

$$\mathfrak{S} = S + mc^2 + 2c(s_{,} - s') \quad \ldots \quad (17)$$

$$\mathfrak{S}' - \mathfrak{S}_{,} = S' - S_{,} + (m' - m_{,} - 2z)c^2 - 2c(s' + s_{,} - 2Z) - 2Q \ldots \quad (18)$$

Die potenzielle Eigenschaft von $A$, dass die Quadratsumme in

Bezug dazu die kleinstmögliche ist, folgt aus (17); denn, setzen wir $A$ als ersten Ausgangswerth, wozu die Quadratsumme $S$ gehört, und berücksichtigen, dass $s' = s_,$ bezüglich $A$, so erhalten wir bei Verlegung auf irgend einen, um $c$ davon abweichenden, Ausgangswerth die Summe

$$\mathfrak{S} = S + mc^2 \ldots (19)$$

also $\mathfrak{S}$ um $mc^2$ grösser als $S$.

Nennen wir nun $\mathfrak{S}\,(c_,)$ die Quadratsumme bezüglich eines Werthes, der um $c_,$ von $A$ abweicht, und $\mathfrak{S}\,(c_{,,})$ bezüglich eines andern, der um $c_{,,}$ von $A$ abweicht, so haben wir nach Vorigem:

$$\mathfrak{S}(c_,) - \mathfrak{S}(c_{,,}) = m(c_,^2 - c_{,,}^2) = m(c_, + c_{,,})(c_, - c_{,,}) \ldots (20)$$

woraus dann weiter folgende Sätze fliessen:

Die Quadratsummen bezüglich zweier Ausgangswerthe, die nach beiden Seiten um gleich viel von $A$ abweichen, sind einander gleich.

Die Quadratsumme bezüglich eines Extrems übersteigt die Quadratsumme bezüglich $A$ um das $m$-fache Quadrat des Abstandes zwischen $A$ und dem betreffenden Extrem.

Die Differenz zwischen den Quadratsummen bezüglich beider Extreme ist gleich dem $m$-fachen Product aus der Summe in die Abstände beider Extreme von $A$.

Durch Vergleich von Formel (10) mit (19) unter Rücksicht auf die verschiedene Bedeutung der Buchstaben in beiden Formeln ergiebt sich noch der Satz:

Der $m$-fache Unterschied zwischen den Quadratsummen bezüglich $A$ und $C$ ist gleich dem Quadrat des Unterschiedes zwischen der diesseitigen und jenseitigen einfachen Summe bezüglich $C$.

---

# V. Ueber die Potenzmittelwerthe im Allgemeinen.

Unter einem Potenzmittelwerthe gegebener Einzelwerthe verstehe ich nach der im Eingange gegebenen Erklärung einen Werth, bezüglich dessen die Summe der, auf eine und dieselbe Potenz erhobenen, Abweichungen die kleinstmögliche ist; wonach der Centralwerth, als

Ausgangswerth der Minimalsumme von Abweichungen erster Potenz, und der arithmetische Mittelwerth, als Ausgangswerth der Abweichungen zweiter Potenz, nur besondere Fälle der Potenzmittelwerthe überhaupt darstellen.

Nachdem wir nun die Regel kennen, nach welcher diese Potenzmittel niederster Ordnung zu bestimmen sind, lässt sich nach blosser Analogie damit, die später durch einen Beweis zu ersetzen sein wird, auch die Bestimmungsweise der höheren Potenzmittel schon voraussehen, nämlich so:

Jeder Werth von der Potenz null ist bekanntlich gleich 1, mithin eine Summe von $m$ Werthen nullter Potenz gleich der Zahl $m$ selbst. Hienach lässt sich die Eigenschaft des $C$, eine gleiche Zahl beiderseitiger Abweichungen von sich abhängig zu haben, auch unter der Form ausdrücken, dass $C$ eine gleiche Summe von Abweichungen nullter Potenz von sich abhängig hat; womit die Eigenschaft solidarisch ist, die kleinste Summe von Abweichungen erster Potenz von sich abhängig zu haben. Weiter ist bei dem $A$ die Eigenschaft, die gleiche Summe beiderseitiger Abweichungen erster Potenz von sich abhängig zu haben, solidarisch mit der Eigenschaft, die kleinste Summe von Abweichungen zweiter Potenz von sich abhängig zu haben. Also lässt sich voraussehen, dass allgemein die Eigenschaft, eine gleiche Summe beiderseitiger Abweichungen $n$-ter Potenz von sich abhängig zu haben, was wir kurz die Gleichheitseigenschaft eines Potenzmittels nennen mögen, solidarisch mit der Eigenschaft sein wird, die kleinste Summe von Abweichungen $(n+1)$ter Potenz von sich abhängig zu haben, wofür wir schon früher die Bezeichnung potenzielle Eigenschaft gebraucht haben.

Und in der That bestätigt sich die allgemeine Verknüpfung beider Eigenschaften, eben so wie bezüglich $C$ und $A$, auch bezüglich höherer Potenzmittel an jedem Zahlenbeispiel, an welchem man dieselbe prüfen will.

Gelte es z. B. zu zeigen, dass die Summe der auf die dritte Potenz erhobenen Abweichungen die kleinstmögliche ist, wenn die Abweichungen von einem Werthe genommen werden, der eine gleiche Summe von Quadraten der beiderseitigen Abweichungen von sich abhängig hat, so nehme man von vorn herein eine Werthreihe so, dass letztere Bedingung bezüglich eines gegebenen Ausgangswerthes

erfüllt ist, stelle die Summe der cubirten Abweichungen in Bezug darauf dar, und ändere dann den Ausgangswerth der Abweichungen beliebig, so wird nach Massgabe als die Bedingung der Gleichheit der Quadrate der beiderseitigen Abweichungen damit verletzt wird, auch die Summe der cubirten Abweichungen damit wachsen, sei es, dass die Aenderung des Ausgangswerthes nach einer oder der andern Seite geschehe. Es genüge an folgenden zwei Beispielen.

Erstes Beispiel. Seien die drei Werthe

1, 2, 10

gegeben, und werden die Abweichungen derselben von 5 genommen, so ist die angegebene Bedingung des ersten Ausganges erfüllt, indem die Summe der Quadrate der Abweichungen nach jeder von beiden Seiten 25 ist. Die Summe der Cuben der Abweichungen findet sich links 91, rechts 125, zusammen 216. Soll unser Theorem bezüglich der Verknüpfung der zwei fundamentalen Eigenschaften der Potenzmittel richtig sein, so muss jede Verlegung von dem Ausgangswerthe 5, welcher die Summe der Abweichungsquadrate nach beiden Seiten gleich macht, auf einen andern, der sie ungleich macht, eine grössere Summe der Cuben mitführen. Verlege man nun z. B. den Ausgang von 5 auf den nahen Werth 5,5, so erhält man als Summe der Abweichungsquadrate links 32,50, rechts 20,25, und als Summe der Cuben links 134,000, rechts 91,125, im Ganzen 225,125 statt vorhin 216.

Verlege man hienach den Ausgangspunct um eben so viel nach Links, als vorhin nach Rechts, indem man die Abweichungen von 4,5 statt von 5 rechnet, so findet man jetzt nach entsprechender Rechnung als Summe der cubirten Abweichungen im Ganzen 224,875 statt 216.

Zweites Beispiel. Sei die Zahlenreihe

1, 5, 6, 11, 12

gegeben, so findet sich die Gleichheit der beiderseitigen Summen der Abweichungsquadrate für den Ausgang von 7 erfüllt, indem man bezüglich dazu links wie rechts 41 hat, indess die Summe der Cuben links 225, rechts 189, zusammen 414 ist. Werde jetzt der Ausgang von 8 genommen, so erhält man als Summe der Cuben 469, und werde er von 6 genommen, 467 statt 414.

Bei letzterm Beispiele kann man bemerken, dass der Werth 7, bezüglich dessen die beiderseitigen Summen der Abweichungsquadrate gleich sind, mit dem arithmetischen Mittel, bezüglich dessen die einfachen Summen gleich sind, als welches ebenfalls 7 ist, zusammenfällt, was aber nur zufällig ist, wie denn derselbe Umstand bei vorigem Beispiel nicht statt findet.

Allgemein nun werde ich einen Potenzmittelwerth mit $M$ bezeichnen, und als Mittel nullter, erster, zweiter u. s. w. Ordnung, respective als $M_0$, $M_1$, $M_2$ u. s. w. unterscheiden, je nachdem die beiderseitigen Abweichungen von nullter, erster, zweiter Potenz u. s. w. einander gleich sind, werde also die Ordnung nach der Potenz, auf welche sich die Gleichheitseigenschaft bezieht, nicht nach der, auf welche sich die potenzielle Eigenschaft bezieht, bezeichnen. Hienach fällt das Potenzmittel nullter Ordnung $M_0$ mit unserm $C$, das Potenzmittel erster Ordnung $M_1$ mit unserm $A$ zusammen. Da wir uns wesentlich hier überhaupt nur mit Potenzmitteln beschäftigen, kann auch der Ausdruck Mittel schlechthin dafür gelten.

An die Stelle der vorhin gebrauchten Analogie und empirischen Einzelbewährung lässt sich nun folgender ebenso einfacher als allgemeiner Beweis für die Verknüpfung der beiden fundamentalen Eigenschaften der Potenzmittel irgend welcher Ordnung setzen:

Seien allgemein $a$ die Werthe, deren Abweichungen von einem bestimmten $M$ genommen werden sollen, $a'$ die Werthe, welche grösser als $M$, und $a_,$ die Werthe, welche kleiner als $M$ sind; mithin $a'-M$ positive, $a_,-M$ negative Abweichungen. Sofern aber letztere auch als positiv zählen sollen, wird man sie durch $M-a_,$ ersetzen. Hienach wird es gelten, um ein $M$ von $n$-ter Ordnung aus den gegebenen Werthen $a$ zu erhalten, dasselbe als unbekannten Werth $x$ daraus so zu bestimmen, dass

$$\Sigma(x-a_,)^{n+1}+\Sigma(a'-x)^{n+1} \ldots (21)$$

ein Minimum wird, was durch Differenzirung dieses Werthes in Bezug auf $x$ und Nullsetzung des Differenzials giebt

$$\Sigma(x-a_,)^{n}-\Sigma(a'-x)^{n} = 0 \ldots (22)$$

mithin

$$\Sigma(x-a_,)^{n} = \Sigma(a'-x)^{n} \ldots (23)$$

Wie man sieht, liegt in der Verknüpfung der Gleichungen (21) und (23) die Verknüpfung der fundamentalen Eigenschaften der Po-

tenzmittel allgemein ausgedrückt, indem damit gesagt ist: um die Summe von Abweichungen bezüglich eines Werthes $x$, die zur $(n+1)$ten Potenz erhoben sind, zu einem Minimum zu machen, hat man $x$ so zu bestimmen, dass die beiderseitigen Summen der zur $n$-ten Potenz erhobenen Abweichungen einander gleich sind.

Im Allgemeinen fallen die $M$ verschiedener Ordnung aus denselben Werthen $a$ auseinander, doch können in speciellen Fällen (wie im obigen Beispiel (S. 39) auch diese oder jene zusammenfallen, ohne dass desshalb alle zusammenfallen. Es giebt aber einen noch ziemlich allgemeinen Fall, wo alle nothwendig zusammenfallen, d. i. der Fall vollkommener Symmetrie der beiderseitigen Abweichungen bezüglich eines $M$, die damit zugleich für alle $M$ verschiedener Ordnung besteht.

In der That, wenn in einer Werthreihe jeder einzelnen Abweichung $a'-x$ bezüglich eines Werthes $x$ auf einer Seite eine gleich grosse Abweichung $x-a_{,}$ auf der andern Seite entspricht, so reicht die Gleichung zwischen irgend zwei gleichen Gliedern $(a'-x)^n$ und $(x-a_{,})^n$ der einen und andern Seite hin, den Werth von $x$ unabhängig von der Grösse des Exponenten, also für jedes $n$ identisch, zu bestimmen.

Unter diesen Fall gehört der einfachste, mit dem man überhaupt zu thun haben kann, dass man nämlich ein Mittel blos aus zwei Werthen $a'$, $a_{,}$ zieht; indem man aus der Gleichung

$$(a'-x)^n = (x-a_{,})^n$$

denselben Werth für $x$ erhält, mag man für $n$ eine beliebige Potenz setzen, nur dass derselbe bei $n = 0$ unbestimmt wird.

Ferner aber gehört hierunter der, bei den Beobachtungsfehlern vorausgesetzte, Fall einer symmetrischen Wahrscheinlichkeit bezüglich des arithmetischen Mittels, dem man sich aber in Wirklichkeit nur um so mehr nähern kann, je mehr man die Zahl der Beobachtungen vervielfältigt.

Nächst dem Beweise des allgemeinen Zusammengehörs der Gleichheits-Eigenschaft und potenziellen Eigenschaft bei Potenzmitteln jeder Ordnung gilt es die Ableitung der $M$ gegebener Ordnung aus den dazu gegebenen Einzelwerthen $a$, was, wie man leicht aus der Form der Gleichungen (22) oder (23) erkennt, für ein Mittel $M_n$ auf die Lösung einer Gleichung $n$-ter Ordnung herauskommt. Nun gilt die Gleichung

(22) oder (23) zwar ganz allgemein für Bestimmung von $x = M_n$ sowohl bei geradem als ungeradem $n$; aber ihre Anwendung setzt voraus, dass man schon wisse, zwischen welche Werthe $a$ der Werth $x$ falle, um danach die Scheidung der $a'$ und $a_{,}$ vornehmen zu können. Diese Kenntniss wird jedoch bei ungeradem $n$ durch die Bemerkung entbehrlich, dass man in diesem Falle, ohne die negativen Abweichungen in positive umzukehren und die $a'$ und $a_{,}$ zu scheiden, den Werth $x$ aus der Gleichung

$$\Sigma(a-x)^n = 0 \ldots (24)$$

bestimmen kann, wie sich durch die bekannte Bestimmung des arithmetischen Mittels $M_1$ erläutert. Lösen wir nämlich den Ausdruck $\Sigma(a-x)$ in seine Bestandtheile auf, indem wir unter $a_{,}$, $a_{,,}$, $a_{,,,}$ die einzelnen $a$ rücksichtslos ob $> x$ oder $< x$ verstehen, so haben wir

$$(a_{,}-x)+(a_{,,}-x)+(a_{,,,}-x)\ldots = 0,$$

und hieraus $x = \frac{\Sigma a}{m}$, wenn $m$ die Zahl der Werthe.

Bei einem geraden Index $n$ aber kann man nicht eben so ohne Unterscheidung der $a'$ und $a_{,}$ setzen

$$(a_{,}-x)^n+(a_{,,}-x)^n+ \text{etc.} = 0$$

weil die Glieder dieser Gleichung linkerseits bei geradem $n$ alle positiv sind, mithin keine Summe $= 0$ geben können. Auch stimmt diese Gleichung bei geradem $n$ nicht eben so wie bei ungeradem mit der fundamentalen (22) oder (23), weil $(x-a_{,})^n$ hier nicht mit $-(a_{,}-x)^n$ vertauscht werden kann. Man muss also bei (22) oder (23) zur Ableitung von $x$ stehen bleiben, ohne aus der Gleichung selbst folgern zu können, zwischen welche Werthe $a$ der Werth $x$ fällt, und wie demnach die $a'$ und $a_{,}$ zu scheiden.

Vielleicht giebt es eine allgemeine Lösung dieser Schwierigkeit, die mir doch nicht beifällt. Indessen kann man derselben für den Fall, dass es ein Interesse haben sollte, sich mit höheren Potenzmittelwerthen eingehender zu beschäftigen, empirisch dadurch begegnen, dass man aus den gegebenen $a$, statt des $M$ mit geradem Index $n$, erst das $M$ von nächst niederer ungerader Ordnung $n-1$ nach Gleichung (24) sucht, also z. B. um die Scheidung der $a$ für die Bestimmung von $M_2$ vorzunehmen, erst das arithmetische Mittel $M_1$ bestimmt, hienach die Scheidung der $a$ bezüglich der Bestimmung von $M_2$ so vornimmt, wie sie sich für $M_1$ gefunden hat. Nach An-

wendung dieser Scheidung wird man aus Formel (22) oder (23) ein $M_n$ finden, was entweder dieser Scheidung entspricht, indem es zwischen die vorausgesetzten $a'$ und $a_,$ fällt — dann kann man dabei stehen bleiben — oder zwischen andere $a'$ und $a_,$ fällt; dann hat man die Scheidung hienach bei einer neuen Rechnung vorzunehmen, und diess nöthigenfalls zu wiederholen, bis man zum Zweck kommt. Bei den weiterhin im 8. Abschnitt geführten Berechnungen von $M_2$ jedoch hat weit in den meisten Fällen schon die erste Rechnung nach der durch das arithmetische Mittel angezeigten Scheidung, und, wo diese fehl schlug, ausnahmslos die zweite zugereicht.

Abgesehen von voriger Schwierigkeit hat man natürlich für die Ableitung der $M$ höherer Ordnung noch die Schwierigkeit der Auflösung von Gleichungen höheren Grades zu überwinden, die nur für $M_2$ ohne Belang ist, da es sich dabei blos um die Auflösung einer quadratischen Gleichung handelt; und da ich hiervon im 8. Abschnitte Gebrauch zu machen haben werde, so entwickele ich folgends die Regel dazu:

Die für den Fall von $n = 2$ geltende Gleichung

$$\Sigma(x-a_,)^2 - \Sigma(a'-x)^2 = 0$$

entwickelt sich zu folgender:

$$\Sigma a'^2 - \Sigma a_,^2 - 2(\Sigma a' - \Sigma a_,)x + (m'-m_,)x^2 = 0$$

worin $m'$ die Zahl der $a'$, und $m_,$ die der $a_,$. Setzen wir nun kurz:

$$\Sigma a'^2 - \Sigma a_,^2 = \varkappa,\ \Sigma a' - \Sigma a_, = \lambda,\ m' - m_, = \mu,$$

so finden wir

$$x = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \mu\varkappa}}{\mu} \quad \ldots (25).$$

Wenn $m' = m_,$, mithin $\mu = 0$, fällt das Glied mit $x^2$ weg, und hat man einfach $x = \frac{\varkappa}{2\lambda}$.

Wenden wir diess auf das erste Beispiel S. 39 an, so haben wir nach der hiebei zutreffenden Voraussetzung, dass die $a'$ und $a_,$ sich entsprechend als für $M_,$ oder $A$ scheiden,

$$\varkappa = 95,\ \lambda = 7,\ \mu = -1$$

was giebt

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{144}}{-1} = +5 \text{ und } -19$$

wovon nur der erste Werth, welcher $M_2$ zwischen die gegebenen $a$ fallen lässt, brauchbar ist.

Nehmen wir das zweite Beispiel S. 39, so werden wir nach gleicher Regel haben

$$\varkappa = 203,\ \lambda = 11,\ \mu = -1,$$

was giebt $x = +7$ und $= -29$.

Beide berechnete $x$ stimmen mit den bei den Beispielen von vorn herein zu Grunde gelegten überein.

Man könnte wünschen, einfache Formeln für den directen Uebergang von einem niedern zum nächst höhern Potenzmittel zu haben, wozu es genügte, den Abstand $c$ zwischen beiden als Function der Abweichungen oder Abweichungspotenzen bezüglich des niedern angeben zu können, und für den Uebergang von $C$ zu $A$ d. i. von $M_0$ zu $M_1$ ist diesem Bedürfniss durch Formel (10) S. 32 genügt. Aber höher hinauf gelingt es nicht, demselben ferner zu entsprechen. Indem ich z. B. eine solche Formel bezüglich des Ueberganges von $M_1$ zu $M_2$ aufzustellen versuche, komme ich nur auf folgende Beziehungen, in welche die Zahlen und Summen oberhalb $c$ mit eingehen, so dass sie die Kenntniss von $c$ schon voraussetzen.

$$\mathfrak{S}_2 = 2(P_2 - 2Pc + pc^2)$$
$$S_2 = 2\ P_2 - 4cP - (m - 2p)c^2$$
$$\mathfrak{S}_2 - S_2 = mc^2.$$

Hierin bedeutet $\mathfrak{S}_2$ die Summe der Abweichungsquadrate bezüglich $M_2$; $S_2$ die Summe derselben bezüglich $M_1$; $p$ die Zahl, $P$ die Summe der diesseitigen einfachen Abweichungen bezüglich $M_1$, welche $c$ an Grösse übersteigen, $P_2$ die Summe der Quadrate dieser Abweichungen, $m$ die Totalzahl der Werthe.

Ich übergehe die Ableitung dieser Gleichungen, die sich leicht an beliebigen Beispielen bewähren lassen. Auch liegt schon eine Bewährung darin, dass die dritte, mit (19) stimmende, Gleichung richtig als Differenz der beiden ersten herauskommt, wobei zu berücksichtigen, dass in (19) $\mathfrak{S}_2$, $S_2$ einfach durch $\mathfrak{S}$, $S$ ersetzt sind.

Wenn ein $M$ beliebiger Ordnung für eine bestimmte Werthreihe bestimmt ist, so kann man fragen, wie es sich ändert, wenn einer oder der andere Werth aus der Werthreihe sich ändert. Gilt es nun das arithmetische Mittel $M_1$ oder $A$, so findet sich leicht, dass, wenn irgend ein Werth $a$ sich um $\delta$ ändert, sei $\delta$ gross oder klein, der Werth $M_1$ sich genau um $\frac{\delta}{m}$ ändert, wenn $m$ die Zahl der Werthe

ist. Gilt es aber höhere $M$, so würden zur genauen Bestimmung der Aenderung von $M_n$ als Function der Veränderung eines Werthes $a$ höhere Gleichungen gehören. Ist indessen die Aenderung von $a$ verhältnissmässig nur klein, $=da$, so kann man die zugehörige Aenderung von $M_n$ leicht approximativ nach folgender Gleichung bestimmen:

$$dx = \frac{\pm (a-x)^{n-1} da}{\Sigma(a'-x)^{n-1} + \Sigma(x-a_{,})^{n-1}} \quad . \; . \; . \quad (26)$$

wo $x = M_n$, $a$ der Grössenwerth, welcher die Aenderung $da$ erleidet, und das Vorzeichen $+$ oder $-$ zu nehmen ist, je nachdem $a$ zu den $a'$ oder $a_{,}$ gehört, so dass $dx$ immer dem Vorzeichen von $da$ folgt.

In der That, wenn man nach der Gleichung für $x = M_n$ hat

$$(x-a_{,})^n + (x-a_{,,})^n + \ldots = (a'-x)^n + (a''-x)^n + \ldots$$

so wird man, wenn beispielsweise unter den Werthen $a > x$ sich $a'$ um das kleine $da'$ und $x$ in Abhängigkeit davon ändert, ohne dass die übrigen $a$ sich ändern, die Beziehung zwischen $dx$ und $da'$ durch Differenzirung voriger Gleichung in Bezug auf $a'$ und auf $x$ als Function von $a'$ erhalten können, indem man die Aenderung von $x$, welche der Aenderung von $a'$ zugehört, $= \frac{dx}{da'} da'$ setzt. Diess giebt, unter Ersatz der, allen Gliedern der Differenzialgleichung gemeinsam werdenden, Factoren $n$ und $da'$ durch 1

$$(a'-x)^{n-1}\left(1 - \frac{dx}{da'}\right) - (a''-x)^{n-1}\frac{dx}{da'} - \text{etc.} =$$
$$(x-a_{,})^{n-1}\frac{dx}{da'} + (x-a_{,,})^{n-1}\frac{dx}{da'} + \text{etc.}$$

was sich in die Gleichung (26) zusammenziehen lässt. Entsprechend, wenn statt eines Werthes $a'$ ein Werth $a_{,}$ sich ändert.

Diese Ableitung und mithin auch die Gleichung (26) schlägt nur in dem Falle fehl, wenn $n = 0$, es sich also um den Centralwerth handelt, indem dann jedes $(a'-x)^n$ und $(x-a_{,})^n = 1$, also constant, mithin das Differenzial davon null ist; was der Thatsache entspricht, dass durch Veränderung eines Werthes $a$ keine Veränderung von $x$ wesentlich bedingt ist.

Für $x = M_2$ mag man zur Bewährung von (26) die oben gegebene Werthreihe

1, 2, 10

benutzen. Das $x$ ist hier angegebenermassen 5. Aendert sich jetzt $10 = a$ in 11, so ist $a - x = 5$, $da = 1$, der Nenner von (26) $= 4 + 3 + 5$; also

$dx = \frac{5}{12}$, mithin das neue $M_2$ der Reihe 1, 2, 11 gleich $5\frac{5}{12} = 5{,}417$. Die directe genaue Bestimmung giebt 5,416. Hienach müssen die Quadrate der Abweichungen der Einzelwerthe 1, 2, 11 von $5\frac{5}{12}$ beiderseits eine nahe gleiche Summe geben. Diese Abweichungen sind respective $5\frac{7}{12}$ rechts, und $3\frac{5}{12}$, $4\frac{5}{12}$ links; ihre Quadrate $\frac{4489}{144}$ rechts und $\frac{1681}{144}$, $\frac{2809}{144}$ links. $1681 + 2809 = 4490$ ist aber fast genau $= 4489$.

Aendert sich statt dessen 1 auf 2, so ist $x - a = 4$, $da = 1$ etc., giebt $dx = \frac{1}{3}$, das neue $x = 5{,}333$, indess die genaue directe Bestimmung 5,314 giebt.

Wenn mehrere oder auch alle Werthe $a$ sich um ein Weniges ändern, so erhält man durch Verallgemeinerung der für (26) gegebenen Herleitung folgende allgemeinere Formel

$$dx = \frac{\Sigma(a'-x)^{n-1}\,da' + \Sigma(x-a_,)^{n-1}\,da_,}{\Sigma(a'-x)^{n-1} + \Sigma(x-a_,)^{n-1}} \quad . \; . \; . \; (27)$$

In die Summe des Zählers dieses Ausdruckes gehen natürlich nur die Werthe

$$(a'-x)^{n-1}\,da' \text{ und } (x-a_,)^{n-1}\,da_,$$

ein, welche wirklich mit einer Aenderung $da'$ oder $da_,$ behaftet sind, indem die anderen durch Nullsetzung der Aenderung ausser Acht fallen; in die Summen des Nenners aber gehen alle auf die Potenz $n-1$ erhobenen Abweichungen ein, da sie nicht mit den Aenderungen multiplicirt sind. Die, in die Summen des Zählers eingehenden, Aenderungen sind nicht nach absolutem Werthe, sondern, je nachdem sie Vergrösserung oder Verkleinerung bedeuten, positiv oder negativ zu nehmen.

Lassen wir im obigen Beispiele 1, 2, 10 die drei Werthe sich in 0, 3, 9 ändern, so ändert sich nach (27) $x = M_2 = 5$ um $dx = -0{,}5$, geht mithin in 4,5 über. Die directe genaue Bestimmung giebt 4,392.

Wenn $n = 1$ ist, es sich also um den arithmetischen Mittelwerth handelt, wird in Formel (27) jeder Werth $(a'-x)^{n-1}$ und $(x-a_,)^{n-1} = 1$, und hat man also einfach

$$dx = \frac{\Sigma da' + \Sigma da_,}{m}$$

welche Gleichung nicht blos approximativ, sondern für beliebig grosse Aenderungen genau ist.

Principiell wird man die Reihe der $M$ noch unter $M_0$ fortsetzen können, indem man negative Werthe von $n$ als Potenzen der Abweichungen verwendet, und es übersetzt sich dann die Gleichung

$$\Sigma(x-a_,)^{-n} = \Sigma(a'-x)^{-n}, \quad . \; . \; . \; (28)$$

aus welcher $M_{-n} = x$ zu bestimmen ist, in folgende

$$\Sigma\left(\frac{1}{x-a_{,}}\right)^{n} = \Sigma\left(\frac{1}{a'-x}\right)^{n} \ldots (29)$$

wofür bei ungeradem $n$ ohne Unterscheidung der $a'$ und $a_{,}$ stehen kann

$$\Sigma\left(\frac{1}{a-x}\right) \ldots (30)$$

Für $n = 0$ fällt (29) mit der für den Centralwerth geltenden Gleichung $\Sigma(x-a_{,})^{0} = \Sigma(a'-x)^{0}$ zusammen, da eben so $\left(\frac{1}{x-a'}\right)^{0}$ wie $(x-a)^{0}=1$, indem die eine wie die andere Gleichung sagt, $x$ sei so zu bestimmen, dass die Zahl der Abweichungen nach beiden Seiten von $x$ gleich ist. Bei allgemeiner Entwicklung der Gleichung (29) oder (30) aber findet man alsbald, dass der Grad der Gleichung für Bestimmung von $M_{-n}$ nicht blos von der Potenz $n$ der reciproken Abweichungswerthe, sondern auch von der Zahl $m$ derselben abhängt, nämlich allgemein $= n(m-1)$ ist; so dass man über $m=2$ bei $n=2$ hinaus, und über $m=3$ bei $n=1$ hinaus, schon zu höhern als quadratischen Gleichungen geführt wird. Ein empirisches Interesse dürfte diesen Potenzmitteln von negativem $n$ überhaupt schwerlich beizulegen sein; doch mag die Bestimmung von $x=M_{-1}$ für $m=3$ zur Erläuterung der Bestimmungsweise dieser Art von Potenzmitteln überhaupt hier ausgeführt werden.

Da $n$ hier ungerade ist, haben wir ohne Unterscheidung von $a'$ und $a_{,}$ den Werth $M_{-1}=x$ aus folgender Gleichung zu bestimmen:

$$\frac{1}{a_{,}-x}+\frac{1}{a_{,,}-x}+\frac{1}{a_{,,,}-x}=0$$

welche dadurch, dass wir alle Brüche auf denselben Nenner bringen, in folgende übergeht.

$$(a_{,}-x)(a_{,,}-x)+(a_{,}-x)(a_{,,,}-x)+(a_{,,}-x)(a_{,,,}-x)=0$$

was entwickelt giebt:

$$k - 2\lambda x + 3x^{2} = 0$$

wenn

$$k=a_{,}\,a_{,,} + a_{,}\,a_{,,,} + a_{,,}\,a_{,,,}$$

$$\lambda=a_{,} + a_{,,} + a_{,,,}$$

gesetzt wird, hienach

$$x = \frac{\lambda \pm \sqrt{\lambda^{2}-3k}}{3}$$

Das obige Beispiel der drei Werthe 1, 2, 10 giebt $k = 32$, $\lambda = 13$, hienach $x=1{,}48533$, was zwischen 1 und 2 fällt. Hievon sind die Abweichungen der drei Werthe links 0,48533, rechts 0,51467 und 8,51467. Ist $x$ als $M_{-1}$ richtig bestimmt, so müssen die Summen der reciproken

Werthe dieser Abweichungen nach beiden Seiten gleich sein. In der That ist $\frac{1}{0,48533} = \frac{1}{0,51467} + \frac{1}{8,51467}$; d. i. 2,0604 = 1,9429 + 0,1125.

Ein $M_{-n}$, was aus den Gleichungen (29) oder (30) als $x$ hervorgeht, giebt ein Minimum der Summe

$$\Sigma(x-a_{,})^{-n+1} + \Sigma'(a'-x)^{-n+1}$$

oder

$$\Sigma\left(\frac{1}{x-a}\right)^{n-1} + \Sigma'\left(\frac{1}{a'-x}\right)^{n-1} \quad \ldots (31)$$

So giebt, wenn ich die Abweichungen kurz mit $\Delta$ bezeichne, die Reihe

1; 4; 14, 9926

in Bezug auf $x = M_2 = 10$ die Summe

$$\frac{1}{\Delta_{,}^{2}} + \frac{1}{\Delta_{,,}^{2}} = \frac{1}{\Delta'^{2}} = 0,040124$$

und hiezu 0,4788 als Minimalsumme $\Sigma\frac{1}{\Delta}$ bezüglich 10, hingegen 0,4931 bezüglich 11 und 0,49161 bezüglich 9.

Weicht ein Werth von einem $M_n$ ab, so wird zwar nicht mehr bezüglich desselben die Eigenschaft bestehen, dass die Summe der zur $(n+1)$ten Potenz erhobenen Abweichungen davon ein Minimum ist, aber folgendes allgemeinere Theorem, welches sich auf entsprechende Weise ableitet wie das bezüglich der $M$ gültige; ein Theorem, was den Fall des dichtesten Werthes im Felde der Collectivgegenstände mit unter sich fasst, und in dieser Hinsicht für die Theorie der Asymmetrie von Interesse ist, ohne sich jedoch auf diesen Fall zu beschränken.

Der Begriff eines Potenzmittels gegebener Ordnung $n$ wird überhaupt verlassen, wenn die Summe der, zur Potenz $n$ erhobenen, beiderseitigen Abweichungen bezüglich dazu ungleich ist. Sei nun die Ungleichheit der Art, dass man für $x$ als Ausgangswerth statt $\Sigma(x-a_{,})^{n} = \Sigma'(a'-x)^{n}$ vielmehr hat:

$$\Sigma'(x-a_{,})^{n} = f\Sigma'(a'-x)^{n} \quad \ldots (32)$$

so dass

$$f = \frac{\Sigma(x-a_{,})^{n}}{\Sigma(a'-x)^{n}}$$

so wird

$$\Sigma'(x-a_{,})^{n+1} + f\Sigma'(a'-x_{,})^{n+1} \quad \ldots (33)$$

ein Minimum in so fern sein, als jede Substitution eines andern Ausgangswerthes für das aus (32) folgende $x$ in (33), unter Beibehaltung des wie vorhin bestimmten $f$, die Summe (33) grösser macht. Wie leicht zu erachten ist das Theorem für die eigentlichen Potenzmittel nur der besondere Fall von diesem, wo nämlich $f=1$.

Sei z. B. in unserer einfachen Reihe 1, 2, 10 als Ausgangswerth $x = 6$, und $n = 2$ genommen, so ist $\Sigma\ (x - a_{,})^2 = 41$, und $\Sigma\ (a' - x)^2 = 16$, mithin $f = \frac{41}{16}$. Ferner ist $\Sigma\ (x - a_{,}^3) = 189$, $\Sigma\ (a' - x)^3 = 64$, und es muss nach unserm Theorem $189 + \frac{41}{16} \cdot 64 = 353$ kleiner sein, als jede entsprechend bezüglich eines andern $x$ aber noch mit $f = \frac{41}{16}$ genommene Summe. In der That, nehmen wir z. B. $x = 5$, so erhalten wir 411,3, und nehmen wir $x = 7$, so erhalten wir 410,2 statt 353.

Substituirt man in den Formeln für die eigentlichen Potenzmittel (wo $f = 1$) den gegebenen Werthen $a$ ihre Logarithmen, so kann man aus diesen Logarithmen eben so Potenzmittel verschiedener Ordnung, sog. logarithmische Potenzmittel $M(l)_n$, ziehen, als aus den directen Werthen $a$, und von den logarithmischen Potenzmitteln nach den logarithmischen Tafeln auf die zugehörigen Grössenwerthe als geometrische Potenzmittelwerthe verschiedener Ordnung kommen, wogegen die bisher betrachteten Potenzmittel als arithmetische im weiteren Sinne bezeichnet werden können.

Die allgemeine Formel zur Bestimmung eines logarithmischen Potenzmittels $M(l)_n = x$ ist:

$$\Sigma(\log x - \log a_{,})^n = \Sigma(\log a' - \log x)^n \ldots (34)$$

oder

$$\Sigma\left(\log\frac{x}{a_{,}}\right)^n = \Sigma\left(\log\frac{a'}{x}\right)^n \ldots (35)$$

Der geometrische Mittelwerth von der Ordnung null stimmt hienach wieder mit dem arithmetischen Centralwerth überein, der geometrische Mittelwerth von der Ordnung 1 aber mit dem schlechthin so genannten geometrischen Mittelwerthe der Grössen $a'$, $a''$, $a_{,}$, $a_{,,}$, von welchem im Untersuchungsfelde der Collectivgegenstände (angegebenermassen (S. 15) Gebrauch zu machen, wogegen höheren logarithmischen und geometrischen Mittelwerthen kaum eine empirische Verwendbarkeit zukommen dürfte.

Unstreitig kann es dem Interesse des Centralwerthes nur zu Statten kommen, dass er sich solchergestalt zugleich als Gränzwerth zwischen Potenzmittelwerthen von positivem und negativem Index und Verknüpfungsglied für arithmetische und geometrische Potenzmittel darstellt.

Nach allen vorigen Erweiterungen des Begriffes der Potenzmittel werde ich doch folgends wie früher unter Potenzmitteln schlechthin

nur solche mit positivem Index $n$ von 0 an, solche, welche als Ausgang arithmetischer Abweichungen auftreten, und solche, wo $f = 1$, verstehen.

---

## VI. Bemerkungen zur Gültigkeitsfrage des Principes des arithmetischen Mittels.

Die höheren Potenzmittel über dem arithmetischen Mittel $A$ oder $M_1$ würden unstreitig an Interesse sehr gewinnen, wenn sie diesem Mittel im physikalischen und astronomischen Beobachtungsgebiete eben so Concurrenz zu machen vermöchten, als es von dem niedersten, dem $C$ oder $M_0$, im Untersuchungsfelde der Collectivgegenstände gilt. Aber, wenn schon diess definitiv nicht der Fall ist, lässt sich doch von vorn herein fragen, was denn von allen Potenzmitteln verschiedener Ordnung gerade dem arithmetischen Mittel, was weder das niederste noch höchste darunter ist, den Vorzug als sicherstem Werth vor den andern Mitteln zugestehen lässt, oder, wie ich mich kurz ausdrücke, was die Gültigkeit des Principes des arithmetischen Mittels im physikalischen und astronomischen Beobachtungsgebiete vor dem Principe jedes andern Mittels begründet. Hierüber folgen einige Bemerkungen, die erklärtermassen nur zu dem schon anerkannten Vorzuge des Principes des arithmetischen Mittels zurückführen, doch im Wege dazu nicht ganz in Einstimmung mit bisher aufgestellten Gesichtspuncten bleiben. Sollte ich hierin irren, so möge man es durch die principiellen Schwierigkeiten der Frage entschuldigt finden.

Unstreitig macht von gegebenen Beobachtungswerthen $a$ einer in der Wirklichkeit gegebenen Grösse jeder an sich den gleichen Anspruch, für den gesuchten wahren Werth $x$ zu gelten; es wird aber eine Beobachtung für um so ungenauer zu gelten haben, je weiter der Werth $a$, den sie giebt, vom wahren $x$ abweicht, gleichviel, ob ins Positive oder Negative, so dass in dieser Hinsicht blos der absolute Werth des Fehlers, d. h. rücksichtslos auf sein Vorzeichen, in Betracht kommt. Als das einfachste und nächstliegende Princip

erschiene es hienach, den Werth *M* für den sichersten anzusehen, von dem in Summa absolut genommen am wenigsten Seitens der einzelnen *a* abgewichen wird, d. h. bezüglich dessen die Summe der einfachen Abweichungen nach absolutem Werthe kleiner als bezüglich jedes andern ist. Diess würde aber statt des arithmetischen Mittelwerthes der Centralwerth sein. Auch hätte dieser Werth die zwei wichtigen Vortheile vor jedem andern voraus, dass er am einfachsten zu bestimmen ist, und dass extreme Werthe *a* von aussergewöhnlicher Grösse oder Kleinheit, bei denen man so oft in Zweifel ist, ob man sie nicht bei der Mittelbestimmung ausschliessen soll, den überwiegenden Einfluss, den sie auf die Bestimmung des *M* äussern, verlieren, da bei der Bestimmung des $M_0$ auf die Grösse der Extreme nichts ankommt. Und gewiss ist, dass der Centralwerth aus einer gegebenen endlichen Zahl von Beobachtungswerthen nicht minder als der arithmetische Mittelwerth eine Annäherung an den wahren Werth gewährt, die mit Vermehrung der Zahl der Beobachtungswerthe ins Unbestimmte wächst, da ja bei unendlicher Zahl derselben, nach der hier und folgends immer vorausgesetzten symmetrischen Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler, der eine und der andre principiell zugleich mit dem wahren Werthe und mit einander zusammenfallen müssen.

Wenn nun aber doch schon angeführte und folgends noch zu verstärkende Gründe das Potenzmittel nullter Ordnung in Nachtheil gegen das Mittel erster Ordnung erscheinen lassen, so drängt sich leicht die Frage auf, ob nicht dieselben Gründe das Mittel erster Ordnung in Nachtheil gegen das Mittel zweiter Ordnung setzen u. s. f., kurz, ob nicht die Sicherheit der Bestimmung mit der Höhe des Potenzmittels wächst. Und bei allen handelt es sich doch blos um den Vortheil der Sicherheit bei endlicher Zahl, da bei unendlicher Zahl alle auf denselben Werth hinauslaufen müssten. Nach der Analogie, die von der Bestimmung der Potenzmittel niedrer Ordnung höher hinaufführt, gestehe ich, dass dieser Gesichtspunct von vorn herein etwas Bestechendes für mich hatte.

Hiemit würde nicht ausgeschlossen sein, den arithmetischen Mittelwerth immer noch im Ganzen als den praktischsten, an den man sich halten kann, gelten zu lassen, sofern mit der Höhe eines Mittelwerthes die Schwierigkeit seiner Bestimmung wächst, indess

die Sicherheit um so weniger damit wachsen kann, je mehr in dieser Hinsicht schon durch niedre Ordnungen zu leisten ist. Indess könnte doch der, verhältnissmässig noch leicht zu bestimmende, Mittelwerth zweiter Ordnung dem arithmetischen Mittel Concurrenz machen. Natürlich aber kann in solchen Aperçü's überhaupt nur die Anregung zur genaueren Untersuchung der Frage, keine Beantwortung derselben gefunden werden.

Wie sich nun auch dieselbe beantworte, so behält jedenfalls die ganze Classe der Potenzmittelwerthe allen andersartig bestimmten Mitteln gegenüber, wovon Beispiele im letzten Abschnitte folgen, unter Voraussetzung symmetrischer Wahrscheinlichkeit der Fehler das eigenthümliche Interesse, dass, welchen Potenzmittelwerth man auch nehmen will, er principiell eine, mit der Zahl der Beobachtungswerthe wachsende, Annäherung an den wahren Werth gewährt, indess jeder anderswie bestimmte Mittelwerth eine mit der Zahl der Werthe sich immer fester stellende Abweichung davon gewähren dürfte. Ja principiell ist jedes Potenzmittel als Beobachtungsmittel brauchbar, nur eins brauchbarer, weil aus gleich grosser Zahl der Werthe sichrer bestimmbar, als das andre; man wird aber blos die Zahl der Werthe hinreichend zu vermehren haben, um mit einem daraus gezogenen an sich minder sichren Potenzmittel sogar eine grössere Annäherung an den wahren Werth zu erhalten, als mit dem an sich sicherern aus einer geringern Zahl gezogenen, indess keiner von allen, aus einer endlichen Zahl bestimmt, den wahren Werth anders als zufällig mit unendlich geringer Wahrscheinlichkeit genau treffen lassen kann. Also kann man auch selbst den Centralwerth wegen der Leichtigkeit seiner Bestimmung aus einer geordneten Werthreihe da, wo es nicht um grosse Sicherheit zu thun ist, als Approximation mitunter statt des arithmetischen Mittels gelten lassen, insbesondre bei grossen Werthreihen, da die Mühe der Bestimmung des arithmetischen Mittels mit der Zahl der Werthe wächst, die Abweichung des Centralwerths davon aber allgemein gesprochen damit abnimmt, immer dabei symmetrische Wahrscheinlichkeit der Abweichungen vorausgesetzt.

Zur Erläuterung und Bestätigung des Vorstehenden können die für den Januar specificirten Resultate bezüglich der thermischen Monatsabweichungen im 8. Abschnitte dienen. Das aus 90 Werthen, welche zwischen den Ex-

tremen +5,29° und −5,31° R. schwanken, abgeleitete $M_1$ ist = −0,0472, welches natürlich noch nicht als genau, aber doch als der Genauigkeit sehr nahe kommend anzusehen ist. Das aus denselben 90 Werthen abgeleitete $M_0$ und $M_1$ sind respectiv +0,150 und −0,160, welche Werthe sich dem als nahe genau anzusehenden Werthe −0,0472 viel mehr nähern, als die Werthe von $M_1$, welche aus Fractionen der ganzen Werthreihe mit geringerer Werthzahl abgeleitet sind. So gab die erste Fraction aus 10 Werthen ein $M_1$ = −1,048, die zweite = +0,798, und unter allen 9 Fractionen à $m = 10$, gaben blos zwei ein $M_1$, welches dem −0,0472 näher kam, als +0,150 und −0,160. Man hat beim Vergleiche dieser Werthe nicht das Verhältniss derselben, sondern die gemeinsam geringe Abweichung von null, wo ungefähr der wahre Temperatur-Werth lag, in Betracht zu ziehen.

Mit der Frage, welchen Mittelwerth man bevorzugen soll, steht natürlicherweise die Frage in Beziehung, nach welcher Potenz der Abweichungen man die Ungenauigkeit verschiedener Systeme von Beobachtungen schätzen und vergleichen soll. Sollte man nach dem einfachst scheinenden Princip den Centralwerth als Mittelwerth bevorzugen, so würde natürlich auch die Schätzung der Ungenauigkeit der Beobachtungen nach der absoluten Grösse der einfachen Fehler geschehen müssen, weil nur die Summe der einfachen Fehler bezüglich desselben ein Minimum ist; wogegen bei Bevorzugung des arithmetischen Mittels diese Summe nicht zur Schätzung dienen kann, weil sie nicht bezüglich dieses Mittels, sondern bezüglich des Centralwerths ein Minimum ist; indess bezüglich des arithmetischen Mittels die Schätzung nach den Quadraten den, ihr auch allgemein beigelegten, Vorzug in Anspruch nimmt, weil deren Summe bezüglich dieses und keines andern Werthes ein Minimum ist. Wozu noch kommt, dass nach dem Resultate des folgenden Abschnittes zur Gültigkeit des Principes irgend eines Potenzmittels von der Ordnung $n$ allgemein ein Wahrscheinlichkeitsgesetz der Abweichungen gehört, in dessen Ausdruck die Abweichungen in $(n+1)$. Potenz eingehen, also in Bezug zum arithmetischen Mittel in zweiter Potenz. Hienach ist die Bevorzugung des Principes irgend eines Potenzmittels von der Ordnung $n$ meines Erachtens überhaupt als solidarisch mit der Schätzung der Genauigkeit nach der $(n+1)$. Potenz der Abweichungen anzusehen.

Diese Solidarität nun ist es, die ich bisher bei Behandlung unsrer Frage nicht beachtet finde, weil man überhaupt auf andre Potenzmittel als das erste und deren Abweichungsverhältnisse bisher

nicht geachtet hat. Daraus aber scheint mir einiges Untriftige hervorgegangen zu sein, was ich nicht ohne Schüchternheit sage, da ich mich dabei in Collision mit hohen Autoritäten betreffe.

In der That hat bekanntlich Laplace (in s. Theorie anal. des probab.) sich für die Schätzung der grössern oder geringern Ungenauigkeit der Beobachtungen nach der absoluten Grösse der einfachen Fehler erklärt, und consequent, meine ich, hätte er hienach die Abweichungen vom Centralwerth rechnen sollen, indess er sie doch nach üblicher Weise vom arithmetischen Mittel rechnet, ohne untersucht zu haben, ob es nicht einen andern Werth giebt, bezüglich dessen das Minimum der einfachen Abweichungssumme stattfindet. Gauss anderseits (in s. Theoria combin. observ. error. min. obn.*) verwirft die Schätzung nach der einfachen Fehlergrösse, aber nicht, weil sie mit dem von ihm wie überall acceptirten Princip des arithmetischen Mittels nicht stimmt, sondern weil, wollte man die Schätzung nach der einfachen Fehlergrösse oder überhaupt einer ungeraden Fehlerpotenz vornehmen, man die negativen Fehler oder Fehlerpotenzen Gewinn an Genauigkeit bedeuten lassen und in diesem Sinn verrechnen müsste, wenn die positiven Verlust bedeuten sollten. Mithin sei die Schätzung nach einer geraden Fehlerpotenz vorzunehmen. Dass man bei der zweiten Fehlerpotenz stehen bleibe, sei im Grunde genommen Willkühr; es sei nur die einfachste Schätzungsweise, an die man sich halten könne, und welche (unter Einführung in die allgemeine Methode der kleinsten Quadrate) die grössten Rechnungsvortheile gewähre.

Ist nun aber das von uns aufgestellte Princip der solidarischen Beziehung zwischen der Ordnung des Potenzmittels, an das man sich als das sicherste oder auch nur praktischste hält, und der Potenz der Fehler, nach der man die Ungenauigkeit zu beurtheilen hat, richtig, so kann man den Grund, sich bei Anwendung des arithmetischen Mittels an die Schätzung nach den Fehlerquadraten zu halten, einfach in jener wesentlichen Beziehung finden, und die von Gauss statuirte principielle Willkühr dadurch ausgeschlossen halten. Was aber den, von Gauss selbst angegebenen und auf seine Autorität hin seitdem allgemein acceptirten, Grund für die Ausschliessung

*) Commentat. Soc. Gott. rec. V. ad 1819—1822. p. 33.

ungerader Potenzen bei Schätzung der Ungenauigkeit anlangt, so gestehe ich, bei aller Scheu einer solchen Autorität gegenüber mit Zweifeln aufzutreten, mich von der Evidenz desselben nicht haben überzeugen und keinen Ersatz des obigen Grundes darin finden zu können.

In der That kommen doch auch sonst Fälle vor, und zwar solche, die mit dem Falle, um den sich's hier handelt, vergleichbarer erscheinen, als der von Gauss zur Erläuterung zugezogene Fall eines Spieles mit Gewinn und Verlust, wo man sich durch den Gegensatz des Vorzeichens nicht zu entsprechenden Consequenzen als Gauss in unserm Falle geführt findet. So, wenn jemand von demselben Puncte wiederholt nach entgegengesetzter Richtung geht, werden die Wege, die er macht, eben so mit entgegengesetzten Vorzeichen bezüglich dieses Punctes behaftet sein, wie Fehler als Abweichungen von einer wahren Grösse; aber man wird nicht sagen: wenn der positive Weg als Entfernung vom Puncte betrachtet wird, so müsste der negative als Näherung daran betrachtet werden, wenn man nicht die vergleichsweise Schätzung beider vielmehr nach ihrem Quadrate als ihrem absoluten Werthe vornehmen wollte.

Werde jemand die Aufgabe gestellt, eine Grösse nach dem Augenmasse zu schätzen, und verurtheilt, sowohl für das, was er zu viel als was er zu wenig findet, ein Strafgeld nach irgend einer Taxe der Fehler zu zahlen (wie das wirklich beim Meisterwerden eines Fleischers mit der Schätzung des Gewichts eines Stücks Vieh der Fall ist), so wird man nicht sagen: wollte man die Schätzung des Zuviel als strafbar ansehen, so müsste man die Schätzung des Zuwenig als lohnenswerth betrachten, wenn man nicht die Taxation der begangenen Fehler vielmehr nach ihren Quadraten als ihrem einfachen Werthe vornähme.

Ja müsste man nicht nach dem Gauss'schen Princip bezüglich der Fehler selbst sagen: wenn das positive Vorzeichen einen Fehler, d. i. eine Abweichung von der Genauigkeit bezeichnen soll, so würde das negative einen Gewinn von Genauigkeit bedeuten, wenn man nicht den Fehlerbegriff von vorn herein vielmehr auf die Quadrate der Abweichungen als deren einfache Werthe bezöge.

Allgemein aber dürfte zu behaupten sein, dass dem Gegensatz der Vorzeichen nicht zwei ganz verschiedene Bedeutungen zugleich

beigelegt werden dürfen. Gewiss bedeutet ein positiver Fehler, dass eine Grösse zu gross, ein negativer, dass sie zu klein durch Messung oder Schätzung gefunden worden ist, also wird an denselben Gegensatz nicht zugleich der Gegensatz einer Schätzung als Verlust oder Gewinn von Genauigkeit geknüpft werden können und zur Verhütung davon es nicht erst der Quadrirung der Fehler bedürfen.

Mit all' dem wäre an sich nicht ausgeschlossen, dass überhaupt in Fällen, wo nur die Grösse, nicht das Vorzeichen der in Rechnung genommenen Werthe bestimmend für das quantitative Resultat sein soll, eine mathematische Nothwendigkeit besteht, statt einfacher absolut genommener Werthe eine gerade Potenz derselben in die Rechnung einzuführen; und unstreitig sind es auch tiefer liegende Rechnungsgründe viel mehr als begriffliche Gründe gewesen, welche Gauss bestimmt haben, die Schätzung der Ungenauigkeit nach absoluten Werthen ungerader Fehlerpotenzen zu verwerfen, die nur durch den von ihm angegebenen Grund in Kürze vertreten werden sollen. Ich weiss aber nicht, ob sich eine solche Nothwendigkeit allgemein begründen lässt; ein Axiom scheint mir nicht daraus zu machen, und zur Verwerfung negativer Abweichungspotenzen bei Anwendung des arithmetischen Mittels nicht nöthig, sich auf ein solches Princip zu berufen.

Jedenfalls ist bemerkenswerth, dass zur Aufstellung der allgemeinen Formeln für die Verknüpfung der beiden fundamentalen Eigenschaften der Potenzmittelwerthe (S. 40) die ungeraden Potenzen der Abweichungen nothwendig eben so wie die geraden nach absolutem Werthe einzuführen und die Potenzmittel selbst hienach zu berechnen sind.

Bisher haben wir bei der Frage nach dem principiellen Vorzuge des einen oder anderen Potenzmittels nur die abstract mathematischen Verhältnisse dieser Art Mittel und der Abweichungen davon in das Auge gefasst; aber unstreitig kann die Frage nicht blos auf diesem Wege entschieden, sondern der Entscheidung nur dadurch vorgearbeitet werden, da es eine Frage der Anwendbarkeit aprioristischer Verhältnisse auf empirische Verhältnisse ist, wobei die Empirie selbst das letzte Wort zu sprechen hat. Hagen hat freilich eine, gewiss sinnreiche, aprioristische Ableitung des Gauss'schen Fehlergesetzes zu geben versucht, welche zugleich als Begründung des da-

mit zusammenhängenden Principes des arithmetischen Mittels zu gelten haben würde; indess ist schon von anderer Seite dagegen bemerkt worden, dass die Voraussetzungen, von welchen Hagen dabei ausgeht, nichts weniger als evident sind, und anstatt eine empirische Bewährung des Gesetzes zu ersparen, zu ihrer eignen Aufrechthaltung solche fodern. Meines Erachtens nun dürfte sich die Entscheidung in dieser Hinsicht schliesslich an folgende Puncte knüpfen.

1) Eben so wesentlich als mit der Gleichheitseigenschaft jedes $M_n$ die potenzielle Eigenschaft desselben zusammenhängt, hängt mit der Gültigkeit seines Principes die Gültigkeit eines bestimmten Wahrscheinlichkeitsgesetzes der Abweichungen $\Delta$ in Bezug dazu, kurz ein bestimmtes $\varphi_n \Delta$, zusammen, wonach das betreffende Mittel nur insofern der wahrscheinlichste Werth sein kann, der sich aus den Beobachtungen folgern lässt, als zugleich ein bestimmtes Wahrscheinlichkeitsgesetz der Abweichungen in Beziehung dazu besteht.*) Also wird man dasjenige $M_n$ vorzuziehen haben, bezüglich dessen sich das damit in Beziehung stehende Wahrscheinlichkeitsgesetz $\varphi_n \Delta$ der Beobachtungsfehler in der Erfahrung bestätigt. Diess trifft nun bei dem Gesetze zu, welches Gauss aus dem Princip des arithmetischen Mittels theoretisch abgeleitet hat, indem nicht nur er selbst, sondern auch Bessel dasselbe an astronomischen Beobachtungsfehlern bewährt hat. Hiemit scheint die Gültigkeit des Principes des arithmetischen Mittels sicher erwiesen, und hat man auch, insoweit man überhaupt empirische Beweise gesucht hat, sich hieran gehalten.

Inzwischen, nachdem sich dem arithmetischen Mittel die andern Potenzmittel als beachtenswerth zur Seite gestellt haben, blieb doch folgender Einwand möglich. Die Bewährungen des Gesetzes durch Erfahrung mittelst einer endlichen Zahl von Beobachtungswerthen können immer blos approximativ sein. Gesetzt nun, die Wahrscheinlichkeitsgesetze $\varphi_n \Delta$ wichen für die verschiedenen $M_n$ eben so, wie es von den $M_n$ selbst bei Ableitung aus einer nicht gar zu geringen Zahl von Beobachtungswerthen derselben Grösse gilt, wenig von einander ab, so könnte dieselbe Bewährung dem einen wie dem andern $M_n$ zu statten kommen, und wäre dadurch noch nicht ohne Weiteres über den Vorzug des $M_1$ vor den andern $M_n$ entschieden.

*) Vrgl. hierüber u. a. Encke im astronom. Jahrb. f. 1834. S. 264. 268.

Also schien es nützlich, das für die verschiedenen $M_n$ zur Gültigkeit ihres Principes zu fodernde Wahrscheinlichkeitsgesetz allgemein zu bestimmen, was meines Wissens bisher nicht geschehen ist. Indem ich nun im folgenden Abschnitte darauf eingehe, zeigt sich, dass diese Gesetze, ungeachtet nach einem gemeinsamen Princip ableitbar, in den numerischen Ergebnissen so von einander und von dem bezüglich des $M_1$ insbesondere gültigen abweichen, dass nicht daran zu denken, eine für letzteres gültige Bewährung zugleich als eine solche für die Gesetze bezüglich der anderen Mittel geltend zu machen; wonach man in jedem Falle im physikalischen und astronomischen Beobachtungsfelde an das arithmetische Mittel als sichersten Werth gebunden bleibt, insoweit diess Feld der überall hier vorausgesetzten symmetrischen Fehlerwahrscheinlichkeit genügt.

2) Theile man eine Beobachtungsreihe aus vielen Werthen $a$, deren Gesammtzahl $N$ sei, in $z$ Fractionen aus einer gleichen Anzahl $m$ von Werthen, so dass $zm = N$, unter Belassung der zufälligen Folge, in der die Einzelwerthe $a$ erhalten worden sind, und bestimme aus jeder dieser Fractionen insbesondre die ihrer Sicherheit nach zu vergleichenden $M$ von verschiedener Ordnung, was im 8. Abschnitt mit den drei untersten Mitteln $M_0$, $M_1$, $M_2$ geschehen und auch hier zur Fixirung der Vorstellung angenommen werden soll, so wird man aus denselben $z$ Fractionen $z$ Bestimmungen von jedem der drei Mittel, sog. Fractionsmittel, erhalten. Dazu bestimme man auch die dreierlei Mittel, als Totalmittel, aus der zusammengefassten unfractionirten Totalität der $N$ Werthe $a$. Natürlich wird die Totalbestimmung, als aus $z$-mal so viel Werthen als jede Fractionsbestimmung geschehen, genauer sein, als die einzelnen im Durchschnitt sind, und unter den Totalmitteln jedes nach Massgabe sichrer, als die einzelnen Fractionsmittel weniger darum schwanken. Zeigt sich nun, dass die einzelnen Fractionsmittel $M_1$ weniger um das arithmetische Total-$M_1$ schwanken, als die Fractions-$M_0$ und $M_1$ um die entsprechenden Totalmittel, so wird dem arithmetischen Mittel als dem sichersten der Vorzug zu geben sein. In der That aber wird der 8. Abschnitt an den darin geprüften, das Gesetz der Beobachtungsfehler befolgenden, Reihen aus je 90 Werthen $a$ zeigen, dass das arithmetische Mittel $M_1$ im Durchschnitt der Ergebnisse einen solchen Vortheil vor $M_0$ und $M_2$ entschieden genug behauptet, indess die mit vorkommenden

Ausnahmen (im Ganzen 6 bei 36 Summenbestimmungen) durch Zufälligkeiten der Werthvertheilung wohl erklärlich sind, mit Rücksicht, dass auch unwahrscheinlichere Abweichungsverhältnisse mitunter eintreten können, nur dass sie seltener als die wahrscheinlichern sind.

Allerdings lässt dieser empirische Beweis für den Vorzug des $M_1$, eines Mittels von ungerader Ordnung, nach Vergleich mit den zwei Nachbarmitteln $M_0$ und $M_2$ von gerader Ordnung, für sich noch dem Einwurf Raum, dass der Vorzug eben nur an der ungeraden Ordnung des $M_1$ hängen möge. Doch liegt kein bestimmter Grund vor, hieran einen Vorzug zu knüpfen. Zur vollständigeren empirischen Beseitigung des Einwurfes würde der Vergleich noch auf $M_3$ auszudehnen sein; nur möchte schwerlich jemand Geduld genug haben, die dazu erfoderliche Bestimmung so vieler Fractionsmittel aus Gleichungen dritten Grades durchzuführen, nachdem der vorige Grund schon für sich allein als durchschlagend anzusehen ist. Auch können nach der Bewährung des Gauss'schen Fehlergesetzes bezüglich $M_1$ die Unsicherheitsverhältnisse bezüglich der andern Potenzmittel als Rechnungssache gelten, ohne dass es doch nöthig ist, eine besondere Rechnung desshalb vorzunehmen, insofern nach jenem Gesetze jeder andre Werth überhaupt, also auch jeder andre Potenzmittelwerth als $M_1$, unwahrscheinlicher als dieser Werth ist. Wenn nun hienach die im 8. Abschnitt geführte empirische Untersuchung keine wesentliche Verstärkung des vorigen Grundes gewährt, da ihr Resultat nach demselben vorauszusehen war, so dürfte sie doch als factische Bestätigung dieser Voraussicht demselben immerhin zur Unterstützung und zugleich zur Veranschaulichung und Erläuterung der hiebei ins Spiel kommenden Abweichungsverhältnisse dienen können.

Noch kann man folgende drei, wenn auch nicht für sich allein durchschlagende, Puncte für die Bevorzugung des arithmetischen Mittels als Beobachtungsmittel vor andern Potenzmitteln geltend machen.

Erstens. Wenn ich, wie vorhin angegeben, eine grössere Beobachtungsreihe in $z$ Fractionen aus gleich viel Werthen theile, aus jeder Fraction das arithmetische Mittel der Einzelwerthe besonders bestimme, und das arithmetische Mittel dieser arithmetischen Fractionsmittel nehme, so erhalte ich einen Werth, der genau und nothwendig mit dem arithmetischen Totalmittel der ganzen unfractionirt behan-

delten Werthe zusammenfällt. Das Entsprechende hievon findet aber bei keinem andern Potenzmittel statt; sondern man wird nur sagen können, dass das Mittel aus den Fractionsmitteln sich dem Totalmittel aus der Gesammtzahl der Werthe mehr nähert, als diess durchschnittlich von den einzelnen Fractionsmitteln gilt. Auch ohne Beobachtungsfehler oder Abweichungen, die das gleiche Gesetz befolgen, vor sich zu haben, kann man sich hievon an beliebigen Zahlenbeispielen überzeugen.

Nehmen wir z. B. die schon oben zum Beispiel gebrauchten 8 Ziffern des zufällig aufgeschlagenen Logarithmus von 6700 als eben so viel Werthe $a$, und fügen, um 9 Werthe zur Herstellung von 3 gleichzahligen Abtheilungen à $m=3$ zu haben, die unter diesen Ziffern noch fehlende 1 vorn hinzu, so haben wir, ohne die ursprüngliche Reihenfolge der Ziffern übrigens zu ändern, folgende 3 Abtheilungen:

1, 3, 8 | 2, 6, 0 | 7, 4, 8

Die arithmetischen Fractionsmittel sind 4; 2,667; 6,333, und das arithmetische Mittel hieraus 4,333, übereinstimmend mit dem, was man erhält, wenn man das arithmetische Mittel aus der Totalreihe ohne Fractionirung derselben zieht.

Hingegen sind die drei, nach Ordnung der Ziffern jeder Fraction sich ergebenden, Fractionscentralwerthe 3, 2, 7, und der aus diesen 3 Werthen resultirende Centralwerth 3, indess der, aus der Totalreihe nach Ordnung derselben sich ergebende, Centralwerth 4 ist.

Ferner sind die 3 Fractionsmittel $M_2$ nach Anwendung der S. 43 gegebenen Regeln 4,3666; 2,9282; und 6,1010; aus welchen nach Anwendung derselben Regeln 4,518 als $M_2$ dieser 3 Fractions-$M_2$ resultirt, wogegen die Totalreihe ohne Fractionirung 4,324 giebt.

Auch macht es bei dem arithmetischen Mittel keinen Unterschied, wie man die Einzelwerthe der gesammten Reihe zu den Fractionen combinirt, aus deren Mitteln man ein letztes Mittel zieht, wohl aber bei den andern Potenzmitteln. In der That, wenn ich die obigen Zahlen nur mit veränderter Ordnung zu folgenden drei Fractionen combinire

2, 3, 4 | 1, 6, 8 | 0, 7, 8,

so sind die Fractions-Centralwerthe 3, 6, 7 und der daraus resultirende definitive Centralwerth nicht mehr wie der obige 3, sondern 6. Die drei Fractions-$M_2$ aus denselben so angeordneten Werthen sind

jetzt 3; 4,6334 und 4,4170; und das daraus resultirende $M_2$ nicht mehr 4,518 sondern 3,899.

Inzwischen, so günstig diess für das Princip des arithmetischen Mittels erscheint, auch schon sonst für dasselbe im Vergleich mit andern Mitteln überhaupt geltend gemacht worden ist, erscheint es doch für sich allein nicht völlig entscheidend, denn wenn zugestandenermassen nur eine unendliche Totalzahl das richtige Resultat geben kann, so ist es nicht selbstverständlich, dass eine fractionsweise Behandlung der empirisch vorliegenden endlichen Totalzahl und Ziehung des definitiven Resultates aus den Fractionsresultaten die Ziehung desselben aus der ungetrennten Totalität müsse vertreten können. Auch kann man bemerken, dass das arithmetische Mittel denselben Vortheil, den es gegen die andern Potenzmittel in dieser Hinsicht beweist, doch nicht gegen Mittel jeder andern Art beweist, so namentlich nicht gegen das geometrische Mittel, noch auch, was schon früher anderwärts bemerkt worden ist, gegen Mittel von der Form $\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{m}\ldots}$, deren im letzten Abschnitte gedacht werden wird.

Zweitens. Die Bestimmungsweise des arithmetischen Mittels ist von allen Potenzmitteln die einzige, welche niemals und in keiner Hinsicht eine Zweideutigkeit einschliesst; man kann aus gegebenen Beobachtungswerthen $a$ stets nur einen bestimmten Werth als arithmetisches Mittel ableiten. Hiegegen wurde schon bemerkt, dass beim Centralwerth im Falle einer geraden Anzahl von Werthen eine principielle Unbestimmtheit in der Lage desselben zwischen seinen zwei Seitenwerthen statt findet; bei höheren Potenzmitteln über dem arithmetischen aber giebt der, mit der Ordnung desselben übereinstimmende, Grad der Gleichung, woraus sie zu bestimmen, stets eine Mehrheit von Werthen dafür, von denen allerdings die imaginären und ausserhalb der Reihe der $a$ fallenden als unbrauchbar zu verwerfen sind; doch würde erst noch zu untersuchen sein, ob nicht bei höheren Potenzmitteln auch mehrere reale Werthe in die Reihe fallen können, welche zugleich als Ausgangswerthe verschiedener Minimalsummen in Verhältniss zu ihren Nachbarwerthen anzusehen; und jedenfalls ist es schon als ein Vorzug des arithmetischen Mittels anzusehen, dass es keine zu beseitigende Nebenwerthe hat.

**Drittens.** Der arithmetische Mittelwerth ist nach den Erörterungen und Formeln S. 44. 46 von allen Potenzmittelwerthen der einzige, dessen Veränderungen in genauer und einfacher Proportionalität mit den Veränderungen der Einzelwerthe, aus denen er zu bestimmen ist, stehen.

---

## VII. Wahrscheinlichkeitsgesetze der Abweichungen bezüglich der verschiedenen Potenzmittel unter Voraussetzung der Gültigkeit ihres Principes.

Von dem Motiv und allgemeinen Gesichtspunct der Bestimmung dieser Gesetze ist S. 57 gesprochen. Indem ich im Princip und der Ausführung dieser Bestimmung wesentlich dem Gange folge, nach welchem Encke in s. Abh. über die Methode der kl. Qu.*) das Wahrscheinlichkeitsgesetz der Abweichungen bezüglich des $A$ oder $M_1$ abgeleitet hat, nur mit Verallgemeinerung dieses Ganges auf beliebige Abweichungspotenzen, glaube ich der umständlichen und etwas weites Ausholen erfodernden Auseinandersetzung desselben durch Verweisung auf jene Abhandlung überhoben zu sein, und werde mich demnach wesentlich auf die Resultate beschränken, wobei folgende Bezeichnungen in Rücksicht kommen.

Mit $e$ wird folgends die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, mit $\pi$ die Ludolf'sche Zahl, mit $\varphi_n \Delta$ die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers bezüglich eines Potenzmittels $M_n$ bezeichnet, sofern sie eine Function $\varphi$ der Grösse von $\Delta$ und des Index $n$ ist. Unter verhältnissmässiger Zahl der Fehler von 0 bis $\Delta$ verstehe ich den Bruchtheil von der Gesammtzahl der Fehler bezüglich eines Mittels $M_n$, der nach dem betreffenden Wahrscheinlichkeitsgesetze zwischen den Grössengränzen der Fehler 0 und $\Delta$ enthalten ist, und bezeichne ihn mit $V_n$. Alle Fehler werden nach absolutem Werthe genommen, und symmetrische Wahrscheinlichkeit derselben vorausgesetzt.

Wie bekannt nun, und aus den unten zu gebenden allgemeinen

---

*) Astronom. Jahrb. f. 1834. S. 259. 264. 280.

Formeln als besonderer Fall folgend, ist die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers nach dem Principe des arithmetischen Mittels,

$$\varphi_1 \Delta = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2} \; . \; . \; . \; . \; (36)$$

und hienach:

$$V_1 = \int_0^\Delta \varphi_1 \Delta d\Delta \; . \; . \; . \; . \; (37)$$

worin $h = \frac{1}{q\sqrt{2}} = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}}$, wenn $q$ den quadratischen Mittelfehler (Quadratwurzel aus dem mittleren Fehlerquadrat), $\varepsilon$ das einfache Fehlermittel bezüglich $M_1$ bedeuten. In die Formel für $V_1$ ist der Werth von $\varphi_1 \Delta$ aus der vorhergehenden zu substituiren.

Das Integral $V_1$ ist bekanntlich nicht in endlicher Form darstellbar, aber für nicht zu grosse Werthe von $\Delta$ durch die, für Werthe von $\frac{\Delta}{\varepsilon} < \sqrt{\pi}$ convergirende unendliche, Reihe

$$V_1 = \frac{2}{\pi}\left(\frac{v}{1} - \frac{1}{1} \cdot \frac{v^3}{3\pi} + \frac{1}{1.2.} \frac{v^5}{5\pi^2} - \text{ etc.}\right) \ldots . (38)$$

worin $v = \frac{\Delta}{\varepsilon}$, ausdrückbar und hienach und nach einer andern, für grosse Werthe von $\Delta$ convergirenden, Reihe in einer bekannten Tabelle worin $t = \frac{\Delta}{\varepsilon\sqrt{\pi}}$ für, von 0 an wachsende, Gränzen $\Delta$, nach deren Verhältniss zu $\varepsilon\sqrt{\pi}$ berechnet.

Um nun hienächst vor den allgemeinen Formeln die für den Centralwerth insbesondere daraus folgenden zum Vergleich mit den vorigen darzubieten, so hat man bezüglich $C$ oder $M_0$ sehr einfach

$$\varphi_0 \Delta = \frac{1}{2\varepsilon} e^{-\frac{\Delta}{\varepsilon}}; \; V_0 = 1 - e^{-\frac{\Delta}{\varepsilon}} \ldots (39)$$

worin $V_0$ wie man sieht, in endlicher Form erscheint.

Das $\varepsilon$ ist principiell hier nicht mehr das einfache Mittel der bezüglich $M_1$ sondern bezüglich $M_0$ genommenen Abweichungen; aber bei der voraussetzlich symmetrischen Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler fallen bemerktermassen alle $M$ wesentlich (im Sinne von S. 7 u. 8 verstanden) zusammen, und wenn diess bei endlicher Zahl der Werthe nicht mehr der Fall ist, so kann doch in den allgemeinen Wahrscheinlichkeitsformeln nur der wesentliche Fall, von welchem zufällig nach einer oder der andern Seite abgewichen wird, berücksichtigt werden.

Wohl zu merken nun, ist die durch die Formeln (39) ausgedrückte Vertheilungsweise der Abweichungen die, welche man zu erwarten haben würde und zu fodern hat, sollte das

Princip des Centralwerthes in dem S. 57 angegebenen Sinne gültig sein; insofern sich aber diese Vertheilungsweise nicht bestätigt, bestätigt sich auch die Gültigkeit dieses Principes nicht. Und da man von anderer Seite schon das Abweichungsgesetz bezüglich des arithmetischen Mittels mit erwünschter Approximation bestätigt gefunden hat, so gilt es, wie früher bemerkt, blos zuzusehen, ob das bezüglich des Centralwerthes gefundene zu Resultaten führt, welche mit denen bezüglich des arithmetischen Mittelwerthes noch nahe genug stimmen, um eine Concurrenz damit zuzulassen; man sieht aber sofort aus der grossen Abweichung zwischen der Form von $\varphi_0$ und $\varphi_1$, dass diess nicht der Fall sein kann, und diess bestätigt sich, wenn man $V_0$ und $V_1$ für einige Gränzwerthe $\varDelta$ vergleichungsweise nach den gegebenen Formeln berechnet.

In der That findet man hienach

| Von $\varDelta=0$ bis $\varDelta=$ | $V_0$ bez. $M_0$ | $V_1$ bez. $M_1$ |
|---|---|---|
| $\frac{\varepsilon}{4}$ | 0,39347 | 0,34006 |
| $\varepsilon$ | 0,63212 | 0,57506 |
| $2\varepsilon$ | 0,86466 | 0,88946 |
| $4\varepsilon$ | 0,94540 | 0,99885 |

Wie man sieht ist das $V_0$ bis $\varDelta=\frac{\varepsilon}{2}$ so wie bis $\varDelta=\varepsilon$ erheblich grösser als das $V_1$ und die Vertheilung bezüglich $M_0$ im Ganzen verhältnissmässig gleichförmiger, als bez. $M_1$.

Was nun die allgemeinen Formeln für beliebiges $n$ anlangt, so finde ich Folgendes:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_n\varDelta&=K_n h e^{-h^{n+1}\varDelta^{n+1}}\\ V_n&=\int_0^\varDelta \varphi_n\varDelta d\varDelta\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(40)$$

Hierin sind $K_n$ und $h$ Constanten, welche bezüglich jedes $n$ einen besondern Werth annehmen. Und zwar ist allgemein für ein gegebenes $n$

$$h^{n+1}=\frac{1}{(n+1)<\varDelta^{n+1}>}$$

worin $<\varDelta^{n+1}>$ das arithmetische Mittel der gesammten, zur $(n+1)$-ten Potenz erhobenen Fehler bedeutet Hieraus ist $h$ durch Ausziehung der $n+1$. Wurzel zu gewinnen. $K_n$ hängt von einem bestimmten Integral ab, ist nämlich allgemein

$$K_n = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^{n+1}} dt}$$

welcher Werth sich für $n=0$ auf $\frac{1}{2}$, für $n=1$ auf $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ reducirt.

Hienach findet sich durch Uebersetzung in eine unendliche Reihe z. B. für $M_3$

$$V_3 = K_3 \left(\frac{h\Delta}{1} - \frac{h^4\Delta^4}{1.4.} + \frac{h^7\Delta^7}{1.2.7.} - \text{etc.}\right)$$

was eben so wie die Ausdrücke für höhere $V$ einem ganz andern Gange entspricht, als der unter (36) gegebene Ausdruck für $V_1$.

---

# VIII. Bewährung des Gauss'schen Wahrscheinlichkeitsgesetzes der Abweichungen an den thermischen Monatsabweichungen. Empirische Vergleichung der Sicherheit der drei niedersten Potenzmittel.

Im 6. Abschnitt ist unter andern Gründen für die Bevorzugung des Principes des arithmetischen Mittels $M_1$ vor dem Principe anderer Potenzmittel im physikalischen und astronomischen Beobachtungsgebiete geltend gemacht, dass, wenn man eine längere Beobachtungsreihe bezüglich derselben Grösse in $z$ Abtheilungen fractionirt, deren jede eine gleiche Zahl $m$ von Beobachtungswerthen enthält, man die arithmetischen Mittel $M_1$ dieser Abtheilungen durchschnittlich weniger vom arithmetischen Totalmittel der Reihe abweichend, weniger darum schwankend, findet, als wenn man andere Potenzmittel, als wie $M_0$, $M_2$, aus denselben Fractionen zieht, und ihre Schwankungen um das entsprechende Potenzmittel der ganzen Reihe mit den vorigen Schwankungen vergleicht, mag man bei dem Vergleiche der Schwankungen die einfachen, quadrirten oder cubirten Abweichungen der einzelnen Fractionsmittel vom Totalmittel zu Grunde legen, Ausnahmen von dieser Regel im Einzelnen dabei zugestanden. Dazu sollen jetzt die Belege folgen.

Nun wäre hiezu eigentlich nöthig, eine längere physikalische oder astronomische Beobachtungsreihe bezüglich derselben Grösse zur Disposition zu haben, ohne dass ich mir eine solche, zum Zwecke

hinreichend geeignete, zu verschaffen gewusst. Aber nachdem sich das, durch das Integral (37) ausgedrückte, Gauss'sche Fehlergesetz für Beobachtungen dieser Art hinreichend bestätigt hat, wird man ihnen Beobachtungen, welche dasselbe Gesetz befolgen, füglich für unsern Zweck substituiren können; und da diess nach dem Belege, den ich hiezu sofort folgen lasse, von den thermischen Monatsabweichungen gilt, von welchen Dove ein reiches Material in verschiedenen Jahrgängen der Abhandlungen der Berl. Akademie zusammengestellt hat, so werde ich davon hier für unsern Zweck Gebrauch machen.

Zum Verständniss des Ausdrucks »thermische Monatsabweichungen« Folgendes.

Die, aus den 30 oder 31 Tagen eines gegebenen Monates an einem gegebenen Orte bestimmte, arithmetische Mitteltemperatur des Monats ist in jedem Jahre etwas verschieden. Zieht man nun aus den durch eine Reihe von Jahren hindurch bestimmten Mitteltemperaturen desselben Monates für denselben Ort das allgemeine arithmetische Mittel und nimmt die Abweichungen der einzelnen Monatsmittel davon, so hat man das, was ich Kürze halber thermische Monatsabweichungen nenne. Ungeachtet sie direct bezüglich des arithmetischen Mittels bestimmt sind, hindert doch nichts, beliebige andere Potenzmittel mit zugehörigen Abweichungen daraus eben so zu bestimmen, als wenn man statt der Abweichungen vom arithmetischen Mittel die Werthe, welche diese Abweichungen geben, selbst vor sich hätte. Denn man braucht ja nur zu jeder der thermischen Monatsabweichungen den arithmetischen Mittelwerth, bezüglich dessen sie als positive und negative bestimmt sind, wieder (algebraisch) zugefügt zu denken, so hat man darin die ursprünglichen Beobachtungswerthe $a$ selbst, um die es zu thun ist; ohne dass es doch nöthig ist, dieses Mittel wirklich zuzufügen, da sich in den hier in Betracht zu ziehenden Verhältnissen der Abweichungen überhaupt nichts ändert, wenn man allen denselben Werth, sei es das arithmetische Mittel oder einen andren Werth, zufügt oder davon abzieht. Also können uns die, in Dove's Tabellen angeführten, thermischen Monatsabweichungen die Werthe $a$, die wir zur Ableitung unsrer Potenzmittel brauchen, unmittelbar vertreten, wie unten an einem Beispiele besonders auszuführen.

Für unsern Zweck habe ich nun von den 90jährigen Beobach-

tungen (von 1775 an) für Wien, welche sich in den Abhandlungen der Berl. Akad. f. 1866 finden,*) die Beobachtungen für die 4 Monate Januar, April, Juli und October benutzt, und gebe zuerst in folgender Tabelle den Beleg für die wesentliche Zusammenstimmung derselben mit dem durch (37) ausgedrückten Wahrscheinlichkeitsgesetze der Fehlervertheilung. In dieser Tabelle ist unter »beobachtet« angegeben, wie viel von den 90 Abweichungen jedes Monates bezüglich des arithmetischen Mittels zwischen den Gränzen null und einem, in der ersten Verticalspalte angegebenen, Abweichungswerthe enthalten sind, welcher ein bestimmter Bruchtheil oder ein bestimmtes Multiplum des einfachen Fehlermittels $\varepsilon$ ist, wobei die Abweichungen auf positiver und negativer Seite zusammengerechnet sind; unter »berechnet«, wie viel nach dem Gauss'schen Gesetze zwischen diesen Gränzen enthalten sein sollten. Dabei hat man hauptsächlich den Vergleich der beiden letzten Verticalspalten ins Auge zu fassen, welche die mittleren Beobachtungswerthe sämmtlicher 4 Monate mit den nach (37) berechneten Werthen zusammengestellt geben, indess die vorhergehenden 4 Spalten das Resultat der einzelnen Monate bieten. Unten findet sich noch angegeben: 1) ein kleiner Werth $\alpha$, der den arithmetischen Mittelwerth der thermischen Abweichungen jedes Monates bei algebraischer Zusammenrechnung (also mit Rücksicht auf das Vorzeichen) bildet, und eigentlich null sein sollte, weil die Abweichungen ja bezüglich des arithmetischen Mittels gelten sollen, wo sie sich allgebraisch zu Null compensiren müssen. Wenn diess doch nicht genau bei den in der Originaltabelle angegebenen Monatsabweichungen zutrifft, so hängt diess zwar meist nur von Abrundung der Einzelwerthe, aus denen das Mittel gezogen wird, in Decimalen ab; sofern diess jedoch nicht überall ganz ausreicht, müssen kleine Rechnungsfehler oder Vorzeichenverwechselungen im Original angenommen werden, ohne dass jedoch ein erheblicher Irrthum in den Resultaten daraus erwachsen kann;**) — 2) der einfache Mittelfehler $\varepsilon$ der absolut genommenen Abweichungen.

*) Daraus unter dem Titel: Ueber die mittlere und absolute Veränderlichkeit der Temperatur der Atmosphäre, von Dove. Berlin. 1867. Hierin die Wiener Beobachtungen S. 55.

**) Der Werth $\alpha$ ist überall so klein, dass es keinen erheblichen Unterschied machen würde, wollte man ihn überall vernachlässigen; ich habe aber bei Be-

Wenn unter den Zahlen der Tabelle einige mit dem Bruchtheil 0,5 vorkommen, so rührt diess daher, dass, wenn eine Gränze genau mit einem Werthe der Beobachtungsreihe zusammenfällt, der darauf fallende Werth nur mit 0,5 bis zu dieser Gränze mitzuzählen ist.

Zahl der Abweichungen $\Delta$ bezüglich $\alpha$ zwischen den in der 1. Verticalspalte angegebenen Gränzen.

| Von 0 bis $\Delta$ = | Beobachtete Zahlen in den einzelnen Monaten Januar | April | Juli | October | Mittelzahlen V für die 4 Monate. beob. | ber. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,25 $\varepsilon$ | 12 | 15,5 | 11 | 12 | 12,63 | 14,2 |
| 0,5 - | 28 | 24 | 26 | 24 | 25,50 | 27,9 |
| 0,75 - | 38 | 39 | 40 | 41 | 39,50 | 40,5 |
| 1,0 - | 53 | 50 | 49 | 54 | 51,50 | 51,8 |
| 1,25 - | 63 | 60,5 | 61 | 63 | 61,88 | 61,3 |
| 1,5 - | 69 | 71 | 71 | 67 | 69,50 | 69,2 |
| 1,75 - | 75 | 78 | 76 | 76 | 76,25 | 75,4 |
| 2,0 - | 79 | 83 | 78 | 80 | 80,00 | 79,6 |
| 2,25 - | 83 | 86 | 82 | 83 | 83,50 | 83,4 |
| 2,5 - | 87 | 86 | 86 | 86 | 86,30 | 85,9 |
| 2,75 - | 90 | 87 | 87 | 89 | 88,30 | 87,5 |
| 3,00 - | 90 | 89 | 89 | 89 | 89,30 | 88,4 |
| $\infty$ | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 | 90 |
| $\alpha$ | −0,047 | −0,025 | −0,0147 | +0,0594 | | |
| $\varepsilon$ | 1,986 | 1,380 | 1,014 | 1,140 | | |

Man sieht, dass im Mittel der 4 Monate sich die beobachteten Werthe sehr gut an die berechneten anschliessen, nur dass sie im Anfange der Tabelle ein wenig in minus, zuletzt ein wenig in plus davon abweichen; indess die Werthe der 4 Einzelmonate nach beiden Seiten um die berechneten schwanken. Hiezu gebe ich noch für doppelt so weit auseinander gehaltene Gränzen das aus der Sonderberechnung der 12 Monate zusammengefasste Resultat für alle, wozu also im Ganzen 1080 Beobachtungen beigetragen haben. Natürlich konnte aus der Zusammenfassung der 12 Monate eine noch genauere Zusammenstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung als aus blos 4 Monaten erwartet werden, und findet sich auch wirklich.

---

stimmung des Werthes $\varepsilon$ die Abweichungssumme doch gegen $\alpha$ gerechnet, und dann auch von $\alpha$ aus die Gränzen der $\Delta$ nach beiden Seiten bestimmt.

| Von 0 bis $\Delta =$ | beob. | ber. |
|---|---|---|
| 0,5 ε | 322,5 | 334,8 |
| 1,0 - | 621,0 | 621,1 |
| 1,5 - | 832,0 | 830,1 |
| 2,0 - | 966,0 | 960,7 |
| 2,5 - | 1037,0 | 1030,2 |
| 3,0 - | 1063,0 | 1062,0 |
| ∞ | 1080,0 | 1080,0 |

Gelegentlich hiezu die Bemerkung, dass ich nach einer sehr ausgedehnten Untersuchung der, von Dove in verschiedenen Abhandlungen mitgetheilten, thermischen Monatsabweichungen für Europa und Nordamerika durchschnittlich eine positive Asymmetrie der Wintermonate, und eine, doch geringere, negative der Sommermonate bezüglich der allgemeinen (d. i. vieljährigen) arithmetischen Mitteltemperatur des Monates gefunden habe, womit in angebbarer Weise ein durchschnittliches gegentheiliges Uebergewicht der negativen extremen Abweichung in den Wintermonaten, der positiven in den Sommermonaten über die entgegengesetzte extreme Abweichung zusammenhängt. Beides erleidet freilich zufällige Ausnahmen und stellt sich nur bei grösserer Zahl der Werthe und Vergleich vieler Orte durch die Zufälligkeiten durch mit Sicherheit heraus. Für Wien insbesondere ergeben sich aus den 90 Werthen jedes Monates folgende Resultate, die natürlich für sich allein noch kein hinreichendes Fundament für obige Regeln geben würden, da man mindestens die in den Sommermonaten sehr geringen Unterschiede zwischen $m'$ und $m_,$ sehr wohl auf Zufälligkeiten schreiben kann, und in Betreff der $E'$ und $E_,$ sogar unter den 12 Fällen 3 Ausnahmen von der Regel findet. Unter $m'$ und $m_,$ verstehe ich die Zahlen der positiven und negativen Abweichungen, unter $E'$ und $E_,$ die extremen Abweichungen beider Seiten, jene wie diese bezüglich des, das arithmetische Mittel vertretenden, beigefügten $\alpha$ gerechnet. Anderwärts werde ich ausführlicher auf diesen Gegenstand eingehen.

| | $m'$ | $m_,$ | $E'$ | $E_,$ | $\alpha$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Januar | 47 | 43 | 5,31 | 5,26 | −0,0472 |
| Februar | 48 | 42 | 4,04 | 6,20 | +0,0625 |
| März | 50 | 40 | 3,95 | 5,36 | +0,0196 |
| April | 46 | 44 | 5,79 | 3,84 | −0,025 |
| Mai | 44 | 46 | 3,41 | 3,05 | ±0,0 |
| Juni | 44 | 46 | 4,08 | 2,99 | −0,0163 |
| Juli | 44 | 46 | 3,06 | 2,71 | −0,0147 |
| August | 44 | 46 | 4,92 | 2,60 | +0,020 |
| September | 46 | 44 | 3,01 | 2,16 | +0,010 |
| October | 45 | 45 | 3,52 | 2,99 | +0,0594 |
| November | 47 | 43 | 2,34 | 3,58 | −0,004 |
| December | 52 | 38 | 4,19 | 7,59 | −0,002 |

Man sieht, dass jedenfalls in den 4 Monaten, die uns zu dem, Eingangs dieses Abschnittes angegebenen, Zwecke dienen sollen, die Asymmetrie merk-

lich vernachlässigt werden kann, und selbst eine stärkere und entschiedenere Asymmetrie würde nach der S. 13 gemachten Bemerkung nicht hindern, das Gauss'sche Fehlergesetz noch bei Zusammenrechnung der Abweichungen beider Seiten merklich bestätigt zu finden, wie denn der December, der die stärkste Asymmetrie zeigt, sogar fast die geringste Summe von Abweichungen zwischen Rechnung und Beobachtung gegeben hat.

Für den Hauptzweck dieses Abschnittes habe ich nun von den 4 Monaten Januar, April, Juli und October die zwei ersten in 9 Abtheilungen à $m = 10$ Werthen, die zwei letzten in 18 Abtheilungen à $m = 5$ Werthen fractionirt. Zum Anhalt für die weitere Erläuterung folgt hier die erste Abtheilung (Decade) der thermischen Monatsabweichungen (in Graden *R.*) für Januar, und zwar unter 1) nach der ursprünglichen Folge der 10 Jahre von 1775 an, unter 2) nach der Grössenfolge geordnet, wie es zur weiteren Behandlung nöthig ist.

1) — 1,00 | — 4,49 | — 1,69 | — 1,93 | — 1,67 | — 1,73 | — 0,75 | 2,85 | 3,42 | — 3,49

2) — 4,49 | — 3,49 | — 1,93 | — 1,73 | — 1,69 | — 1,67 | — 1,00 | — 0,75 | 2,85 | 3,42

Der Centralwerth $M_0$ hievon, als arithmetisches Mittel seiner beiden Seitenwerthe bestimmt, ist — 1,68, der arithmetische Mittelwerth $M_1$ ist — 1,048, und da dieser zwischen — 1,67 und — 1,00 fällt, so haben wir nach der S. 42 u. 43 gegebenen Regel zunächst auch $M_2$ zwischen denselben Werthen zu suchen, und hienach die $a'$ und $a_,$ zu scheiden. Diess giebt $m' = 6$, $m_, = 4$, $\mu = 2$, $\lambda = -1,952$ und $k = 13,3216$; woraus $x = M_2 = \frac{-1,952 \pm \sqrt{334,89}}{2} = -0,6165$ folgt, da der andere Werth — 18,90 als ausserhalb der Werthreihe fallend nicht in Betracht kommt. Inzwischen entspricht dieser Werth von $x$ nicht der Voraussetzung, dass er zwischen — 1,67 und — 1,00 falle, da er vielmehr zwischen — 0,75 und + 2,85 fällt; also ist er zu verwerfen, und zwischen letztern Werthen zu suchen, was nach demgemässer Scheidung der Werthe $a'$ und $a_,$ giebt $m' = 8$, $m_, = 2$, $\mu = 6$, $\lambda = -23,02$, $k = 26,447$, und hieraus $x = -0,625$, welches der Voraussetzung entspricht, und wobei man also stehen zu bleiben hat. Dabei sieht man doch, dass schon der vorige, nach falscher Voraussetzung berechnete, Werth dem jetzigen richtigen sehr nahe kam. Uebrigens gaben von den 9 Decaden des Januar ausser

der ersten nur noch die 2. und 9. Decade zu einer solchen doppelten Rechnung Anlass.

Nachdem nun solchergestalt in allen 9 Decaden des Januar die drei Werthe $M_0$, $M_1$, $M_2$ als Fractionsmittel bestimmt waren, wurden die entsprechenden Totalmittel aus der ganzen unfractionirten Reihe von 90 Werthen bestimmt, und hienach folgende Zusammenstellung erhalten, in welcher die Totalmittel unten stehen.

Fractions-$M$ des Januar.

| Decade | $M_0$ | $M_1$ | $M_2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | −1,68 | −1,048 | −0,625 |
| 2 | +0,60 | +0,798 | +1,064 |
| 3 | +1,17 | +0,243 | +0,130 |
| 4 | −0,43 | −0,293 | −0,109 |
| 5 | +1,80 | +0,791 | +0,250 |
| 6 | −0,62 | −0,610 | −0,504 |
| 7 | +0,25 | −0,194 | −0,773 |
| 8 | +0,42 | −0,113 | −0,450 |
| 9 | −0,31 | +0,004 | +0,215 |
| Total $M$ | +0,150 | −0,0472 | −0,160 |

Nun* wurden zuvörderst die Abweichungen der 9 einzelnen Fractions-$M_0$ dieser Tabelle vom untenstehenden totalen $M_0$ algebraisch, d. i. mit Berücksichtigung der Vorzeichen genommen, und sowohl unpotenzirt, als quadrirt, als cubirt, nach abs. Werthe zusammengerechnet, was ergab $\Sigma\Delta = 7{,}03$; $\Sigma\Delta^2 = 8{,}659$; $\Sigma\Delta^3 = 12{,}545$. Eben so wurde mit den Fractions-$M_1$ und $M_2$ bezüglich der entsprechenden Totalmittel verfahren; um schliesslich die bezüglich der verschiedenen Totalmittel erhaltenen Summen mit einander zu vergleichen; und dasselbe geschah mit den übrigen 3 Monaten.

Zur Vornahme dieses Vergleiches folgt nun, nach Vorausschickung einer Tabelle über die erhaltenen Totalmittel, für alle 4 Monate die Tabelle der Summen der einfachen, quadrirten und cubirten Abweichungen davon.

Totalmittel der 4 Monate.

| | $M_0$ | $M_1$ | $M_2$ |
|---|---|---|---|
| Januar | +0,15 | −0,047 | −0,160 |
| April | +0,04 | −0,025 | +0,019 |
| Juli | −0,09 | −0,015 | +0,081 |
| October | +0,025 | +0,060 | +0,080 |

Summen der einfachen und potenzirten Abweichungen bezüglich der vorstehenden Totalmittel nach absolutem Werthe.

| | $M_0$ | $M_1$ | $M_2$ |
|---|---|---|---|
| | Januar à $m = 10$ | | |
| $\Sigma\Delta$ | 7,130 | 4,047 | 3,957 |
| $\Sigma\Delta^2$ | 8,539 | 2,909 | 2,448 |
| $\Sigma\Delta^3$ | 12,545 | 2,402 | 1,962 |
| | April à $m = 10$ | | |
| $\Sigma\Delta$ | 5,130 | 4,955 | 5,288 |
| $\Sigma\Delta^2$ | 3,791 | 3,942 | 5,160 |
| $\Sigma\Delta^3$ | 3,057 | 4,055 | 6,576 |
| | Juli à $m = 5$ | | |
| $\Sigma\Delta$ | 8,88 | 7,939 | 8,644 |
| $\Sigma\Delta^2$ | 5,209 | 5,112 | 5,903 |
| $\Sigma\Delta^3$ | 3,426 | 3,845 | 5,024 |
| | October à $m = 5$ | | |
| $\Sigma\Delta$ | 9,840 | 9,582 | 9,923 |
| $\Sigma\Delta^2$ | 7,170 | 6,920 | 7,653 |
| $\Sigma\Delta^3$ | 6,299 | 6,103 | 6,744 |

Man sieht nun, dass mit einigen Ausnahmen (bezüglich $M_0$ im April bei $\Sigma\Delta^2$ und $\Sigma\Delta^3$, im Juli bei $\Sigma\Delta^3$; bezüglich $M_2$ im Januar bei allen drei Summen) das Mittel $M_1$ entschieden in Vortheil betreffs der Kleinheit der, die Schwankungsgrösse um das Mittel charakterisirenden, Abweichungssummen ist, welche Potenz der Abweichungen man dabei immer massgebend halten will, da die Summen bei verschiedener Potenz der Abweichungen einander fast überall parallel gehen. Wenn diess doch ein paar Ausnahmen erleidet, sofern im April $\Sigma\Delta$ für $M_0$ grösser, $\Sigma\Delta^2$ und $\Sigma\Delta^3$ kleiner als für $M_1$ sind, so darf diess nicht befremden, da, je höher die Potenzirung der Abweichungen getrieben wird, desto mehr die kleinen Abweichungen gegen die grossen ihren Einfluss auf die Summe verlieren.

Eben so wenig darf befremden, dass die Summen mit der Höhe der Potenzirung der Abweichungen theils abnehmen, theils zunehmen; erstres muss der Fall sein, wenn die Abweichungen, welche $< 1$ sind, letztres, wenn die Abweichungen, die $> 1$ sind, den grössern Einfluss gewinnen.

Bei dieser Untersuchung liess sich zugleich der oben S. 59 ausgesprochene Satz bestätigen, dass nur für das arithmetische Mittel eine Uebereinstimmung des Totalmittels der ganzen Reihe mit dem

Mittel stattfindet, welches aus den Fractionsmitteln resultirt. So geben die obigen 9 Fractions-$M_0$ für Januar ein daraus resultirendes $M_0 = +0,250$, und die 9 Fractions-$M_2$ ein resultirendes $M_2 = -0,0241$, statt der angegebenen Totalmittel $+0,150$ und $-0,160$, und stellen sich überhaupt die Totalmittel und aus den Fractionsmitteln resultirenden Mittel $M_0$ und $M_2$ so zusammen.

| | $M_0$ tot. | $M_0$ res. | $M_2$ tot. | $M_2$ res. |
|---|---|---|---|---|
| Januar | +0,15 | +0,25 | −0,160 | −0,0241 |
| April | +0,04 | −0,20 | +0,019 | +0,118 |
| Juli | −0,09 | −0,145 | +0,081 | +0,0484 |
| October | +0,025 | +0,020 | +0,080 | +0,151 |

Nun könnte man meinen, dass, wenn die Abweichungen der Fractionsmittel bezüglich des aus ihnen resultirenden Mittels statt wie oben bezüglich des Totalmittels genommen wären, so würde, gemäss der potenziellen Eigenschaft der Mittel, $\Sigma\Delta$ bei $M_0$, $\Sigma\Delta^2$ bei $M_1$, $\Sigma\Delta^3$ bei $M_2$ in allen Monaten am kleinsten sein müssen, was aber keineswegs der Fall ist, da vielmehr die bezüglich der resultirenden Mittel erhaltenen Summen sich nicht sehr von den obigen bezüglich der Totalmittel erhaltenen unterscheiden, wie folgende kleine Tabelle für den Januar lehrt, in welcher die Abweichungen respectiv bezüglich $M_0 = 0,25$, $M_1 = 0,047$ und $M_2 = 0,024$, als resultirenden Mitteln genommen sind,

bezüglich

| | $M_0$ | $M_1$ | $M_2$ |
|---|---|---|---|
| $\Sigma\Delta$ | 7,03 | 4,047 | 4,093 |
| $\Sigma\Delta^2$ | 8,66 | 2,909 | 2,678 |
| $\Sigma\Delta^3$ | 12,89 | 2,402 | 2,148 |

Inzwischen lehrt eine nähere Ueberlegung leicht, dass die vorige Erwartung nur dann im Rechte wäre, wenn die Abweichungen derselben 9 Fractions-$M_0$ nicht blos von dem aus ihnen resultirenden $M_0$, wie hier geschehen, sondern auch vergleichsweise damit von dem resultirenden $M_1$ und $M_2$ genommen würden, wo man nothwendig die Summe der ersten als die kleinste finden würde; hingegen rühren die Summen bezüglich $M_1$ und $M_2$, mit welchen hier die Summen bezüglich $M_0$ verglichen werden, von den Abweichungen der Fractions-$M_1$ und $M_2$ bezüglich der aus ihnen resultirenden Mittel her.

## IX. Von einigen Mitteln, welche das arithmetische Mittel und das Aufsteigen von da zu höhern Ordnungen mit den Potenzmitteln gemein haben.

Verstehen wir überhaupt unter einem Mittel aus gegebenen Einzel-Werthen einen Werth, der nach einem bestimmten Princip so aus diesen Werthen abgeleitet wird, dass er zwischen dieselben fällt, oder kurz eine Function der Einzelwerthe, welche zwischen die Gränzwerthe fällt, so giebt es natürlich so vielerlei Mittel, als es Principe solcher Bestimmung oder Functionen der Art giebt, was unbestimmt viele sein möchten; wonach nur solche eine besondere Erwähnung verdienen, an die sich ein besondres mathematisches oder empirisches Interesse knüpft. In Rücksicht hierauf gedenken wir hier nur zweier Bestimmungsweisen, welche wie die der Potenzmittel zu Mitteln von verschiedener Ordnung führen, und darunter das arithmetische Mittel mit den Potenzmitteln gemein haben, indess sie darüber hinaus in anderm und von einander selbst verschiedenem Sinne aufsteigen. Die Einzelwerthe sollen hiebei allgemein mit $a$ oder bei Entwickelung der Formeln mit $a$, $b$, $c$ . . . bezeichnet werden, die Zahl derselben mit $m$, die Ordnung des Mittels mit $n$, ein Mittel von der $n$-ten Ordnung mit $\mathfrak{M}_n$.

1) Eine gewisse Classe hieher gehöriger Mittel, welche sich um den Namen mit den von uns so genannten Potenzmitteln streiten könnte, ist unter den Ausdruck

$$\mathfrak{M}_n = \sqrt[n]{\frac{\Sigma a^n}{m}}$$

zu bringen, wovon das arithmetische Mittel $\sqrt[1]{\frac{a+b+c\ldots}{m}}$ die erste, $\sqrt[2]{\frac{a^2+b^2+c^2\ldots}{m}}$ die zweite Ordnung u. s. f. repräsentirt. Von einem Mittel nullter Ordnung dieser Art ist nicht zu sprechen, da $a^0 = 1$, mithin auch $\frac{\Sigma a^0}{m} = 1$, und $\sqrt[0]{1} = 1^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}$ ist; $1^{\infty}$ aber einen unbestimmten Werth zwischen 0 und $\infty$ repräsentirt.*) Ich wüsste nicht, welcher Gebrauch von diesen Mitteln ausser dem $M_1$ in Anwendung auf direct er-

*) Vrgl. Cauchy cours d'Analyse algebr. p. 69.

haltene Beobachtungsgrössen $a$ zu machen, indess die Genauigkeitsbestimmung der Beobachtungen nach Gauss'schem Princip zu einer Anwendung dieser Art Mittel, unter Ersatz der $a$ durch die Abweichungen $\varDelta$ bezüglich des arithmetischen Beobachtungsmittels, führt, indem $\mathfrak{M}_2 = \sqrt[2]{\frac{\Sigma \varDelta^2}{m}}$, kurz $= q$ den dazu dienenden quadratisch mittlern Fehler und $\varepsilon = \frac{\Sigma \varDelta}{m}$ den mittelst der Gleichung $\varepsilon = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, q$ nach dem Gauss'schen Fehlergesetze daraus ableitbaren einfach mittleren Fehler bedeutet, indess höhere Mittel dieser Art zur Genauigkeitsbestimmung der niedern dienen können, wie hier nicht auszuführen. Allgemein lassen sich die Fehlerfunctionen dieser Art nach Gauss'schem Fehlergesetze als Function von $\mathfrak{M}_2 = q$, darstellen, wie man in Encke's Abh. über die Meth. d. kl. Qu. im astronom. Jahrb. f. 1834 S. 293 (mit Rücksicht auf S. 280 und 289) finden kann. Hienach ist unter Ersatz der $a$ durch $\varDelta$, des $\mathfrak{M}_2$ durch $q$, und Bezeichnung der Ludolf'schen Zahl mit $\pi$

$$\varepsilon = \mathfrak{M}_1 = q\sqrt{\frac{2}{\pi}} \;\Big|\; \mathfrak{M}_2^2 = q^2 \;\Big|\; \mathfrak{M}_3^3 = 2q^3\sqrt{\frac{2}{\pi}} \;\Big|\; \mathfrak{M}_4^4 = \frac{3}{2}\, q^4 \text{ u. s. w.}$$

und allgemein $\mathfrak{M}_n^n$ für

$$n \text{ gerade} = q^n\, 2^{\frac{n}{2}} . \frac{1 . 3 . 5 \ldots (n-1)}{2 . 2 . 2 \ldots 2}$$

$$n \text{ ungerade} = q^n\, 2^{\frac{n}{2}} . \frac{1 . 2 . 3 \ldots . \frac{1}{2}(n-1)}{\sqrt{\pi}}$$

Aus $\mathfrak{M}_n^n$ erhält man hienach $\mathfrak{M}_n$ durch Ausziehung der $n$-ten Wurzel.

2) Eine zweite Art hieher gehöriger Mittel $\mathfrak{M}_n$, welche man Combinationsmittel nennen könnte, erläutert sich an folgendem Beispiele aus 4 Werthen $a, b, c, d$.

$$\mathfrak{M}_1 = \sqrt[1]{\frac{a+b+c+d}{4}} = \text{arithm. Mittel}$$

$$\mathfrak{M}_2 = \sqrt[2]{\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}}$$

$$\mathfrak{M}_3 = \sqrt[3]{\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}}$$

$$\mathfrak{M}_4 = \sqrt[4]{abcd}$$

Für $\mathfrak{M}_0$ würde man auch hier einen unbestimmten Werth erhalten. Abgesehen davon beginnt die Reihe dieser Mittel wie die vorige mit dem arithmetischen Mittel, schreitet aber nicht eben so ins Unbestimmte fort, sondern schliesst mit dem geometrischen Mittel.

Allgemein hat man zu einem Mittel $n$-ter Ordnung dieser Art aus $m$ Werthen alle möglichen Combinationen ohne Wiederholung von je $n$ Werthen zu bilden, welche sich aus den $m$ Werthen darstellen lassen, die Summe der so erhaltenen Glieder mit der Zahl derselben, welche =

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots[m-(n-1)]}{1.2.3.\ldots n}$$

ist, zu dividiren, und aus dem Quotienten die $n$-te Wurzel zu ziehen. Diess sind die Mittel, welche Scheibner in den Berichten dieser Societät 1873 p. 562 so elegant behandelt hat, worauf hier nicht näher zurückzukommen ist.

Auch von dieser Art Mittel ist mir, ausser dem arithmetischen und geometrischen Mittelwerthe, keine Verwendung bekannt. Immerhin aber ist bemerkenswerth, wie der arithmetische Mittelwerth ein Verknüpfungsglied für Mittel von so ganz verschiedenem Princip der Bestimmung bildet, als die Potenzmittelwerthe, die mit denselben um den Namen streitenden Mittelwerthe unter 1) und die Combinationsmittelwerthe unter 2) sind, so dass man, wenn man sonst keinen besondern Grund haben sollte, das eine Princip dem andern vorzuziehen, auch hierin einen Grund finden könnte, sich an das arithmetische Mittel als das allen gleich genügende zu halten.

### ÜBER DAS VON WEBER

FÜR DIE

# ELEKTRISCHEN KRÄFTE AUFGESTELLTE GESETZ.

VON

**CARL NEUMANN**

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.




**Des XI. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften**

**N⁰ II.**

**LEIPZIG**

BEI S. HIRZEL.

1874.

**Vom Verfasser übergeben den 30. Mai 1874.**
**Der Abdruck vollendet den 29. Septbr. 1874.**

# ÜBER DAS VON WEBER

FÜR DIE

# ELEKTRISCHEN KRÄFTE

# AUFGESTELLTE GESETZ.

VON

CARL NEUMANN.

*Crescunt disciplinae lente tardeque, per varios errores sero pervenitur ad veritatem. Omnia praeparata esse debent diuturno et assiduo labore ad introitum veritatis novae. Jam illa certo temporis momento divina quadam necessitate coacta emerget.*

*C. G. J. JACOBI.*

»Man kann die Bewegung der Planeten um die Sonne auf »künstliche Weise durch allerhand Triebwerke und Maschinerien »nachahmen, wie wir dies bei den sogenannten Planetarien zu sehen »Gelegenheit haben. Die Natur bedient sich viel einfacherer Mittel »zur Hervorbringung jener Bewegungen. Statt all' jener Trieb- und »Uhrwerke finden wir in der Natur als Ursache jener Bewegungen »nur *zwei* Dinge, nämlich erstens die Trägheit der Planeten und zwei- »tens die zwischen ihnen und der Sonne stattfindende Anziehungs- »kraft.«

»Dem analog scheint mir auch das *Weber*'sche Gesetz, nach »welchem zwei elektrische Theilchen auf einander einwirken sollen, »gewissermassen nur ein künstlich ausgedachter Apparat zu sein, »welcher die in der Natur stattfindenden Erscheinungen allerdings »auf überraschend treue Weise nachahmt, welcher aber zu compli- »cirt ist, als dass man glauben könnte, es seien dies wirklich die- »jenigen Mittel, deren sich die Natur zur Hervorbringung jener »Erscheinungen bedient, — als dass man glauben könnte, es sollte »nicht möglich sein, *einfachere* Vorstellungen zu finden, von denen »aus jenes Gebiet von Erscheinungen seine Erklärung findet. — — —«

»Wir stehen hier bei einem Räthsel, dessen Lösung bisher ver- »geblich versucht ist. Vielleicht wird es der Zukunft gelingen, den »Schleier zu lüften.«

»Möglich, dass es dazu nur eines glücklichen Gedankens bedarf. »Aber es ist auch möglich, dass unsere Begriffe dazu noch nicht ge- »hörig vorbereitet sind, dass nämlich das mathematische Element in »unserem Verstande die dazu erforderliche Ausbildung noch nicht »erlangt hat.«

»Bevor man sich mit der Geometrie des Raumes beschäftigt »hatte, wäre es dem Mineralogen wohl kaum möglich gewesen, die »einfachen Gesetze zu erkennen, welche in der Gestaltung der Kry- »stalle sich darbieten.«

»Wären die alten Griechen bei ihren rein mathematischen Spe- »culationen nicht auf die Erforschung der Kegelschnitte, der Ellipse, »Hyperbel und Parabel geführt worden, so würde es dem Astrono- »men *Kepler* unmöglich gewesen sein zu entdecken, dass die Pla- »neten sich in Ellipsen um die Sonne bewegen.«

»Wäre ferner durch *Newton* und *Leibniz* nicht ein neuer Theil »der mathematischen Wissenschaft, die sogenannte Differential- und »Integralrechnung ins Leben gerufen worden, so würde es wohl »schwerlich gelungen sein, die Gesetze, von welchen die Bewegung »der Himmelskörper beherrscht wird, zurückzuführen auf die Wirkung »einer allgemeinen Anziehungskraft.«

»Aehnlich kann es sich vielleicht auch heutzutage mit der Theo- »rie der Elektricität und des Magnetismus verhalten. — Es können »möglicherweise uns diejenigen mathematischen Vorstellungen, die- »jenigen Vorstellungen über Raum und Zeit noch fehlen, welche »nothwendig sind, um auf den *wahren einfachen* Grund jener Er- »scheinungen hinabzusteigen.«

Diese Worte, mit denen ich 1865 in einer öffentlichen Rede*) mich aussprach, charakterisiren denjenigen Standpunkt, welchen ich dem *Weber*'schen Gesetz gegenüber seit langer Zeit in ungeänderter Weise beibehalten habe.

Will man aber das Vorhandene durch etwas Besseres zu ersetzen suchen, so scheint es zweckmässig, zunächst das Vorhandene genau zu durchforschen. Als ein solches *Studium des Vorhandenen* sind die vorliegenden Untersuchungen anzusehen. — Dieselben zerfallen in drei Abschnitte.

Im *ersten Abschnitt* bespreche ich gewisse Transformationen des *Weber*'schen Gesetzes, ferner seine Uebereinstimmung mit dem allgemeinen Princip der Energie. Sodann zeige ich, dass das Gesetz, unter Annahme des *Hamilton*'schen Princips, reducirt werden kann

---

*) *Der gegenwärtige Standpunct der mathematischen Physik.* Akademische Antrittsrede etc. Tübingen 1865. Verlag der *Laupp*'schen Buchhandlung.

auf ein von der *relativen Lage* und *relativen Geschwindigkeit* abhängendes Potential, und dass endlich dieses Potential, unter Annahme einer gewissen nichtmomentanen Transmission, auf ein einfacheres Potential reducirt werden kann, welches nur noch von der *relativen Lage* abhängt.

Im *zweiten Abschnitt* betrachte ich das *Weber*'sche Gesetz unter Zugrundelegung der gewöhnlichen *dualistischen* Anschauungsweise. Nachdem ich die in solcher Weise sich ergebende Theorie zunächst für den Fall gleichförmiger elektrischer Bewegungen in linearen Leitern kurz exponirt habe, gehe ich über zu dem complicirteren Fall beliebiger (gleichförmiger oder ungleichförmiger) Bewegungen in körperlichen Leitern, namentlich zu den von *Kirchhoff* und *Weber* für diesen Fall aufgestellten Differentialgleichungen. Aus meinen Expositionen dürfte hervorgehen, dass, wie man auch die dualistische Anschauungsweise durch allerhand accessorische Voraussetzungen näher zu determiniren versucht, immer noch irgend welche *Vernachlässigungen* erforderlich sind, um zu den genannten Differentialgleichungen hinzugelangen. Demgemäss werden diese Gleichungen, falls man sie überhaupt als Ausfluss des *Weber*'schen Gesetzes und der dualistischen Anschauungsweise auffassen will, immer nur als approximative Formeln gelten können, die anwendbar innerhalb gewisser Grenzen, in extremen Fällen aber nicht mehr brauchbar sind. Selbstverständlich liegt hierin nichts Singuläres. Denn von den meisten Differentialgleichungen im Gebiete der mathematischen Physik wird dasselbe zu sagen sein. Dagegen ist hervorzuheben, dass unter den accessorischen Annahmen, durch welche die dualistische Anschauungsweise, bei Ableitung jener Differentialgleichungen, näher zu determiniren ist, einige sich vorfinden, welche *wenig Ansprechendes* haben, so z. B. die Annahme, dass die positiven und negativen Elektricitätstheilchen durch einen gewissen *Mechanismus* verbunden sind, welcher bewirkt, dass die Theilchen immer nur *paar*weise sich bewegen können, also z. B. bewirkt, dass kein positives Theilchen eine Bewegung ausführen kann, ohne dass gleichzeitig ein an derselben Stelle befindliches (gleichgrosses) negatives Theilchen mit gleicher Geschwindigkeit die entgegengesetzte Bewegung ausführt. Auch ist zu betonen, dass die Anzahl jener accessorischen Annahmen eine *ziemlich beträchtliche* ist.

Im *dritten Abschnitt* endlich untersuche ich das *Weber*'sche Gesetz unter Zugrundelegung einer gewissen *unitarischen* Anschauungsweise. Dieselbe besteht in der Annahme, dass nur *ein* elektrisches Fluidum existire, welches dargestellt ist durch die positive Elektricität, dass hingegen die negative Elektricität mit der ponderablen Masse unlöslich verbunden sei, ferner in der Annahme, dass jenes Fluidum im Innern der ponderablen Masse nur mit einer gewissen *Reibung* sich fortbewegen könne, ferner in der Annahme, dass die Trägheit der elektrischen Materie eine verschwindend kleine sei, und endlich in der Annahme, dass jedes Quantum *lebendiger Kraft*, welches in Folge der genannten Reibung scheinbar verloren geht, in Wirklichkeit in *Wärme* umgewandelt werde.

Meine Absicht bei diesen Untersuchungen besteht keineswegs darin, die bisher übliche Theorie durch eine bessere zu verdrängen, sondern vielmehr nur darin, das *Weber*'sche Gesetz, behufs seines genauern Studiums, zunächst mit *möglichst einfachen* Grundlagen in Verbindung zu bringen. Denn dass die eben angedeutete unitarische Ansicht eine einfachere Grundlage darbietet, als die gewöhnliche dualistische Anschauung, liegt deutlich zu Tage.*) Uebrigens habe ich die Hoffnung, dass diese von der unitarischen Ansicht ausgehenden Untersuchungen eine brauchbare *Vorarbeit* sein werden, nicht nur für den Fall, dass man bei der unitarischen Anschauung bleibt, sondern auch für den (durchaus nicht unwahrscheinlichen) Fall, dass man zur complicirteren dualistischen Anschauung zurückzukehren für gut finden sollte.

Es mag gestattet sein, über den Inhalt des dritten Abschnitts einige nähere Andeutungen zu geben.

Aus den von mir eingeführten und schon genannten Prämissen ergiebt sich zunächst das *Joule*'sche *Gesetz* (wie ich in § 2 nachweise). Ferner ergiebt sich (§ 4) der Satz, *dass die auf das elektrische Fluidum ausgeübten Kräfte unmittelbar auf die ponderable Masse*

---

*) Hat man doch bei der erstern nur *zwei*, bei der letztern aber *drei* gegen einander bewegliche Materien in Betracht zu ziehen. Bezeichnet man also diese Materien mit $\alpha$, $\beta$, respective mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, so wird man, was die Processe innerhalb eines gegebenen Körpers betrifft, im erstern Fall nur *eine* Wirkung $(\alpha, \beta)$, im letztern Fall hingegen *drei* Wirkungen $(\alpha, \beta)$, $(\alpha, \gamma)$ und $(\beta, \gamma)$ in Betracht zu ziehen haben.

***sich übertragen***, und gleichzeitig der Satz, ***dass die an irgend einer Stelle des betrachteten Körpers vorhandene elektromotorische Kraft identisch ist mit der daselbst auf das Fluidum ausgeübten Kraft***, ***letztere bezogen gedacht auf die Masseneinheit des Fluidums***.

Nach den schon genannten Prämissen besteht die *feste Substanz* des Körpers aus seiner ponderablen Masse und der mit dieser unlöslich verbundenen negativen Elektricität, während das *Fluidum* aus positiver Elektricität besteht. In Bezug auf ein im Raume absolut unbewegliches Axensystem hat offenbar das Fluidum zweierlei Bewegungen, nämlich die *generelle* Bewegung des ganzen Körpers, und daneben seine eigne *relative* Bewegung. Die Bewegung $dx$, $dy$, $dz$, welche irgend ein Partikelchen $p$ während der Zeit $dt$ in Bezug auf jenes absolut feste Axensystem ausführt, wird daher, jenachdem das Partikelchen der festen Substanz oder dem Fluidum angehört, durch

$$dx = \delta x, \qquad dy = \delta y, \qquad dz = \delta z,$$

oder durch

$$dx = \delta x + \Delta x, \qquad dy = \delta y + \Delta y, \qquad dz = \delta z + \Delta z$$

darzustellen sein; wo alsdann $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ die *generelle*, und $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ die *relative Verschiebung* genannt werden kann. Repräsentirt $X$, $Y$, $Z$ die auf das Partikelchen $p$ einwirkende Kraft, so wird die während der Zeit $dt$ auf $p$ ausgeübte Arbeit $Xdx + Ydy + Zdz$ im erstern Fall durch

$$(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$$

im letztern Fall durch

$$(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + (X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z)$$

ausgedrückt sein; wo alsdann $(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$ als *generelle*, und $(X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z)$ als *relative Arbeit* zu bezeichnen ist. — Ich weise nun nach, dass zu diesen Arbeiten die im Körper sich entwickelnden Quantitäten von *mechanischer* und *calorischer Energie* in enger Beziehung stehen; dabei ist unter der mechanischen Energie die lebendige Kraft der ponderablen Masse, andererseits unter der calorischen Energie die vorhandene Wärme zu verstehen. Ich gelange nämlich (§ 6) zu folgenden Formeln:

(I.α) $$dT = \Sigma_{Dv} (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z),$$

(I.β) $$dQ = \Sigma_{Dv} (X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z);$$

in Worten ausgedrückt: *Die in irgend einem Volumelement $Dv$ während der Zeit $dt$ sich entwickelnden Quanta von mechanischer und calorischer Energie $dT$ und $dQ$ sind gleich gross respective mit derjenigen generellen und relativen Arbeit, welche während der Zeit $dt$ ausgeübt worden ist auf alle zu Anfang dieser Zeit in $Dv$ enthalten gewesenen Partikelchen.* Das Volumen $Dv$ soll nämlich verbunden gedacht werden mit der festen Substanz des Körpers; demgemäss werden allerdings die in ihm enthaltenen Partikelchen der festen Substanz permanent dieselben bleiben, dagegen die in ihm enthaltenen Partikelchen des Fluidums einem fortwährenden Wechsel unterworfen sein.

Befinden sich zwei Körper $A$ und $B$ in beliebigen Bewegungen, während gleichzeitig im Innern eines jeden irgend welche elektrische Bewegungen stattfinden, so sind in jedem Zeitelement $dt$ *vier* Arten von Verschiebungen zu unterscheiden, nämlich die generellen und relativen Verschiebungen von $A$, andererseits die generellen und relativen von $B$; erstere mögen mit $\delta_0 x$, $\delta_0 y$, $\delta_0 z$ und $\Delta_0 x$, $\Delta_0 y$, $\Delta_0 z$, letztere mit $\delta_1 x$, $\delta_1 y$, $\delta_1 z$ und $\Delta_1 x$, $\Delta_1 y$, $\Delta_1 z$ bezeichnet sein. Ist nun $f$ irgend eine von all' diesen Bewegungen abhängende Function, so wird der Zuwachs $df$, den $f$ während der Zeit $dt$ erfährt, jenen *vier* Arten von Verschiebungen entsprechend, in vier partielle Zuwüchse zerfallen:

$$df = \delta_0 f + \delta_1 f + \Delta_0 f + \Delta_1 f.$$

Mit Anwendung dieser Bezeichnungen ergeben sich, falls man das elektrostatische und elektrodynamische Potential der beiden Körper $A$, $B$ auf einander respective mit $U$ und $P$ bezeichnet, folgende Sätze [Form. (49. a, b) in § 7]:

*Dasjenige Quantum mechanischer Energie, welches $B$ vermöge seiner elektrischen Kräfte während der Zeit $dt$ in $A$ hervorbringt, ist gleich*

$$(\text{II}.\alpha) \qquad d\Phi - \delta_0 (U + P),$$

*während anderseits das während der Zeit $dt$ von $B$ in $A$ hervorgerufene Quantum calorischer Energie den Werth hat:*

$$(\text{II}.\beta) \qquad d\Psi - \Delta_0 (U + P).$$

Dabei sind $d\Phi$, $d\Psi$ die *vollständigen* Differentiale gewisser Functionen $\Phi$, $\Psi$, auf deren nähere Definition ich mich hier nicht einlassen will.*) —

*) Diese Functionen $\Phi$ und $\Psi$ sind an der citirten Stelle [Form. (47. a, b) § 7] mit $2P^{(r_0)}$ und $2P^{(\vartheta_0)}$ bezeichnet, weil sie in gewisser Beziehung stehen zum Potential $P$.

Diese Sätze führen, bei ihrer Anwendung auf ein System von beliebig vielen Körpern, zu dem Resultat, dass das Princip der lebendigen Kraft durch *zweierlei* wohl von einander zu unterscheidende Gesetze dargestellt ist, für welche ich bereits bei früherer Gelegenheit die Namen *Energiegesetz* und *Potentialgesetz* in Vorschlag gebracht habe (§ 9).

Aus dem Satze (II. $\alpha, \beta$) ergeben sich ferner (§ 10) die *beiden Integralgesetze* (das ponderomotorische und das elektromotorische) *für körperliche Leiter*, und zwar in genau derselben Form, in welcher ich dieselben bereits früher [in meinem Werke: *Die elektrischen Kräfte* (Leipzig. 1873)] von ganz andern Grundlagen ausgehend erhalten habe. Demgemäss sind diese Integralgesetze angewendet auf *lineare Leiter* (§ 11) identisch mit den von meinem Vater aufgestellten, und folgendermassen auszusprechen:

*Ist P das elektrodynamische Potential zweier elektrischen Stromringe A und B auf einander, so wird die während eines Zeitelementes von B auf A ausgeübte ponderomotorische Arbeit gleich sein dem negativen partiellen Zuwachs von P, genommen nach der räumlichen Lage von A.*

*Die Summe der von B in A während der Zeit dt hervorgebrachten elektromotorischen Kräfte ist gleich dem vollständigen Zuwachs des Potentiales P, dasselbe bezogen auf einen in A gedachten Strom von der Stärke Eins.* — — —

Ich zeige sodann (§ 12), *dass die Sätze* (II. $\alpha, \beta$) *auch für den Fall gültig sind, dass man unter A und B irgend welche Theile der gegebenen Körper versteht.* Nur ist in diesem Falle eine gewisse Vorsicht bei Bildung der Differentiale in (II. $\alpha, \beta$) geboten, indem dieselben nicht auf die *Volumina* der gegebenen Theile, sondern auf diejenigen *Materien* zu beziehen sind, welche zu Anfang des betrachteten Zeitelementes *dt* innerhalb dieser Volumina sich vorfinden. Mit Rücksicht hierauf führen die Formeln (II. $\alpha, \beta$) zu den *beiden Elementargesetzen* (dem ponderomotorischen und elektromotorischen); und zwar erhält man für das eine die von *Ampère* gegebene Formel, für das andere aber eine sehr complicirte (von mir vorläufig nicht weiter entwickelte) Formel.

Das *Ampère*'sche Gesetz kann also der Formel (II. $\alpha$) subsumirt werden; diese Formel aber reducirt sich, falls man von den elektro*statischen* Kräften abstrahirt auf $d\Phi - \delta_0 P$. Es ergiebt sich somit der

beachtenswerthe Satz, dass die ponderomotorische Arbeit, welche ein Stromelement $B$ auf ein anderes Stromelement $A$ nach dem *Ampère*'schen Gesetz während der Zeit $dt$ ausübt, dargestellt werden kann durch

(III.) $$d\Phi - \delta_0 P,$$

wo $d$ ein vollständiges Differential, hingegen $\delta_0$ das partielle Differential nach der räumlichen Lage von $A$ andeutet. Selbstverständlich wird dieses Resultat (III.), was hier gewissermaassen zufällig zu Tage tritt, auch auf anderem Wege, nämlich direct aus der Formel des *Ampère*'schen Gesetzes sich eruiren lassen.

Erster Abschnitt.

## Allgemeine Betrachtungen über das Weber'sche Gesetz.

### § 1.

*Transformation des Weber'schen Gesetzes.*

Nach diesem Gesetz üben zwei elektrische Massen $e$ und $\eta$ in der Entfernung $r$ eine repulsive Kraft $\mathfrak{R}$ auf einander aus, welche den Werth hat:

(1.a) $$\mathfrak{R} = \frac{e\eta}{r^2}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right],$$

wo $c$ eine gewisse Constante und $t$ die Zeit bezeichnet. Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{2}{c^2} = A^2,$$

so lässt sich diese Kraft auch so darstellen:

$$\mathfrak{R} = \frac{e\eta}{r^2}\left[1 - \frac{A^2}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + A^2 r\frac{d^2r}{dt^2}\right],$$

oder auch so:

(1.b) $$\mathfrak{R} = e\eta\left[\frac{1}{r^2} + 4A^2\frac{d\sqrt{r}}{dr}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}\right],$$

oder endlich auch so:

(1.c) $$\mathfrak{R} = e\eta\left(-\frac{d\varphi}{dr} + 4A^2\frac{d\psi}{dr}\frac{d^2\psi}{dt^2}\right),$$

wo $\varphi = \frac{1}{r}$ und $\psi = \sqrt{r}$.

Ebenso wie das *Newton*'sche Gesetz für *sehr kleine* Entfernungen einer gewissen Modification bedarf, ebenso erscheint es sehr möglich, dass einer analogen Modification vielleicht auch das *Weber*'sche Gesetz bedürftig ist. Der grösseren Allgemeinheit willen mögen daher im Folgenden unter $\varphi$ und $\psi$ Functionen verstanden sein, welche für *beträchtliche* Entfernungen mit $\frac{1}{r}$ und $\sqrt{r}$ identisch, für *sehr kleine* Entfernungen hingegen von noch unbekannter Beschaffenheit sind.

Sind $x$, $y$, $z$ und $\xi$, $v$, $\zeta$ die Coordinaten von $e$ und $\eta$, so haben die Componenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ der von $\eta$ auf $e$ ausgeübten Kraft $\mathfrak{R}$ (1.) die Werthe:

$$(2.)\quad \begin{aligned} \mathfrak{X} &= \mathfrak{R}\frac{\partial r}{\partial x} = e\eta\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial x} + 4A^2\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{d^2\psi}{dt^2}\right), \\ \mathfrak{Y} &= \mathfrak{R}\frac{\partial r}{\partial y} = e\eta\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial y} + 4A^2\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{d^2\psi}{dt^2}\right), \\ \mathfrak{Z} &= \mathfrak{R}\frac{\partial r}{\partial z} = e\eta\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial z} + 4A^2\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{d^2\psi}{dt^2}\right). \end{aligned}$$

Um diese Ausdrücke in eine etwas andere und für viele Zwecke bequemere Form zu versetzen, bemerken wir zunächst, dass

$$(\alpha.)\quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial x}(x'-\xi') + \frac{\partial\psi}{\partial y}(y'-v') + \frac{\partial\psi}{\partial z}(z'-\zeta')$$

und ebenso

$$(\beta.)\quad \frac{d\frac{\partial\psi}{\partial x}}{dt} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x'-\xi') + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}(y'-v') + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}(z'-\zeta')$$

ist, wo die Accente Differentiationen nach $t$ andeuten.

Aus ($\alpha$.) folgt durch partielle Differentiation nach $x$:

$$(\gamma.)\quad \frac{\partial\frac{d\psi}{dt}}{\partial x} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x'-\xi') + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}(y'-v') + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}(z'-\zeta'),$$

und hieraus durch Vergleichung mit ($\beta$.):

$$(\delta.)\quad \frac{\partial\frac{d\psi}{dt}}{\partial x} = \frac{d\frac{\partial\psi}{\partial x}}{dt}, \quad \text{mithin*) auch:} \quad \frac{\partial\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}{\partial x} = 2\frac{d\psi}{dt}\frac{d\frac{\partial\psi}{\partial x}}{dt}.$$

Andererseits folgt aus ($\alpha$.) durch partielle Differentiation nach $x'$:

$$(\varepsilon.)\quad \frac{\partial\frac{d\psi}{dt}}{\partial x'} = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \text{mithin auch:} \quad \frac{\partial\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}{\partial x'} = 2\frac{d\psi}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Nun ist offenbar:

$$\frac{d\left(2\frac{d\psi}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)}{dt} = 2\frac{d\psi}{dt}\frac{d\frac{\partial\psi}{\partial x}}{dt} + 2\frac{d^2\psi}{dt^2}\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

---

*) In ($\delta$.) und ($\varepsilon$.) ergeben sich die Formeln rechter Hand aus denen linker Hand durch Multiplication mit $2\frac{d\psi}{dt}$.

also mit Rücksicht auf die Gleichungen, welche in (δ.), (ε.) rechter Hand notirt sind:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}{\partial x'} = \frac{\partial\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}{\partial x} + 2\frac{d^2\psi}{dt^2}\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

oder anders geordnet:

$$(3.)\qquad 2\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{\partial\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}{\partial x'};$$

hieraus folgt durch Multiplication mit $2A^2$:

$$(4.)\qquad 4A^2\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\frac{\partial\varpi}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\varpi}{\partial x'},$$

falls man nämlich die Bezeichnung einführt:

$$(5.)\qquad \varpi = 2A^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2.$$

Substituirt man nun den Werth (4.) in die erste der Formeln (2.), so folgt sofort:

$$\mathfrak{X} = e\eta\left(-\frac{\partial(\varphi+\varpi)}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\varpi}{\partial x'}\right); \text{ und ebenso wird:}$$

$$(6.)\qquad \mathfrak{Y} = e\eta\left(-\frac{\partial(\varphi+\varpi)}{\partial y} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\varpi}{\partial y'}\right),$$

$$\mathfrak{Z} = e\eta\left(-\frac{\partial(\varphi+\varpi)}{\partial z} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\varpi}{\partial z'}\right).$$

Es mag im Folgenden $e\eta\varphi$ das *elektrostatische*, und $e\eta\varpi$ das *elektrodynamische Potential* der beiden Theilchen $e$, $\eta$ genannt werden.

## § 2.

*Anwendung der Transformation auf einen speciellen Fall.*

Wir stellen uns die Aufgabe, diejenige Wirkung zu ermitteln, welche eine mit Elektricität gleichmässig belegte Kugelfläche ausübt auf einen elektrischen Massenpunkt $e$, unter der Voraussetzung, dass die Elektricität auf der Kugelfläche in *Ruhe*, der Punkt $e$ hingegen in irgend welcher *Bewegung* begriffen ist.

Bezeichnet man die elektrische Dichtigkeit auf der Kugelfläche mit H, also die auf einem Element $D\omega$ derselben vorhandene Elektricität mit $\mathrm{H}D\omega$, und ferner die augenblicklichen Coordinaten und Geschwindigkeiten des Punktes $e$ mit $x$, $y$, $z$ und $x'$, $y'$, $z'$, so werden die Componenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ der gesuchten Wirkung, zufolge (6.), darstellbar sein durch:

$$(7.)\quad \begin{aligned} \mathfrak{X} &= -\frac{\partial(U+P)}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial x'}, \\ \mathfrak{Y} &= -\frac{\partial(U+P)}{\partial y} + \frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial y'}, \\ \mathfrak{Z} &= -\frac{\partial(U+P)}{\partial z} + \frac{d}{dt}\frac{\partial P}{\partial z'}, \end{aligned}$$

wo $U$ und $P$ die Bedeutungen haben:

$$(8.)\quad \begin{aligned} U &= e\iint\varphi \mathrm{H} D\omega, \\ P &= e\iint\varpi \mathrm{H} D\omega, \end{aligned}$$

die Integration ausgedehnt über alle Elemente $D\omega$ der Kugelfläche. Nun ist (falls nicht etwa $e$ der gegebenen Kugelfläche allzu nahe liegt):

$$\varphi = \frac{1}{r}, \qquad \psi = \sqrt{r},$$

also mit Rücksicht auf (5.):

$$\varpi = \frac{A^2}{2r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{A^2}{2r}\left(\frac{x-\xi}{r}x' + \frac{y-v}{r}y' + \frac{z-\zeta}{r}z'\right)^2,$$

wo $\xi$, $v$, $\zeta$ die Coordinaten des Elementes $\mathrm{H}D\omega$ vorstellen, und $r$ die zwischen diesem Elemente und $e$ vorhandene Entfernung. Somit folgt aus (8.):

$$(9.)\quad \begin{aligned} U &= e\iint\frac{\mathrm{H}D\omega}{r}, \\ P &= \frac{A^2e}{2}\iint\left(\frac{x-\xi}{r}x' + \frac{y-v}{r}y' + \frac{z-\zeta}{r}z'\right)^2\frac{\mathrm{H}D\omega}{r}, \end{aligned}$$

wo übrigens H, als Constante, *vor* das Integralzeichen gesetzt werden darf.

Bezeichnet man den Radius der Kugelfläche ($\mathrm{H}D\omega$) mit $\alpha$, und den Abstand des Punktes $e$ ($x$, $y$, $z$) von ihrem Mittelpunkt mit $R$, so sind bei der weiteren Berechnung von $U$ und $P$ die beiden Fälle $R<\alpha$ und $R>\alpha$ zu unterscheiden. — Ist $\eta$ die Gesammtmasse der auf der Kugelfläche vorhandenen Elektricität, mithin:

$$(10.\mathrm{a})\quad \iint \mathrm{H}D\omega = 4\pi\alpha^2\mathrm{H} = \eta,$$

so wird bekanntlich:

$$(10.\mathrm{b})\quad \iint\frac{\mathrm{H}D\omega}{r} = \frac{\eta}{\alpha}, \qquad \text{oder} \quad = \frac{\eta}{R},$$

jenachdem $e$ *innerhalb* oder *ausserhalb* der Kugelfläche liegt. Desgleichen findet man durch leichte Rechnung:

$$(10.\mathrm{c})\quad \iint \mathrm{H}rD\omega = \eta\left(\alpha + \frac{R^2}{3\alpha}\right), \qquad \text{oder} \quad = \eta\left(\frac{\alpha^2}{3R} + R\right),$$

mit derselben Unterscheidung. Die Formeln (10.b, c) können nach den Coordinaten $x$, $y$, $z$ des Punktes $e$ beliebig oft differenzirt wer-

den. In solcher Weise ergeben sich, falls man den Anfangspunkt des Coordinatensystems in den Mittelpunkt der Kugelfläche fallen lässt, die weiteren Formeln:

$$(10.\mathrm{d})\quad \iint \frac{\mathrm{H}\,(x-\xi)\,D\omega}{r} = \eta\,\frac{2x}{3\alpha}, \quad \text{oder} = \eta\left(\frac{x}{R}-\frac{\alpha^2 x}{3R^3}\right),$$

$$(10.\mathrm{e})\quad \iint \frac{\mathrm{H}\,(x-\xi)^2\,D\omega}{r^3} = \eta\,\frac{1}{3\alpha}, \quad \text{oder} = \eta\,\frac{x^2}{R^3}\left(1-\frac{\alpha^2}{R^2}\right)+\eta\,\frac{\alpha^2}{3R^3},$$

$$(10.\mathrm{f})\quad \iint \frac{\mathrm{H}\,(x-\xi)\,(y-v)\,D\omega}{r^3} = 0\;, \quad \text{oder} = \eta\,\frac{xy}{R^3}\left(1-\frac{\alpha^2}{R^2}\right).$$

Durch Anwendung dieser Formeln folgt aus (9.):

$$(11.)\quad \begin{aligned} U &= \frac{e\eta}{\alpha}, & \text{oder} &= \frac{e\eta}{R},\\ P &= \frac{A^2 e\eta}{2}\,\frac{x'^2+y'^2+z'^2}{3\alpha}, & \text{oder} &= \frac{A^2 e\eta}{2}\left(\frac{(R^2-\alpha^2)\,(xx'+yy'+zz')^2}{R^5}+\frac{\alpha^2\,(x'^2+y'^2+z'^2)}{3R^3}\right), \end{aligned}$$

wo ebenso, wie in (10. a, b, … f) die Werthe *links* oder *rechts* gelten, jenachdem der Punkt $e$ *innerhalb* oder *ausserhalb* der Kugelfläche liegt.

Substituirt man die Werthe (11.) in (7.), und beachtet man, dass $R^2 = x^2+y^2+z^2$ ist, so ergeben sich nach gehöriger Reduction die Formeln:

$$(12.)\left\{\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \frac{A^2 e\eta}{3\alpha}\,x'',\\ \mathfrak{Y} &= \frac{A^2 e\eta}{3\alpha}\,y'',\\ \mathfrak{Z} &= \frac{A^2 e\eta}{3\alpha}\,z'', \end{aligned}\right. \qquad \text{oder:} \qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \frac{e\eta x}{R^3}+\frac{A^2 e\eta}{2}\left[\frac{fx}{R^3}+\frac{2\alpha^2}{3}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{x'}{R^3}\right)\right],\\ \mathfrak{Y} &= \frac{e\eta y}{R^3}+\frac{A^2 e\eta}{2}\left[\frac{fy}{R^3}+\frac{2\alpha^2}{8}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{y'}{R^3}\right)\right],\\ \mathfrak{Z} &= \frac{e\eta z}{R^3}+\frac{A^2 e\eta}{2}\left[\frac{fz}{R^3}+\frac{2\alpha^2}{3}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{z'}{R^3}\right)\right], \end{aligned}\right.$$

jenachdem der Punkt $e$ *innerhalb* oder *ausserhalb* der Kugelfläche liegt; hier bezeichnet $f$ den Ausdruck:

$$f = \frac{\alpha^2}{R^2}\,(x'^2+y'^2+z'^2) - \left(1-\frac{3\alpha^2}{R^2}\right)R'^2 + \left(1-\frac{\alpha^2}{R^2}\right)2RR'',$$

falls man nämlich unter $R'$, $R''$ die Differentialquotienten von $R$ nach der Zeit versteht.

Man gelangt also, wie zuerst von *Helmholtz* bemerkt worden ist, für den Fall, dass der elektrische Massenpunkt $e$ im *Innern* der elektrischen Kugelfläche sich befindet, zu einem überraschend einfachen Resultat. *Denn alsdann sind die Componenten der von der Fläche auf den Punkt ausgeübten Kraft gleich den Beschleunigungen $x''$, $y''$, $z''$ des Punktes, dieselben noch multiplicirt mit einem constanten Factor.*

Bewegt sich der Punkt $e$ längs der (durch den Mittelpunkt der Kugelfläche gehenden) $x$ Axe, sind also $y$, $y'$, $y''$ und $z$, $z'$, $z''$ beständig *Null*, und $R^2 = x^2$, so nehmen die Formeln (12.) folgende Gestalt an:

$$(12'.)\quad \begin{cases} \mathfrak{X} = \frac{A^2 e\eta}{3\alpha}\, x'' , \\ \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0 , \end{cases} \qquad \text{oder:} \quad \begin{cases} \mathfrak{X} = \frac{e\eta}{x^2}\left[1 - \frac{A^2}{2}\left(1 - \frac{2\alpha^2}{x^2}\right) x'^2\right] \\ \qquad + \frac{A^2 e\eta x''}{x}\left(1 - \frac{2\alpha^2}{3x^2}\right), \\ \mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} = 0 , \end{cases}$$

jenachdem $e$ *innerhalb* oder *ausserhalb* der Kugelfläche liegt.

## § 3.

*Der von Helmholtz gegen das Weber'sche Gesetz erhobene Einwand.*

Die ponderable Masse $m$ sei beladen mit der positiven Elektricitätsmenge $e$, und zwar mag diese combinirte Masse $m + e$ ihrem Volumen nach als äusserst klein, als punktförmig angesehen werden. Mit $m + e$ in derselben Vertikalen und oberhalb $m + e$ befinde sich eine positiv-elektrische Masse $\eta$, ebenfalls punktförmig und in *fester* Aufstellung.

Die bewegliche Masse $m + e$ wird, falls sie zu Anfang in Ruhe war, unter dem Einfluss der Schwerkraft $mg$ und der von $\eta$ ausgehenden elektrischen Kraft beständig in derselben Vertikalen bleiben Benutzt man also ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt in $\eta$ liegt, und dessen $x$ Axe von $\eta$ aus vertikal nach unten geht, so erhält man für die Beschleunigung $x''$ der Masse $m + e$ die Differentialgleichung:

$$(13.)\qquad (m + m_e)\, x'' = \mathfrak{X} + mg ,$$

wo $m + m_e$ die Trägheitszahl der Masse $m + e$, und $\mathfrak{X}$ die von $\eta$ auf $m + e$ ausgeübte elektrische Kraft bezeichnet. Letztere hat nach dem *Weber*'schen Gesetz (pg. 86) den Werth:

$$\mathfrak{X} = \frac{e\eta}{r^2}\left(1 - \tfrac{1}{2}A^2 r'^2 + A^2 r r''\right).$$

Im gegenwärtigen Fall ist $r = \pm x$, jedenfalls also

$$r^2 = x^2 ,$$

woraus durch Differentiation folgt:

$$rr' = xx' , \qquad rr'' + r'^2 = xx'' + x'^2 ,$$

mithin:

$$r'^2 = x'^2 , \qquad rr'' = xx''.$$

Man findet also (einerlei ob $x$ positiv oder negativ ist):

$$\mathfrak{X} = \frac{e\eta}{x^2}\left(1 - \tfrac{1}{2}A^2 x'^2 + A^2 x x''\right) ,$$

und durch Substitution dieses Werthes in (13.):

$$(14.)\qquad \left(m + m_e - \frac{A^2 e\eta}{x}\right) x'' = e\eta \frac{1 - \frac{1}{2}A^2 x'^2}{x^2} + mg.$$

Die Beschleunigung $x''$ wird daher unendlich für:

$$x = \frac{A^2 e\eta}{m + m_e},$$

d. i. für die Entfernung:

$$(15.)\qquad x = \frac{2}{c^2} \frac{e\eta}{m + m_e}.$$

Doch scheint diese specielle Entfernung (weil $c = 59000$ Meilen ist) eine ausserordentlich kleine zu sein. Für ausserordentliche kleine Entfernungen bedarf aber wahrscheinlich das *Weber*'sche Gesetz einer gewissen Modification (pg. 87); so dass alsdann die Formel (14.) für ausserordentlich kleine Entfernungen überhaupt ungültig sein würde. In jenem absurden Resultat unendlicher Beschleunigung würde also nur ein neues Argument dafür zu erblicken sein, dass das *Weber*'sche Gesetz (ähnlich wie das *Newton*'sche) einer solchen Modification wirklich bedarf.

Hiegegen ist der Einwand zu erheben, dass die einwirkende Masse $\eta$, folglich auch jene kritische Entfernung $x$ *beliebig gross* gemacht werden kann, und zwar ohne zu aussergewöhnlichen elektrischen Dichtigkeiten zu greifen. Denkt man sich nämlich $\eta$ als die elektrische Oberflächenbelegung einer Kugel, deren Radius $\alpha$ ausserordentlich klein ist, so wird, falls man $\alpha$ vergrössert im Verhältniss von $1:n$, die elektrische Dichtigkeit aber ungeändert lässt, jene Belegung $\eta$ wachsen im Verhältniss von $1:n^2$, und in demselben Verhältniss also auch $x$ zunehmen [nach (15.)]. Bezeichnet man also diese neuen Werthe von $\alpha, \eta, x$ mit $\alpha_1, \eta_1, x_1$, so ist:

$$\alpha_1 = n\alpha, \qquad \eta_1 = n^2\eta, \qquad x_1 = n^2 x,$$

und folglich:

$$\frac{x_1}{\alpha_1} = n\frac{x}{\alpha}.$$

Wie klein also $x$ auch sein mag (selbst wenn $x < \alpha$ ist), immer wird man durch geeignete Wahl von $n$ nicht nur die absoluten Werthe von $x_1$ und $\alpha_1$, sondern auch das Verhältniss $\frac{x_1}{\alpha_1}$ *beliebig gross* machen können.

Durch Vergrösserung der kugelförmigen Masse $\eta$ kann also jene kritische Entfernung $x$, für welche die Formel (14.) eine unendlich

grosse Beschleunigung liefert, ***beliebig gross*** gemacht werden. Gleichzeitig wird dabei die jener Formel zu Grunde liegende Voraussetzung, dass die Masse $\eta$ ***punktförmig***, dass also $x$ sehr gross sei im Vergleich zum Radius $\alpha$ der Masse $\eta$, mit ***wachsender*** Genauigkeit erfüllt sein, — weil bei jenem Vergrösserungsprocess von $\eta$ nicht nur $x$, sondern auch $\frac{x}{\alpha}$ wächst.

Wir sehen also, dass die von einer elektrischen Kugelfläche dem Massenpunkt $m + e$ zuertheilte Beschleunigung ***unendlich gross*** ist, falls man nur dem Radius der Fläche und der Centraldistanz des Punktes geeignete Werthe giebt. Mit andern Worten: Wir sehen, dass ein gewisser Fall existirt, in welchem das von uns zu Grunde gelegte *Weber*'sche Gesetz zu einer wenig acceptablen Folgerung, nämlich zum Eintreten einer ***unendlich grossen*** Beschleunigung hinleitet.

Dieser von *Helmholtz* gegen das *Weber*'sche Gesetz erhobene Einwand kann durch den Hinweis auf eine Modification, deren das Gesetz für sehr kleine Entfernungen bedürfe, keineswegs beseitigt werden; denn jener Fall lässt sich so einrichten, dass nur ***grosse*** Entfernungen in Betracht kommen. Ebensowenig kann der Einwand etwa durch den Hinweis darauf entkräftet werden, dass die Elektricität nicht beliebig hohe Dichtigkeiten anzunehmen im Stande sei; denn jener Fall ist herstellbar ohne Ueberschreitung der gewöhnlichen Dichtigkeitsgrade.

Bedenklich aber erscheint bei jenem Einwande, dass der Radius der anzuwendenden Kugelfläche wahrscheinlich ein ungemein grosser sein wird. Von Interesse ist es daher, zu untersuchen, wie gross dieser Radius ***mindestens*** sein muss. Zu diesem Zweck sind die im vorhergehenden §. gefundenen Formeln (12.), (12'.) in Anwendung zu bringen.

$\eta$ (Rad. $= \alpha$)

$x$

$m + e$ (Rad. $= a$)

Ist $x$ die Entfernung des Punktes $m + e$ vom Mittelpunkt $\eta$ der Kugelfläche, und bezeichnet $\eta$ zugleich auch die Gesammtmasse der auf dieser Fläche vorhandenen Elektricität, ferner $\alpha$ ihren Radius, so erhält man für die von $\eta$ auf $m + e$ ausgeübte Kraft $\mathfrak{X}$ die in (12'.) aufgeführten Werthe; und durch Substitution dieser Werthe nimmt die Differentialgleichung

$$(16.) \qquad (m + m_e)\, x'' = \mathfrak{X} + mg\,,$$

jenachdem der Punkt $m+e$ *ausserhalb* oder *innerhalb* der Kugelfläche liegt, d. i. jenachdem $x > \alpha$ oder $x < \alpha$ ist, eine der folgenden beiden Gestalten an:

$$(17.a)\quad \left[m+m_{,}-\frac{A^2 e\eta}{x}\left(1-\frac{2\alpha^2}{3x^2}\right)\right]x'' = mg+\frac{e\eta}{x^2}\left[1-\frac{A^2}{2}\left(1-\frac{2\alpha^2}{x^2}\right)x'^2\right],\ (x>\alpha),$$

$$(17.i)\quad \left[m+m_{,}-\frac{A^2 e\eta}{3\alpha}\right]x'' = mg,\quad (x<\alpha),$$

Die Beschleunigung $x''$ wird also unendlich gross, sobald $\alpha$ und $x$ der Relation entsprechen:

$$(18.a)\quad m+m_{,} = \frac{A^2 e\eta}{x}\left(1-\frac{2\alpha^2}{3x^2}\right),$$

$$(18.i)\quad m+m_{,} = \frac{A^2 e\eta}{3\alpha}.$$

Diese Relation kann, weil $A^2 = \frac{2}{c^2}$ ist, auch so dargestellt werden:

$$(19.a)\quad m+m_{,} = \frac{2e\eta}{c^2\alpha}\frac{\alpha}{x}\left(1-\frac{2\alpha^2}{3x^2}\right),$$

$$(19.i)\quad m+m_{,} = \frac{2e\eta}{3c^2\alpha},$$

und folglich dargestellt werden durch die Formel:

$$(20.)\quad m+m_{,} = \frac{2N}{3}\frac{e\eta}{c^2\alpha},\quad \text{wo alsdann } N = \begin{cases} 3\frac{\alpha}{x}-2\left(\frac{\alpha}{x}\right)^3, & (x>\alpha), \\ 1, & (x<\alpha). \end{cases}$$

Um die Vorstellungen mehr zu fixiren, wollen wir uns den Massenpunkt $m+e$ als eine kleine Kugel vom Radius $a$ und von der ponderablen Masse $m$ denken, deren Oberfläche mit der Elektricitätsmenge $e$ gleichmässig belegt ist. Setzt man also $e = 4\pi a^2 E$, so bezeichnet $E$ die Dichtigkeit der Belegung.

Ebenso mag, in Betreff der grossen Kugel, $\eta = 4\pi\alpha^2 \mathrm{H}$ gesetzt werden. Alsdann geht die Formel (20.) über in:

$$(21.)\quad m+m_{,} = \frac{2N}{3}\frac{4\pi E\,.\,4\pi \mathrm{H}\,.\,a^2\alpha}{c^2};$$

und hieraus folgt durch Auflösung nach $\alpha$ sofort:

$$(22.)\quad \alpha = \frac{3}{2N}\frac{c^2(m+m_{,})}{a^2\,.\,4\pi E\,.\,4\pi \mathrm{H}}.$$

Wir wollen nun annehmen, die kleine Kugel mit den ihr zugehörigen Grössen $a$, $e$, $E$, $m$, $m_{,}$ sei *gegeben*. Die grosse Kugel mit den ihr zugehörigen Grössen $\alpha$, $\eta$, H, sowie auch die Entfernung $x$ solle so eingerichtet werden, dass der zur Entstehung einer unendlich grossen Beschleunigung erforderlichen Bedingung (22.) entsprochen wird. Wie gross muss alsdann der Radius $\alpha$ *mindestens* sein?

Um dieses Minimum von $\alpha$ zu erhalten, ist im Ausdruck (22.) die im Nenner befindliche Dichtigkeit H möglichst gross zu machen. Bezeichnet man also die *grösste* elektrische Dichtigkeit, welche überhaupt auf einer Kugelfläche hergestellt werden kann, mit $\Delta$, so ergiebt sich aus (22.):

(23.) $$\alpha > \frac{3}{2N} \frac{c^2(m+m_e)}{a^2 \cdot 4\pi E \cdot 4\pi\Delta} \, .$$

Die Kraft, welche die gegebene kleine Kugel ($a$, $e$, $E$) auf eine andere gleichgrosse Kugel in der Entfernung $r$ ausübt, besitzt, falls man letztere Kugel mit dem Maximum $\Delta$ der elektrischen Dichtigkeit geladen annimmt, den Werth: $\frac{4\pi a^2 E \cdot 4\pi a^2 \Delta}{r^2}$. Denkt man sich diese repulsive elektrische Kraft für den Specialfall $r = 2a$, d. i. für den Fall der *Berührung* der beiden Kugeln durch ein kleines Gewicht $m'g$ äquilibrirt, so wird:

(23. v) $$\frac{4\pi a^2 E \cdot 4\pi a^2 \Delta}{4a^2} = m'g \, ,$$

d. i.

(23. w) $$a^2 \cdot 4\pi E \cdot 4\pi\Delta = 4m'g \, ;$$

wodurch die Formel (23.) folgende Gestalt erhält:

(24.) $$\alpha > \frac{3}{2N} \frac{c^2(m+m_e)}{4m'g} \, ,$$

oder was dasselbe ist, folgende:

(25.) $$\alpha > \frac{1}{N} \frac{m+m_e}{m'} \frac{3c^2}{8g} \, .$$

Hier bedeutet $N$, nach (20.), eine *reine Zahl;* ebenso $\frac{m+m_e}{m'}$. Hingegen bezeichnet $\frac{3c^2}{8g}$, weil $c$, $g$ Längen sind, ebenfalls eine gewisse *Länge.*

Nach *Weber* ist $c > 59000$ Meilen; ferner ist $g < 30$ Fuss, d. i. $g < \frac{1}{800}$ Meilen. Somit folgt:

$$\frac{3c^2}{8g} > (1000)^4 \text{ Meilen;}$$

wodurch die Formel (25.) übergeht in:

(26.) $$\alpha > \frac{1}{N} \frac{m+m_e}{m'} (1000)^4 \text{ Meilen.}$$

Setzt man $\frac{\alpha}{x} = \vartheta$, so ist $N = 3\vartheta - 2\vartheta^3$, nach (20.). Das Maximum von $N$ tritt also ein für $\vartheta = \sqrt{\frac{1}{2}}$, und ist $\sqrt{2}$. Solches gilt für den Fall des *äussern* Punktes; während andererseits im Fall des *innern* Punktes $N = 1$ ist. Somit ergeben sich aus (26.) zur Bestimmung von $\alpha$, jenachdem der Punkt $m + e$ ausserhalb oder innerhalb der Kugelfläche liegen soll, folgende Formeln:

$$(27.a)\qquad \alpha > \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{m+m_e}{m'}\,(1000)^4 \text{ Meilen},$$

$$(27.i)\qquad \alpha > \frac{m+m_e}{m'}\,(1000)^4 \text{ Meilen}.$$

*Die Beschleunigung, welche eine gleichmässig mit Elektricität belegte Kugelfläche, zufolge des Weber'schen Gesetzes, einem gegebenen Massenpunkt $m + e$ zuertheilt, kann also* **unendlich** *werden, sowohl dann, wenn der Punkt ausserhalb, als auch dann, wenn derselbe innerhalb der Kugelfläche liegt; und zwar kann man solches (ohne aussergewöhnlich grosse elektrische Dichtigkeiten oder ungewöhnlich kleine Entfernungen anzuwenden) einfach dadurch erreichen, dass man den Radius $\alpha$ jener Kugelfläche hinlänglich gross macht.* Die erforderliche Grösse von $\alpha$ bestimmt sich durch die Formeln (27. a,i), bei denen, was die Definition des Massenverhältnisses

$$(28.)\qquad \frac{m+m_e}{m'}$$

betrifft, Folgendes zu merken ist.

Man denke sich den gegebenen Massenpunkt $m + e$ als eine kleine Kugel (oder Hohlkugel) von der ponderablen Masse $m$, an ihrer Oberfläche gleichmässig belegt mit der Elektricitätsmenge $e$, und bezeichne die Trägheitszahl von $e$ mit $m_e$, mithin diejenige der ganzen Kugel mit $m + m_e$. Diese letztere Zahl oder Masse bildet den *Zähler* jenes Bruches (28.).

Man bezeichne die *grösste* auf einer Kugelfläche überhaupt herstellbare elektrische Dichtigkeit mit $\Delta$, und denke sich eine mit der gegebenen Kugel $m + e$ gleichgrosse zweite Kugel, deren Oberfläche mit Elektricität von der Dichtigkeit $\Delta$ gleichmässig bedeckt ist. Endlich denke man sich die repulsive Kraft, welche diese beiden Kugeln im Fall ihrer gegenseitigen *Berührung* auf einander ausüben, äquilibrirt*)

---

*) Wenn wir die beiden Kugeln trotz ihrer grossen Nähe jede als gleichmässig elektrisirt uns denken, so geschieht das nur, um an Kürze des Ausdrucks zu gewinnen. Man kann nämlich die für das Gewicht $m'g$ gegebene Formel (23. v) offenbar auch so schreiben:

$$\frac{4\pi a^2 E \,.\, 4\pi a^2 \Delta}{(2pa)^2} = \frac{m'g}{p^2},$$

wo $p$ eine *beliebige* Zahl bedeutet. Statt also den Fall der *Berührung* zu nehmen, nämlich $p = 1$ zu setzen, können wir ebenso gut auch $p = 10$ wählen. Dann würde die Definition der Masse $m'$ dahin auszusprechen sein, dass $\frac{m'g}{100}$ dasjenige

durch ein kleines Gewicht $m'g$. Die so definirte Masse $m'$ ist der *Nenner* des Bruches (28.).

Von Interesse würde es sein zu wissen, wie weit dieser der kleinen Kugel (oder Hohlkugel) $m + e$ zugehörige Bruch (28.) durch passende Einrichtung derselben sich verringern lässt. Gesetzt sein Werth liesse sich bis auf $\frac{1}{1000}$ hinabdrücken, so würde, um jenen Fall einer *unendlichen* Beschleunigung zu realisiren, immer noch eine elektrische Kugelfläche erforderlich sein, deren Radius $\alpha$ (jenachdem ihre Wirkung nach Aussen oder nach Innen benutzt werden soll) grösser als $\frac{(1000)^3}{\sqrt{2}}$, oder grösser als $(1000)^3$ Meilen sein müsste.

Doch dürfte es schwierig sein, über den Minimalwerth des Bruches (28.) Genaueres angeben zu wollen. So lange das aber nicht geschehen ist, bleibt es zweifelhaft, ob jene der Bedingung (27. a, i) entsprechende elektrische Kugelfläche wirklich realisirbar ist.

## § 4.

*Fortsetzung. Ueber die Prüfung eines physikalischen Gesetzes durch Anwendung auf specielle Fälle.*

Wir wollen annehmen, es existire eine durch den ganzen Weltraum ausgebreitete Materie $M$, welche mit überall gleicher Dichtigkeit nach allen Seiten ins Unendliche reicht. Alsdann kann ein *beliebiger* Punkt als Mittelpunkt der Materie $M$, und eine um diesen Punkt mit unendlich grossem Radius beschriebene Kugelfläche als die äussere Grenze jener Materie angesehen werden.

Soll nun die Wirkung ermittelt werden, welche $M$ bei Zugrundelegung des *Newton*'schen Gesetzes auf einen gegebenen Massenpunkt $A$ ausübt, so markire man zunächst einen beliebig gewählten, von $A$ beliebig weit entfernten Punkt $C$, und betrachte diesen als jenen Mittelpunkt von $M$. Alsdann zerfällt $M$ durch eine um $C$ mit dem Radius $CA$ beschriebene Kugelfläche in eine innere Kugel und in eine äussere Kugelschaale. Die gesuchte von $M$ auf $A$ ausgeübte Wirkung reducirt sich daher (weil eine homogene Kugelschaale auf einen Punkt an ihrer inneren Begrenzungsfläche keine Kraft ausübt) auf

Gewicht vorstellen soll, welches nöthig ist um die repulsive elektrische Kraft der beiden Kugeln bei einer Centraldistanz von 10 Durchmessern zu äquilibriren.

diejenige, welche von der inneren Kugel herrührt. Folglich hat jene Wirkung die Richtung $AC$ und eine mit der Länge $AC$ proportionale Stärke. Der Punkt $C$ konnte aber willkührlich gewählt werden; und es hat daher die auf den gegebenen Punkt $A$ ausgeübte Wirkung *beliebige* Richtung und *beliebige* Stärke.

Nimmt man also an, das Meer der Sterne reiche nach allen Seiten ins Unendliche, und die mittlere Dichtigkeit dieses Meeres sei constant, so wird, bei Zugrundelegung des *Newton*'schen Gesetzes die von diesem Sternenmeer auf unsere Erdkugel ausgeübte Kraft völlig unbestimmt sein, nämlich jede beliebige Richtung und Stärke haben können. Das *Newton*'sche Gesetz führt also in dem vorausgesetzten Fall zu einem absurden Resultat, und ist daher auf diesen Fall nicht anwendbar.

Vielleicht könnte nun Jemand behaupten, ein physikalisches Gesetz müsse, wenn es allgemein gültig sein solle, anwendbar sein auf jeden überhaupt *denkbaren* Fall, das *Newton*'sche Gesetz aber entspreche (wie eben gezeigt) dieser Anforderung nicht, folglich sei das *Newton*'sche Gesetz *nicht* allgemein gültig. Einem solchen Räsonnement wird man schwerlich beipflichten; und demgemäss wird man also von einem physikalischen Gesetz nicht verlangen dürfen, dass es in allen *denkbaren*, sondern nur, dass es in allen solchen Fällen sich bewähre, deren *Wirklichkeit ausser Zweifel steht*. Mit andern Worten:

> *Als Controle eines noch hypothetischen physikalischen Gesetzes können nur solche Fälle benutzt werden, deren Wirklichkeit oder Realisirbarkeit nachgewiesen ist.**)

---

*) *Helmholtz* behauptet, dass man zur Prüfung irgend eines noch hypothetischen Gesetzes, welches mit der Prätension unumschränkter Gültigkeit auftrete, elektrische Materie von *beliebig grosser Dichtigkeit* anwenden dürfe, da gar kein allgemein geltender Grund ersichtlich sei, durch welchen der Grad der Dichtigkeit beschränkt werde (Borchardt's Journal, Bd. 75. pg. 53); sollte man indessen der elektrischen Materie ein gewisses Maximum der Dichtigkeit zuzuschreiben geneigt sein, mithin als Controle eines derartigen Gesetzes nur solche Objecte gelten lassen, deren elektrische Dichtigkeit ein gewisses Maass nicht überschreitet, so werde man seiner Ansicht nach doch wenigstens berechtigt sein, diesen Objecten die *denkbar grössten Dimensionen* zuzuertheilen (Borch. Journal, Bd. 75, pg. 45).

Ich muss gestehen, dass mir diese Ansicht wenig annehmbar erscheint. Denn wenn man in Betreff der elektrischen Dichtigkeit eine gewisse Beschränkung für geboten oder wenigstens für berechtigt hält, so geschieht dies doch offenbar nur desshalb, weil vielleicht uns noch unbekannte Gesetze existiren können, in Folge

Würde es doch auch in der That sehr sonderbar sein, zu einer solchen Controle Fälle anzuwenden, deren Möglichkeit durch Nichts indicirt, deren Eintreten vielleicht für immer inhibirt ist durch irgend welche uns noch völlig unbekannte Gesetze.

Der von *Helmholtz* gegen das *Weber*'sche Gesetz erhobene (im vorhergehenden §. besprochene) Einwand kann daher sehr wohl eine *ernstliche Bedeutung* haben. Jedoch wird man solches nicht früher mit *Bestimmtheit* zu behaupten im Stande sein, als bis die Realisirbarkeit*) jener elektrischen Kugelschaale, auf welche der Einwand sich stützt, wirklich dargethan ist.

## § 5.

*Fortsetzung. Ueber die Unvollständigkeit des Weber'schen Gesetzes.*

Bei den elektrischen Erscheinungen kommen dreierlei Wirkungen in Betracht, nämlich erstens die Wirkung der elektrischen Materie auf sich selber, zweitens diejenige, welche zwischen elektrischer und ponderabler Materie stattfindet, endlich drittens diejenige der ponderablen Materie auf sich selber; wobei zu bemerken ist, dass man von der letzten Wirkung abstrahiren darf, sobald die betreffenden ponderablen Massen als vollkommen starr vorausgesetzt werden. Ein Gesetz, welches *den letzten Grund der elektrischen Erscheinungen vollständig darzulegen beansprucht*, muss daher Rechenschaft geben über alle drei Wirkungen, oder, falls man auf starre ponderable Massen sich beschränkt, wenigstens über die erste und zweite. Das *Weber*'sche Gesetz hingegen bezieht sich nur auf die *erste* Wirkung, und kann daher einen solchen Anspruch *nicht* erheben. Das *Weber*'sche Gesetz ist also an und für sich ein *unvollständiges*, welches zu seiner Ergänzung irgend welcher accessorischen Annahmen bedarf.

---

deren gewisse sehr grosse elektrische Dichtigkeiten *unmöglich* sind. Existiren aber derartige Gesetze, so können ebenso gut auch andere, ebenfalls uns vorläufig unbekannte Gesetze existiren, denen zufolge Objecte von gewissen sehr grossen Dimensionen [z. B. Kugelschaalen von $(1000)^3$ Meilen Radius] *unmöglich* sind.

*) Günstiger für diesen Zweck (nämlich für den Nachweis der Realisirbarkeit) wird es wahrscheinlich sein, nicht *eine* elektrische Kugelschaale, sondern ein *System* concentrischer Schaalen anzuwenden.

Hiemit hängt zusammen, dass das *Weber*'sche Gesetz *für sich allein* wohl schwerlich irgend eine Folgerung geben dürfte, die mit der Erfahrung oder Beobachtung confrontirt werden kann. Denn will man jenes Gesetz benutzen, um etwa Auskunft zu erhalten über irgend eine ponderomotorische Wirkung, so bedarf es einer accessorischen Annahme über die Art und Weise, wie die auf die elektrische Materie ausgeübten Kräfte auf die ponderable Masse *sich übertragen;* und will man andererseits das Gesetz benutzen, um Auskunft zu erhalten über irgend eine elektromotorische Wirkung, so bedarf es einer accessorischen Annahme über den sogenannten elektrischen *Widerstand*, d. i. über die Art und Weise, in welcher die ponderable Masse auf die elektrische Materie einwirkt.

Gesetzt nun aber, man gelangt auf Grund des *Weber*'schen Gesetzes, verbunden mit einer solchen accessorischen Annahme, zu einem unbefriedigenden Resultat, z. B. zu irgend einem Widerspruch mit der Erfahrung, so wird es immer zweifelhaft sein, ob die Schuld dem *Weber*'schen Gesetze oder der accessorischen Annahme aufzubürden ist.

Das *Weber*'sche Gesetz dürfte daher, eben in Folge seiner Unvollständigkeit, ziemlich *unangreifbar* sein. So z. B. würde auch der von *Helmholtz* erhobene Angriff im günstigsten Fall (d. h. wenn die dabei benutzte elektrische Kugelschaale als realisirbar nachgewiesen ist) nicht das *Weber*'sche Gesetz, sondern gewisse Differentialgleichungen [(17. a, i), pg. 94] treffen, welche allerdings zum Theil auf dem *Weber*'schen Gesetz, zum andern Theil aber auf der accessorischen Annahme beruhen, dass die auf die Elektricität ausgeübten Kräfte auf die ponderable Masse sich unmittelbar übertragen. Sollte also jener Angriff als wirklich stichhaltig sich erweisen, so würde strenge genommen immer noch die Frage offen bleiben, ob derselbe vom *Weber'schen Gesetz* nicht vielleicht abzuwenden sei durch eine passende Abänderung jener *accessorischen Annahme.*

Uebrigens scheint *Helmholtz* (vgl. Borchardt's J. Bd. 75, pg. 45) hauptsächlich nur die Ansicht bekämpfen zu wollen, *dass das Weber'sche Gesetz ein wirklich elementares, ein solches sei, welches den letzten Grund der betreffenden Erscheinungen vollständig ausspreche.* Dass ich meinerseits diese von *Helmholtz* bekämpfte Ansicht ebenfalls für unzulässig halte, braucht wohl kaum bemerkt zu werden.

## § 6.

### *Das Princip der Erhaltung der Energie.*

Es sei gegeben ein System von unendlich vielen Massenpunkten, jeder von der Form $m + e$, d. h. jeder bestehend aus einer ponderablen Masse $m$, die unlöslich verbunden ist mit einer elektrischen Masse $e$. Zwischen je zwei Theilchen $m_0 + e_0$ und $m_1 + e_1$ werden im Allgemeinen zweierlei Kräfte in Thätigkeit sein, *eine* welche herrührt von der gegenseitigen Einwirkung zwischen $m_0$ und $m_1$, eine *andere*, welche entsteht durch die Wirkung zwischen $e_0$ und $e_1$. Die erstere wird zu bezeichnen sein als eine Kraft ordinären, die letztere als eine Kraft elektrischen Ursprungs. Ausser diesen *innern* Kräften mögen auch noch irgend welche *äussere* Kräfte auf das System einwirken. — Wir stellen uns die Aufgabe, diejenige Arbeit

(1.) $$(dS)_{\text{el. Us}}$$

zu berechnen, welche von den *innern Kräften elektrischen Ursprungs* während einer gegebenen Zeit $dt$ verrichtet wird, unter der Voraussetzung, dass diese Kräfte dem *Weber*'schen Gesetz entsprechen.

Sind $x_0, y_0, z_0$ und $x_1, y_1, z_1$ die Coordinaten der beiden Theilchen $m_0 + e_0$ *und* $m_1 + e_1$, und setzt man:

(2.) $$\begin{gathered} \xi = x_0 - x_1, \quad v = y_0 - y_1, \quad \zeta = z_0 - z_1, \quad r^2 = \xi^2 + v^2 + \zeta^2, \\ \varpi = 2A^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = 2A^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\xi' + \frac{\partial\psi}{\partial v}v' + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\zeta'\right)^2, \end{gathered}$$

so lassen sich die Componenten $\mathfrak{X}_0^1$, $\mathfrak{Y}_0^1$, $\mathfrak{Z}_0^1$ der von $m_1 + e_1$ auf $m_0 + e_0$ ausgeübten elektrischen Kraft nach dem *Weber*'schen Gesetz so darstellen [vgl. (6.), pg. 88]:

(3.) $$\begin{aligned} \mathfrak{X}_0^1 &= e_0 e_1 \left(-\frac{\partial(\varphi + \varpi)}{\partial\xi} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\varpi}{\partial\xi'}\right), \\ \mathfrak{Y}_0^1 &= e_0 e_1 \left(-\frac{\partial(\varphi + \varpi)}{\partial v} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\varpi}{\partial v'}\right), \\ \mathfrak{Z}_0^1 &= e_0 e_1 \left(-\frac{\partial(\varphi + \varpi)}{\partial\zeta} + \frac{d}{dt}\frac{\partial\varpi}{\partial\zeta'}\right). \end{aligned}$$

Sind $dx_0, dy_0, dz_0$ und $dx_1, dy_1, dz_1$ die Verschiebungen der beiden Theilchen $m_0 + e_0$ und $m_1 + e_1$ während der Zeit $dt$, so werden die von dem zweiten auf das erste und umgekehrt von dem ersten auf das zweite ausgeübten Arbeiten elektrischen Ursprungs die Werthe haben:

(4.) $$\begin{aligned} (dS_0^1)_{\text{el. Us}} &= \mathfrak{X}_0^1\, dx_0 + \mathfrak{Y}_0^1\, dy_0 + \mathfrak{Z}_0^1\, dz_0 \,, \\ (dS_1^0)_{\text{el. Us}} &= -(\mathfrak{X}_0^1\, dx_1 + \mathfrak{Y}_0^1\, dy_1 + \mathfrak{Z}_0^1\, dz_1)\,; \end{aligned}$$

hieraus folgt durch Addition und mit Rücksicht auf (2.):

(5.) $$(dS_0^1 + dS_1^0)_{\text{el. Us}} = \mathfrak{X}_0^1 d\xi + \mathfrak{Y}_0^1 dv + \mathfrak{Z}_0^1 d\zeta\,, \\ = (\mathfrak{X}_0^1 \xi' + \mathfrak{Y}_0^1 v' + \mathfrak{Z}_0^1 \zeta')\, dt\,.$$

Substituirt man die Werthe (3.), so folgt:

(6.) $$(dS_0^1 + dS_1^0)_{\text{el. Us}} = e_0 e_1 \left(\Pi - \frac{d\varphi}{dt}\right) dt\,;$$

hier hat $\Pi$ die Bedeutung:

$$\Pi = \left(\xi' \frac{d}{dt} \frac{\partial \varpi}{\partial \xi'} + \ldots\right) - \left(\xi' \frac{\partial \varpi}{\partial \xi} + \ldots\right),$$

und kann daher auch so geschrieben werden:

$$\Pi = \frac{d}{dt}\left(\xi' \frac{\partial \varpi}{\partial \xi'} + \ldots\right) - \left(\xi'' \frac{\partial \varpi}{\partial \xi'} + \ldots\right) - \left(\xi' \frac{\partial \varpi}{\partial \xi} + \ldots\right),$$

oder mit Rücksicht auf (2.) auch so:

$$\Pi = \frac{d}{dt}(2\varpi) - \frac{d\varpi}{dt} = \frac{d\varpi}{dt}\,.$$

Somit folgt:

(7.) $$(dS_0^1 + dS_1^0)_{\text{el. Us}} = e_0 e_1 (d\varpi - d\varphi)\,, \\ = d\,[e_0 e_1 (\varpi - \varphi)]\,.$$

Summirt man diese Formel über alle Theilchenpaare des gegebenen Systems, so erhält man für die gesuchte Arbeit (1.) den Werth:

(8.) $$(dS)_{\text{el. Us}} = d\,(P - U)\,,$$

wo $U$ und $P$ die Potentiale des Systems auf sich selber vorstellen*):

(9.) $$U = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\,(e_0 e_1 \varphi)\,, \\ P = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma\,(e_0 e_1 \varpi)\,.$$

Wir gelangen daher zu folgendem Satz:

(10.) *Diejenige Arbeit, welche in dem System von den innern Kräften elektrischen Ursprungs während eines Zeitelementes $dt$ verrichtet wird, ist ein vollständiges Differential, nämlich $= d\,(P - U)$, wo $U$ das elektrostatische und $P$ das elektrodynamische Potential des Systemes auf sich selber bezeichnet.*

Somit ergiebt sich also, dass das in Betreff jener Kräfte zu Grunde gelegte *Weber*'sche Gesetz in vollem Einklang steht mit dem allgemeinen Princip oder Axiom der Energie.

---

*) In diesen Formeln (9.) sind die Summationen so ausgeführt zu denken, dass $e_0$ alle Theilchen des ganzen Systems durchläuft, desgleichen $e_1$. Demgemäss wird jedes gegebene Paar $e_0$, $e_1$ *doppelt* vorkommen im Ausdruck $\Sigma\Sigma$, hingegen nur *einmal* enthalten sein im Ausdruck $\frac{1}{2}\Sigma\Sigma$.

Bezeichnet $T$ die lebendige Kraft des Systemes, so wird bekanntlich der Zuwachs $dT$, den dieses $T$ während irgend eines Zeitelementes erfährt, gleich sein der Summe sämmtlicher Arbeiten, die während des Zeitelementes von den einwirkenden Kräften verrichtet sind. Die genannte Summe von Arbeiten reducirt sich aber, falls keine andern Kräfte als die von uns vorausgesetzten inneren elektrischen Kräfte vorhanden sind, auf die in (8.) berechnete Arbeit $(dS)_{\text{el. Us}}$; so dass man in diesem Falle also erhält:

$$dT = (dS)_{\text{el. Us}},$$

d. i.

$$dT = d(P - U);$$

woraus sofort folgt:

(11.) $$T + U - P = \text{Const.}$$

Wir gelangen daher zu folgendem Satz:

(12.) *Wirken auf ein System materieller Punkte keine äussern Kräfte ein, und entsprechen die darin vorhandenen innern Kräfte dem Weber'schen Gesetz, so wird die lebendige Kraft des Systems, vermehrt um das statische und vermindert um das dynamische Potential, während der Bewegung des Systems constant bleiben.*

Fast genau in derselben Form habe ich diesen Satz bereits im Jahre 1868 ausgesprochen.*)

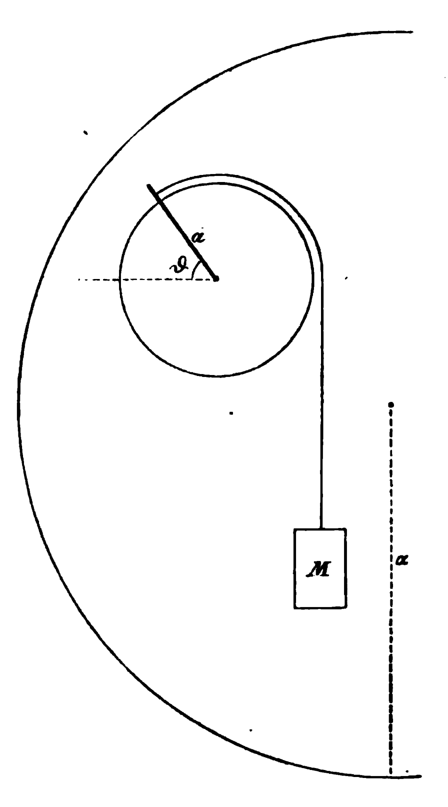
## § 7.

### *Anwendung des Princips der Energie auf einen speciellen Fall.*

Es sei gegeben eine gleichmässig mit Elektricität belegte und fest aufgestellte Kugelschaale (vom Radius $\alpha$). Im Innern dieser Schaale befinde sich ein mit Elektricität belegter oder von Elektricität durchdrungener Cylinder (vom Radius $a$), welcher drehbar ist um seine fest aufgestellte horizontale Axe.**) Auf diesen Cylinder sei ein Faden aufgewickelt, und das freie Ende dieses Fadens mit einem

*) Nämlich in einem Programm der Tübinger Universität (betitelt die Principien der Elektrodynamik, Juli, 1868.), daselbst pg. 37. Der einzige Unterschied besteht darin, dass ich das *dynamische* Potential damals etwas anders, nämlich *motorisches* Potential nannte.

**) Selbstverständlich soll diese Drehungsaxe zusammenfallen mit der *geometrischen* Axe des Cylinders.




Gewicht $Mg$ beschwert. — Es soll die Bewegung, welche der Cylinder unter der Einwirkung der elektrischen Kugelschaale einerseits und unter der Einwirkung des Gewichts $Mg$ andererseits annehmen wird, näher untersucht werden.

Dabei soll vorausgesetzt sein, dass der Cylinder mit der in ihm vorhandenen elektrischen Materie *starr* und *unlöslich* verbunden sei, und dass Gleiches auch stattfinde bei der Kugelschaale.

Bezeichnet man mit $D\omega$ ein Element der Kugelfläche, mit H die Dichtigkeit ihrer elektrischen Belegung, also mit $e\iint\varphi \mathrm{H} D\omega$ und $e\iint\varpi \mathrm{H} D\omega$ die von der Fläche auf irgend einen elektrischen Massenpunkt $e$ $(x, y, z)$ ausgeübten Potentiale; so ist, falls $e$ *innerhalb* der Fläche liegt:

$$e\iint\varphi \mathrm{H} D\omega = \frac{e\eta}{\alpha}\,,$$
$$e\iint\varpi \mathrm{H} D\omega = \frac{A^2 e\eta}{6\alpha}\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)\,,$$

wo $\alpha$ den Radius der Kugelfläche und $\eta = \iint \mathrm{H} D\omega$ die Gesammtmasse ihrer Belegung vorstellt. Diese schon früher [vergl. (8.), (11.) pg. 89, 90] abgeleiteten Formeln können, weil $\eta = 4\pi\alpha^2\mathrm{H}$ ist, auch so geschrieben werden:

$$(13.)\qquad \begin{aligned} e\iint\varphi \mathrm{H} D\omega &= 4\pi\alpha \mathrm{H} e\,,\\ e\iint\varpi \mathrm{H} D\omega &= A^2\,.\,\tfrac{2}{3}\pi\alpha \mathrm{H} e\,(x'^2 + y'^2 + z'^2)\,. \end{aligned}$$

Versteht man nun unter $e$ irgend ein im Cylinder befindliches Theilchen, unter $r$ den Abstand dieses Theilchens von der Drehungsaxe, und unter $\vartheta$ den Drehungswinkel des Cylinders, so ist offenbar

$$e\,(x'^2 + y'^2 + z'^2) = er^2\vartheta'^2\,.$$

Somit erhält man für die von der elektrischen Kugelschaale auf den Cylinder ausgeübten Potentiale $U_{kc}$ und $P_{kc}$ folgende Werthe:

$$(14.)\qquad \begin{aligned} U_{kc} &= 4\pi\alpha \mathrm{H}(\Sigma e)\,,\\ P_{kc} &= A^2\,.\,\tfrac{2}{3}\pi\alpha \mathrm{H}\,(\Sigma er^2)\,\vartheta'^2\,, \end{aligned}$$

wo $\Sigma e$ und $\Sigma er^2$ ausgedehnt zu denken sind über sämmtliche Elektricitätstheilchen des Cylinders.

Bezeichnet man nun das aus Kugelschaale und Cylinder bestehende System mit $(k, c)$, und die Potentiale dieses Systems *auf sich selber* mit $U$ und $P$, so ist bekanntlich:

$$(15.)\qquad \begin{aligned} U &= U_{kc} + U_k + U_c\,, \\ P &= P_{kc} + P_k + P_c\,, \end{aligned}$$

wo $U_k$, $P_k$ die Potentiale der Kugelschaale auf sich selber, und ebenso $U_c$, $P_c$ diejenigen des Cylinders auf sich selbst vorstellen. Da nach unserer Voraussetzung die elektrischen Theilchen $e$ mit dem Cylinder *fest* verbunden sind, so haben die Potentiale $U_c$, $P_c$ *constante* Werthe. Analoges gilt von $U_k$, $P_k$. Somit folgt aus (14.) und (15.):

$$(16.)\qquad \begin{aligned} U &= 4\pi\alpha \mathrm{H}(\Sigma e) + \text{Const.}, \\ P &= A^2 \,.\, \tfrac{4}{3}\pi\alpha \mathrm{H}(\Sigma er^2)\, \vartheta'^2 + \text{Const.} \end{aligned}$$

Solches vorausgeschickt, wollen wir nun die Differentialgleichung bilden für die Bewegung des Cylinders. Die lebendige Kraft $T$ des gegebenen Systems $(k, c, M)$ hat, weil die Kugelschaale $k$ unbeweglich ist, den Werth:

$$(17.)\qquad T = \frac{Ma^2 + \mathfrak{M}}{2}\, \vartheta'^2\,,$$

wo $\mathfrak{M}$ das Trägheitsmoment des Cylinders bezeichnet. Der Zuwachs $dT$, den diese lebendige Kraft während eines Zeitelementes $dt$ erfährt, ist gleich der von sämmtlichen Kräften während der Zeit $dt$ verrichteten Arbeit. Die in Betracht kommenden Kräfte sind aber theils die im Systeme $(k, c)$ vorhandenen elektrischen Kräfte, theils die auf $M$ einwirkende Schwerkraft. Die Arbeit der erstern Kräfte hat nach (10.) den Werth

$$d(P - U)\;;$$

während die Arbeit der Schwerkraft sich darstellt durch

$$Mgad\vartheta\,.$$

Somit folgt:

$$(18.)\qquad dT = d(P - U) + Mgad\vartheta\,,$$

oder was dasselbe ist:

$$(19.)\qquad T = P - U + Mga\vartheta + \text{Const.}$$

Substituirt man hier die Werthe (16.), (17.), so entsteht:

(20.) $$\frac{Ma^2 + \mathfrak{M}}{2}\vartheta'^2 = A^2 \tfrac{4}{3}\pi\alpha\mathrm{H}(\Sigma er^2)\vartheta'^2 + Mga\vartheta + \text{Const.}\,;$$

denn es ist zu beachten, dass H und $\Sigma e$, also auch $U$ (16.) constant sind.

Man erhält also schliesslich:

(21.) $$L\vartheta'^2 = Mga\vartheta + \text{Const.}\,,$$

oder, falls man nach $t$ differenzirt:

(22.) $$2L\vartheta'' = Mga\,,$$

wo die Constante $L$ folgenden Werth hat:

(23.) $$L = \frac{Ma^2 + \mathfrak{M}}{2} - \frac{4\pi\alpha\mathrm{H}(\Sigma er^2)}{3c^2}\,;$$

denn es ist zu beachten, dass $A^2 = \frac{2}{c^2}$.

Ist die Constante $L =$ pos., so wird das angehängte Gewicht $Mg$ mit beschleunigter Geschwindigkeit *sinken*, zufolge (22.). Ist $L = 0$, so entsteht eine *unendlich grosse* Beschleunigung. Ist endlich $L =$ neg., so wird jenes Gewicht mit beschleunigter Geschwindigkeit *gehoben* werden. In diesem letztern Fall könnte, falls man den Faden unendlich lang annimmt, das Gewicht unendlich hoch emporgehoben, also unendlich grosse Arbeit geleistet werden.

Untersucht man aber, ob die Fälle $L = 0$ und $L =$ neg. wirklich eintreten können, so stösst man auf dieselben Schwierigkeiten wie früher bei einer ähnlichen Betrachtung (§ 3, pg. 97.).

## § 8.

*Reduction des Weber'schen Gesetzes auf ein gewisses Potential, durch Anwendung des Hamilton'schen Princips.*

Das *Hamilton*'sche Princip findet bekanntlich seinen Ausdruck in der Formel:

(1.) $$\delta\int[(\text{Leb. Kraft}) - (\text{Potential})]\,dt = 0\,,$$

wo die Integration sich erstreckt über einen beliebig zu wählenden Zeitraum, und wo $\delta$ die *innere Variation*, nämlich eine Variation bezeichnet, welche nicht die Grenzen, sondern nur das Innere jenes Zeitraumes betrifft.

Es fragt sich, ob das *Weber*'sche Gesetz diesem *Hamilton*'schen Princip subordinirt werden kann. Mit andern Worten: Es fragt sich ob das Potential in der Formel (1.) so *definirt* werden kann, dass

die aus der Formel resultirenden Differentialgleichungen identisch sind mit denen, die aus dem *Weber*'schen Gesetz sich ergeben.

Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir den Fall von nur zwei Punkten $m + e$ und $\mu + \eta$. Bezeichnen wir die Trägheitszahlen dieser Punkte mit $m + m_e$ und $\mu + \mu_\eta$, ferner ihre Coordinaten mit $x$, $y$, $z$ und $\xi$, $v$, $\zeta$, und endlich das noch zu ermittelnde Potential mit $w$, so nimmt die Formel (1.) folgende Gestalt an:

$$(2.)\qquad \delta\int\left(\frac{(m+m_e)(x'^2+y'^2+z'^2)}{2} + \frac{(\mu+\mu_\eta)(\xi'^2+v'^2+\zeta'^2)}{2} - w\right)dt = 0\,.$$

Denken wir uns nun das Potential $w$ als eine noch unbekannte Function von $x$, $y$, $z$, $x'$, $y'$, $z'$ und $\xi$, $v$, $\zeta$, $\xi'$, $v'$ $\zeta'$, so ergeben sich aus (2.), durch Ausführung der Variation $\delta$ im Ganzen 6 Differentialgleichungen, von denen die 3 ersten so lauten:

$$(3.)\qquad \begin{aligned}(m + m_e)\,x'' &= -\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial x'}\,,\\ (m + m_e)\,y'' &= -\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial y'}\,,\\ (m + m_e)\,z'' &= -\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{d}{dt}\frac{\partial w}{\partial z'}\,;\end{aligned}$$

während die 3 andern von analoger Gestalt sind.

Andererseits sind die bei Zugrundelegung des *Weber*'schen Gesetzes sich ergebenden Differentialgleichungen zufolge unserer früheren Untersuchungen [vergl. (6.), pg. 88] folgende:

$$(4.)\qquad \begin{aligned}(m + m_e)\,x'' &= e\eta\left(-\frac{\partial(\varphi+\varpi)}{\partial x} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \varpi}{\partial x'}\right),\\ (m + m_e)\,y'' &= e\eta\left(-\frac{\partial(\varphi+\varpi)}{\partial y} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \varpi}{\partial y'}\right),\\ (m + m_e)\,z'' &= e\eta\left(-\frac{\partial(\varphi+\varpi)}{\partial z} + \frac{d}{dt}\frac{\partial \varpi}{\partial z'}\right);\end{aligned}$$

wo in der letzten Colonne statt $\varpi$ auch $(\varphi + \varpi)$ gesetzt werden darf, weil $\varphi$ von $x'$, $y'$, $z'$ unabhängig ist.

Die aus dem *Hamilton*'schen Princip entspringenden Differentialgleichungen (3.) werden also mit den aus dem *Weber*'schen Gesetz sich ergebenden Differentialgleichungen (4.) identisch sein, sobald man für $w$ den Werth nimmt:

$$(5.\text{a})\qquad w = e\eta\,(\varphi + \varpi),$$

d. i.

$$(5.\text{b})\qquad w = e\eta\left[\varphi + 2A^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right] = e\eta\left[\varphi + \frac{4}{c^2}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right];$$

einen Werth, welcher für den Fall *beträchtlicher* Entfernungen übergeht in:

(5.c) $$w = e\eta\left[\frac{1}{r} + \frac{A^2}{2r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] = e\eta\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{c^2 r}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

Wir können also sagen:

(6.) *Bei Zugrundelegung des Hamilton'schen Princips ist die Annahme des Weber'schen Gesetzes äquivalent mit der Annahme eines gewissen Potentials. Dabei ist es einerlei ob man diesem Potential den Werth:*

$$w = e\eta\left[\varphi + \frac{4}{c^2}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right],$$

*oder den allgemeineren Werth:*

$$w = e\eta\left[\varphi + \frac{4}{c^2}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right] + e\eta\frac{d\lambda}{dt}$$

*zuertheilt, wo $\lambda$ eine willkührliche Function von $r, r', r'', \ldots$ sein kann.*

Die Zufügung des Gliedes $e\eta\frac{d\lambda}{dt}$ bringt nämlich in der Formel (2.) des *Hamilton*'schen Princips nicht die mindeste Aenderung hervor. Denn setzt man in dem Integral $\int[(\text{Leb. Kraft}) - w]\,dt$ für $w$ successive zwei Werthe von der Form:

$$w = e\eta f,$$
$$w = e\eta f + e\eta\frac{d\lambda}{dt},$$

so werden die correspondirenden Werthe des Integrals durch $e\eta\int\frac{d\lambda}{dt}dt$, d. i. durch $e\eta\,(\lambda_2 - \lambda_1)$ von einander abweichen, wo $\lambda_1$ und $\lambda_2$ die Werthe von $\lambda$ an den beiden *Grenzen* des Integrals vorstellen. Unterwirft man also das Integral der durch $\delta$ angedeuteten *inneren* Variation, so wird man in beiden Fällen zu demselben Resultat gelangen.

Die in (6.) angegebene Reduction des *Weber*'schen Gesetzes auf ein gewisses Potential ist von mir im Jahre 1865 ausgeführt, und 1868 publicirt worden (Programm der Tübinger Universität vom Jahre 1868, pg. 2 und pg. 24—28).

## §. 9.

*Fortsetzung. Reduction des erhaltenen Potentials auf ein einfacheres, durch Annahme einer zeitlichen Transmission.*

Es soll gezeigt werden, dass das für die beiden elektrischen Massenpunkte $e$ und $\eta$ so eben erhaltene Potential $w$ (5. a, b, c) ersetzt werden kann durch das einfachere Potential

(7.) $\varepsilon\eta\varphi$ oder $\varepsilon\eta\varphi(r)$ ,

sobald man annimmt, dass dieses letztere ein *Bewegungsantrieb* oder ein *Befehl* sei, der von dem einen Punkte gegeben und emittirt, von dem andern recipirt und befolgt wird, und ferner annimmt, dass dieser Befehl einer gewissen Zeit bedürfe, um vom Orte der Emission hinzugelangen zum Orte der Reception.

Versteht man unter $r_0$ die Entfernung der beiden Punkte von einander zur Zeit $t_0$, so sind die Vorstellungen, von denen wir ausgehen wollen, folgende: Im Augenblick $t_0$ wird von dem einen Punkt ein gewisser Befehl gegeben, und zwar gegeben mit Rücksicht auf die *augenblicklichen* Verhältnisse, d. i. mit Rücksicht auf die *augenblickliche* Entfernung $r_0$; demgemäss lautet der Befehl:

(8.) $\varepsilon\eta\varphi(r_0)$ .

Gegeben und emittirt zur Zeit $t_0$, durchläuft dieser Befehl den Raum zwischen beiden Punkten, ohne unterwegs irgend welche Aenderung zu erleiden; er wird daher, weil zur Durchlaufung jenes Zwischenraumes eine gewisse Zeit erforderlich ist, von dem gehorchenden Punkte recipirt und befolgt werden nicht zur Zeit $t_0$, sondern zu einer etwas *spätern* Zeit $t$, also zu einer Zeit, wo die gegenseitige Entfernung der beiden Punkte nicht mehr den Werth $r_0$, sondern bereits einen etwas *andern* Werth $r$ besitzt.

Der Befehl oder Potentialwerth (8.) kann demgemäss einerseits bezeichnet werden als das der Zeit $t_0$ entsprechende *emissive* Potential, und andererseits auch bezeichnet werden als das der Zeit $t$ entsprechende *receptive* Potential. Zur Zeit $t_0$ wird der Befehl gegeben, zur Zeit $t$ tritt er in Kraft.

Die Zwischenzeit $t - t_0$ ist diejenige, deren der Befehl bedarf, um den Raum zwischen beiden Punkten zu durchlaufen. In Betreff dieser Durchlaufung wollen wir diejenige Vorstellung zu Grunde legen, welche sich als die *einfachste* darbietet, nämlich annehmen, dass der Befehl mit der constanten Geschwindigkeit $c$ vorwärts schreitet auf demjenigen Radiusvector, dessen Anfangspunkt der befehlende, und dessen Endpunkt der gehorchende Punkt ist. Die mit $c$ benannte Geschwindigkeit bezieht sich also auf eine *relative* Bewegung; denn der Radiusvector, auf welchem der Befehl entlang geht, befindet sich *selber* in Bewegung, fortgetragen durch die auf irgend welchen Bahnen dahinlaufenden Punkte.

Der zur Zeit $t$ vom gehorchenden Punkt recipirte Befehl (8.) hat nun offenbar diejenige Radiusvector-Länge zu durchlaufen gehabt. welche vorhanden ist im Augenblick seiner *Reception*, also zu durchlaufen gehabt die zur Zeit $t$ vorhandene Radiusvector-Länge $r$. Die hiezu erforderliche Zeit ist aber $\frac{r}{c}$; folglich:

$$(9.) \qquad t - t_0 = \frac{r}{c}.$$

Bezeichnen wir den *zur Zeit t recipirten und zur selben Zeit in Kraft tretenden Potentialwerth* (8.) kurzweg mit $w$, so haben wir also folgende Formeln:

$$(10.) \qquad w = e\eta\varphi(r_0), \qquad t - t_0 = \frac{r}{c};$$

Diese Formeln aber nehmen, falls wir $t_0 = t - \Delta t$ und $r_0 = r - \Delta r$ setzen, folgende Gestalt an:

$$(11.) \qquad w = e\eta\varphi(r - \Delta r), \qquad \Delta t = \frac{r}{c}.$$

Es handelt sich nun um eine nähere Bestimmung des Werthes $w$.

Setzt man

$$r = f(t),$$

so repräsentirt $f$ eine Function, die ebenso unbekannt ist, wie überhaupt die Bewegung der beiden Punkte. Jedenfalls wird dann aber auch zu setzen sein:

$$r - \Delta r = f(t - \Delta t),$$

oder was dasselbe ist:

$$r - \Delta r = f(t) - \frac{\Delta t}{1} f'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{1.2} f''(t) - + \dots$$

Diese letzte Formel nimmt mit Hülfe der aus $r = f(t)$ entspringenden Relationen

$$r' = f'(t), \qquad r'' = f''(t), \qquad r''' = f'''(t), \dots\dots$$

folgende Gestalt an:

$$r - \Delta r = r - \frac{\Delta t \,.\, r'}{1} + \frac{(\Delta t)^2 \,.\, r''}{1.2} - + \dots,$$

oder mit Rücksicht auf (11.) folgende:

$$(12.) \qquad r - \Delta r = r - \frac{rr'}{c} + \frac{r^2 r''}{2c^2} - + \dots.$$

Dieser Werth von $r - \Delta r$ ist in dem Ausdruck $w$ (11.) zu substituiren. Vorher indessen sei bemerkt, dass jener Ausdruck so dargestellt werden kann:

$$(13.) \qquad w = e\eta \left[\varphi - \frac{\Delta r}{1} \frac{d\varphi}{dr} + \frac{(\Delta r)^2}{1.2} \frac{d^2\varphi}{dr^2} - + \dots\right],$$

wo $\varphi$ für $\varphi(r)$ steht. Substituirt man hier nun den aus (12.) ent-

springenden Werth von $\Delta r$, und *vernachlässigt die dritte Potenz von* $\frac{r}{c}$, so folgt:

(14.) $$w = e\eta\left[\varphi + \left(\frac{r^2 r''}{2c^2} - \frac{rr'}{c}\right)\frac{d\varphi}{dr} + \frac{r^2 r'^2}{2c^2}\frac{d^2\varphi}{dr^2}\right],$$

oder nach leichter Umgestaltung:

(15.) $$w = e\eta\left[\varphi - \frac{rr'^2}{c^2}\frac{d\varphi}{dr}\right] + e\eta\frac{d}{dt}\left[\frac{(\int\varphi dr) - r\varphi}{c} + \frac{r^2 r'}{2c^2}\frac{d\varphi}{dr}\right];$$

wofür einfacher geschrieben werden mag:

(16.) $$w = e\eta\left[\varphi - \frac{r}{c^2}\frac{d\varphi}{dr}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right] + e\eta\frac{d\lambda}{dt}.$$

Soll nun dieser zur Zeit $t$ in Kraft tretende Potentialwerth $w$ die verlangte Form (6.) besitzen, so muss zwischen $\varphi$ und $\psi$ die Relation stattfinden:

(17.) $$r\frac{d\varphi}{dr} + 4\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 = 0.$$

Diese Relation aber ist wenigstens für *beträchtliche* Entfernungen in der That erfüllt; denn für solche ist $\varphi = \frac{1}{r}$ und $\psi = \sqrt{r}$. Mit andern Worten: Sie ist so weit erfüllt, als unsere Kenntniss über die Functionen $\varphi$, $\psi$ überhaupt reicht. Wir gelangen also zu folgendem Resultat:

*Die complicirte Form des gefundenen Potentials* (6.):

(18.) $$w = e\eta\left[\varphi + \frac{4}{c^2}\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right] + e\eta\frac{d\lambda}{dt}$$

*kann durch die Annahme erklärt werden, dass das Potential zu seiner Transmission vom einen Punkte zum andern einer gewissen Zeit bedürfe. Durch diese Annahme reducirt sich nämlich jenes Potential auf:*

(19.) $$e\eta\varphi,$$

*d. i. auf das gewöhnliche statische Potential.*

*Dabei ist vorausgesetzt, dass die Weber'sche Constante c* (deren Werth über 59000 Meilen beträgt) *zugleich die Geschwindigkeit der genannten Transmission repräsentirt; ferner vorausgesetzt, dass r klein gegen c bleibt, und dass also die dritte Potenz von* $\frac{r}{c}$ *vernachlässigt werden darf; endlich vorausgesetzt, dass die zwischen den Functionen* $\varphi$ *und* $\psi$ *für beträchtliche Entfernungen stattfindende Relation*

(20.) $$r\frac{d\varphi}{dr} + 4\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 = 0$$

*auch noch erfüllt sei für äusserst kleine Entfernungen.*

Die hier über dies Potential gemachten Suppositionen zeigen den Gesetzen des Lichtes gegenüber eine überaus grosse Verschiedenheit. So fallen z. B., was die Emission, Transmission und Reception betrifft, unmittelbar folgende Differenzen ins Auge: Das von einem leuchtenden Körper emittirte Licht ist unabhängig von dem beleuchteten Körper; hingegen ist das in irgend einem Augenblick von einem anziehenden Punkt emittirte Potential *in strictester Weise abhängig von der augenblicklichen Lage des angezogenen Punktes;* es ist dasselbe nämlich $= e\eta\varphi(r)$, respective $= \frac{e\eta}{r}$, wo $r$ die augenblickliche Entfernung bedeutet. Ferner: Das von dem leuchtenden Körper in einem gegebenen Zeitaugenblick emittirte Licht verliert an Intensität, je weiter es sich vom Körper entfernt; das emittirte Potential hingegen läuft *ohne irgend welche Abänderung seines ursprünglichen Werthes* bis zum angezogenen Punkt. Endlich: Das von dem beleuchteten Körper recipirte (d. i. absorbirte) Licht ist im Allgemeinen ein Bruchtheil des auffallenden Lichtes; hingegen ist das von dem angezogenen Punkt recipirte Potential *identisch* (d. i. *gleichwerthig*) mit dem ankommenden Potential.

Die Gesetze, nach denen das Potential von einem Punkt zum andern transmittirt wird, sind also, zufolge der hier gemachten Suppositionen, von den entsprechenden Gesetzen des Lichtes so ausserordentlich verschieden, dass von einer Aehnlichkeit kaum die Rede sein kann. Wenigstens wäre nur *ein einziger* Umstand geltend zu machen, in Bezug auf welchen eine Art Aehnlichkeit stattfindet. Dieser besteht darin, dass Licht wie Potential mit einer *sehr grossen constanten Geschwindigkeit* sich fortpflanzen; und auch diese Aehnlichkeit ist keine vollkommene; denn jene constante Geschwindigkeit besitzt für Potential und Licht verschiedene Werthe, und bezieht sich beim Licht auf eine absolute, beim Potential aber auf eine relative Bewegung.

Ich habe mich im gegenwärtigen §. bemüht, dasjenige einigermassen anschaulich zusammenzustellen, was früher schon bruchstückweise von mir veröffentlicht worden ist, theils in dem erwähnten Tübinger Programm von 1868, theils (als Erwiederung auf einen von *Clausius* erhobenen Einwand) in den Mathematischen Annalen Bd. I, pg. 317.

## § 10.

*Recapitulation. Bemerkung über die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes.*

Aus den angestellten Betrachtungen folgt, dass das *Weber*'sche Gesetz abgeleitet werden kann aus der Annahme eines gewöhnlichen ***nur von der Entfernung*** abhängenden Potentiales, unter Voraussetzung einer gewissen ***nichtmomentanen Transmission*** und unter Voraussetzung des ***Hamilton'schen Princips***. In der That haben wir gezeigt, dass das *Weber*'sche Gesetz

(21.) $$\mathfrak{R} = e\eta\left[-\frac{d\varphi}{dr} + \frac{8}{c^2}\frac{d\psi}{dr}\frac{d^2\psi}{dr^2}\right],$$

reducirt werden kann auf das Potential

(22.) $$e\eta\varphi(r),$$

sobald man annimmt, dass die beiden Functionen $\varphi$ und $\psi$ durch die Relation

(23.) $$r\frac{d\varphi}{dr} + 4\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 = 0$$

mit einander verbunden sind.

Wir können nun die Formel (21.) auch so schreiben:

$$\mathfrak{R} = e\eta\left[-\frac{d\varphi}{dr} + \frac{8}{c^2}\frac{d\psi}{dr}\frac{d^2\psi}{dr^2}r'^2 + \frac{8}{c^2}\left(\frac{d\psi}{dr}\right)^2 r''\right],$$

wo $r'$, $r''$ die Ableitungen von $r$ nach der Zeit vorstellen. Substituiren wir hier für $\frac{d\psi}{dr}$ den aus (23.) entspringenden Werth, so gelangen wir zu folgendem Endresultat:

*Unter Annahme einer gewissen nichtmomentanen Transmission und unter Annahme des Hamilton'schen Princips kann das Weber'sche Gesetz abgeleitet werden aus einem gewöhnlichen, nur von der Entfernung abhängenden Potential:*

(24.) $$e\eta\varphi(r);$$

*und zwar ergiebt sich dabei jenes Gesetz in folgender Gestalt:*

(25.) $$\mathfrak{R} = -e\eta\left[\frac{d\varphi}{dr} + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)r'^2 + \frac{2r}{c^2}\frac{d\varphi}{dr}r''\right],$$

*wo c die Geschwindigkeit der Transmission bezeichnet. — Dabei ist vorausgesetzt, dass r klein gegen c sei.*

Dieses Gesetz (25.), welches für *beträchtliche* Entfernungen, d. i. für $\varphi = \frac{1}{r}$ in die bekannte von *Weber* selbst gegebene Formel:

$$\mathfrak{R} = e\eta\left[\frac{1}{r^2} - \frac{r'^2}{c^2 r^2} + \frac{2r''}{c^2 r}\right]$$

übergeht (vergl. pg. 86), stimmt merkwürdiger Weise vollkommen überein mit demjenigen Gesetz, welches ich schon viel früher im Jahre 1858, zur Erklärung der magnetischen Drehung der Polarisationsebene des Lichtes, für die Wirkung zwischen einem *elektrischen Theilchen* $\eta$ und einem *Aetherheilchen* $e$ supponirt habe. Denn schon damals sah ich mich aus bestimmten und naheliegenden Gründen zu der Annahme veranlasst, dass das *Weber*'sche Gesetz für *sehr kleine* Entfernungen einer gewissen Modification bedürfe. Demgemäss nahm ich jenes Gesetz in folgender Form an:

(26.a) $$\mathfrak{R} = e\eta\,[F + \Psi r'^2 + \Phi r''] ;$$

alsdann aber ergab sich die Nothwendigkeit, zwischen den beiden Functionen $\Psi$ und $\Phi$ die Relation zu supponiren:

(26.b) $$\Psi = \frac{1}{2}\frac{d\Phi}{dr} .$$

*Vergleicht man nun diese Formeln* (26.a, b) *mit der Formel* (25.), *so zeigt sich volle Uebereinstimmung; denn jene Relation zwischen* $\Psi$ *und* $\Phi$ *ist in* (25.) *erfüllt.*

In Betreff der Gründe, welche damals zur Annahme einer Modification des *Weber*'schen Gesetzes, sowie zur Annahme der Relation (26.b) mich nöthigten, verweise ich auf meine betreffenden Publicationen, nämlich auf meine Habilitationsschrift: *Explicare tentatur, quomodo fiat, ut lucis planum polarisationis per vires electricas vel magneticas declinetur*, Halis Saxonum, 1858, und ferner auf meine ausführlichere Schrift: *Die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes*, Halle, Verlag des Waisenhauses, 1863. Dabei sei bemerkt, dass in letzter Schrift*) zwischen den Functionen $F$, $\Psi$, $\Phi$ noch eine zweite, mit (25.) *nicht* übereinstimmende Relation: $F = -\frac{c^2}{2}\frac{d\Phi}{dr}$ supponirt wurde; zugleich aber sei betont, dass die Annahme dieser Relation dort (wie man sehr leicht erkennen wird) ganz *unnöthig* war, und nur durch den Wunsch, in der äussern Form eine grössere Einfachheit zu erzielen, herbeigeführt wurde.

Es sei noch bemerkt, dass jene schon im Jahre 1858 von mir für nothwendig befundene Modification des *Weber*'schen Gesetzes in gleicher Weise sich auch vorfindet in meinem Tübinger Programm

*) Man blicke daselbst auf die Form. (4.), pg. 7.

von 1868. Wenn daher *Helmholtz* (Borchardt's Journal, Bd. 75, pg. 39) der Meinung ist, dass diese Modification eine *neue*, eine erst im Jahre 1871 von mir eingeführte sei, und dass sie lediglich den Zweck habe, die von ihm gegen das *Weber*'sche Gesetz erhobenen Einwände zu beseitigen, so beruht eine solche Ansicht auf Irrthum.

## § 11.

*Ueber das von Weber eingeführte Potential.*

Das von mir, unter Anwendung des *Hamilton*'schen Princips, eingeführte Potential $w$, welches bezogen auf beträchtliche Entfernungen, den Werth hat (pg. 108):

$$(1.)\qquad w = e\eta\,(\varphi + \varpi) = e\eta\left[\frac{1}{r} + \frac{r'^2}{c^2 r}\right],$$

ist wesentlich verschieden von dem schon 1848 von *Weber* eingeführten Potential (Poggendorffs Annalen, Bd. 73, pg. 229); dieses letztere lautet nämlich:

$$(2.)\qquad W = e\eta\,(\varphi - \varpi) = e\eta\left[\frac{1}{r} - \frac{r'^2}{c^2 r}\right].$$

Die Theorie des *Weber*'schen Potentials ist folgende:

Man denke sich die beiden Theilchen $e$ und $\eta$ in irgend welcher Bewegung, dann sind $r$ und $r'$ Functionen von $t$. Nun kann offenbar $r'$, falls man $t$ durch $r$ ausdrückt, auch als Function von $r$ angesehen werden; bei solcher Auffassung wird alsdann $W$ ein Ausdruck sein, der nur von $r$ abhängt, und dessen Differentialquotient nach $r$ zu berechnen ist mit Hülfe der Formel:

$$\frac{dW}{dr} = \frac{W'}{r'},$$

wo die Accente Differentiationen nach $t$ anzeigen. Somit folgt:

$$\frac{dW}{dr} = \frac{e\eta}{r^2}\left[-1 + \frac{r'^2}{c^2} - \frac{2rr''}{c^2}\right].$$

Demgemäss erhält man für die von $\eta$ auf $e$ ausgeübte repulsive Kraft $\mathfrak{R}$ (pg. 86) folgende Darstellung:

$$(3.)\qquad \mathfrak{R} = -\frac{dW}{dr}.$$

Bewegen sich also zwei Massenpunkte*) $m + e$ und $\mu + \eta$ nach dem *Weber*'schen Gesetz, so wird, wie aus (3.) unmittelbar folgt, die Gleichung gelten:

*) Aehnlich wie früher, sollen nämlich $m$ und $\mu$ die mit $e$ und $\eta$ verbundenen ponderablen Massen bezeichnen.

$$(4.)\qquad T + W = \text{Const.},$$

welche mit Rücksicht auf (2.) auch so geschrieben werden kann:

$$(5.)\qquad T + e\eta\varphi - e\eta\varpi = \text{Const.};$$

dabei bezeichnet $T$ die lebendige Kraft der beiden Punkte.

Nennt man also, ebenso wie früher, $e\eta\varphi$ das statische und $e\eta\varpi$ das dynamische Potential, so gelangt man zu dem Satz, *dass die lebendige Kraft, vermehrt um das statische und vermindert um das dynamische Potential, constant bleibt.*

Dehnt man diesen Satz, was ohne Schwierigkeit geschehen kann, auf ein System von beliebig vielen Punkten aus, so erhält man das *Princip der Energie* genau in derselben Form, in welcher es früher (pg. 103) auf anderem Wege gefunden war.

*Diese Gleichung des Princips der Energie ist also Weber zuzuschreiben, insofern sie sich unmittelbar ergiebt aus dem von Weber im Jahre* 1848 *bemerkten Potential* (2.). Irrthümlicher Weise habe ich in einem früheren Aufsatz (Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Octob. 1871, pg. 476) die Aufstellung dieser Gleichung mir selber vindicirt. Zu meiner Entschuldigung sei bemerkt, dass jenes *Weber*'sche Potential (2.) in den ausführlichen Aufsätzen*) von *Weber* sich *nicht* vorfindet, sondern nur in jenem Auszuge in Poggendorff's Annalen; diesen Auszug aber durchzusehen hatte ich nicht für nöthig erachtet, in der Meinung, dass dort nur solche Sachen zu finden seien, die in der ausführlichen Abhandlung ebenfalls enthalten wären.

Zweiter Abschnitt.

# Das Weber'sche Gesetz unter Zugrundelegung der gewöhnlichen dualistischen Anschauungsweise.

## § 1.

*Anwendung des Weber'schen Gesetzes auf gleichförmige Ströme.*

Ist ein linearer Leiter von einem elektrischen Strome durchflossen, so bewegen sich, nach der gewöhnlichen dualistischen Vorstel-

*) nämlich in denjenigen, welche in den Abhandlungen der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. publicirt sind.

lungsweise, *gleiche* Quanta positiver und negativer Elektricität mit *gleichen* Geschwindigkeiten in entgegengesetzten Richtungen. Ist also $qDs$ irgend ein Element des gegebenen linearen Leiters, nämlich $q$ der Querschnitt und $Ds$ die Länge des Elementes, so werden die in irgend einem Augenblick innerhalb dieses Elementes in Bewegung begriffenen Quanta mit

(1.) $$e = EqDs \quad \text{und} \quad -e = -EqDs$$

zu bezeichnen, und $E$ die *Dichtigkeit* der strömenden Elektricität zu nennen sein.

Ist $s'$ die *Geschwindigkeit* der positiven Elektricität, so wird das durch einen gegebenen Querschnitt $q$ während der Zeit $dt$ fliessende Quantum *positiver* Elektricität den Raum eines Cylinders von der Basis $q$ und der Höhe $s'dt$ erfüllen, folglich, weil seine Dichtigkeit mit $E$ bezeichnet wurde, den Werth haben

(2.) $$\mu = Eqs'dt\ .$$

Das gleichzeitig durch $q$ fliessende Quantum *negativer* Elektricität ist gerechnet in *entgegengesetzter* Richtung $= -\mu$, also gerechnet in der *ursprünglichen* Richtung $= +\mu$. Die algebraische Summe der in jener *ursprünglichen* Richtung durch $q$ fliessenden Quanta positiver und negativer Elektricität ist daher

(3.) $$= 2\mu = 2Eqs'dt\ .$$

Diese algebraische Summe mag nun mit $Jdt$ benannt werden; die in solcher Weise definirte *Stromstärke* *) $J$ hat alsdann den Werth:

(4.) $$J = 2Eqs'\ .$$

Durch Division von (1.) und (4.) folgt:

$$\frac{e}{J} = \frac{Ds}{2s'}\ ,$$

oder was dasselbe ist:

(5. a) $$JDs = 2s'e\ .$$

Analoge Bedeutung mag für irgend einen zweiten linearen Leiter die Formel

*) Diese Definition der Stromstärke $J$ ist identisch mit der von *Helmholtz* benutzten, und übereinstimmend mit derjenigen, welche die Commission der British Association für Bestimmung des Widerstandsmaasses gewählt hat (vergl. Crelle's Journal. Bd. 72, pg. 72). Bezeichnet man die elektrische Stromstärke, beurtheilt nach *Weber*'s mechanischem Maass mit $(J)$, so ist:

$$J = 2(J).$$

(5.b) $$lD\sigma = 2\sigma'\eta$$

besitzen.

Es soll nun, unter Zugrundelegung des *Weber*'schen Gesetzes, diejenige ponderomotorische und elektromotorische Wirkung berechnet werden, welche die Stromelemente $Ds$ und $D\sigma$ auf einander ausüben. Dabei sei vorausgesetzt, dass die beiden Leiter in relativer Bewegung sich befinden, und es sei $p$ derjenige Parameter, durch welchen ihre relative Lage zu einander in irgend einem Augenblick sich bestimmt.

Die gegenseitige Entfernung $r$ der in den Elementen $Ds$ und $D\sigma$ enthaltenen Quanta positiver Elektricität $e$ und $\eta$ ist offenbar aus mehrfachem Grunde eine Function der Zeit, einmal weil $e$ und $\eta$ mit gewissen Geschwindigkeiten $s'$ und $\sigma'$ in ihren Strombahnen fortschreiten, andererseits, weil der Parameter $p$, von welchem die relative Lage dieser beiden Strombahnen abhängt, von Augenblick zu Augenblick sich ändert. Somit folgt:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial s} s' + \frac{\partial r}{\partial \sigma} \sigma' + \frac{\partial r}{\partial p} p' ,$$

wo $s' = \frac{ds}{dt}$ und $\sigma' = \frac{d\sigma}{dt}$ die genannten Geschwindigkeiten vorstellen, und ebenso $p' = \frac{dp}{dt}$ ist. — Analoges gilt für die von uns mit $\psi$ bezeichnete Function $\sqrt{r}$. Man erhält:

(6.) $$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial s} s' + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \sigma' + \frac{\partial \psi}{\partial p} p' ,$$

und falls man nochmals differenzirt, und die betreffenden Ableitungen von $s$, $\sigma$, $p$ stets durch Accente bezeichnet:

(7.) $$\begin{aligned}\frac{d^2\psi}{dt^2} = & \frac{\partial^2\psi}{\partial s^2} s'^2 + \frac{\partial^2\psi}{\partial \sigma^2} \sigma'^2 + \frac{\partial^2\psi}{\partial p^2} p'^2 \\ & + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial\sigma} s'\sigma' + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial p} s'p' + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma\partial p} \sigma'p' \\ & + \frac{\partial\psi}{\partial s} s'' + \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} \sigma'' + \frac{\partial\psi}{\partial p} p'' .\end{aligned}$$

Die von dem positiven Quantum $\eta$ auf das positive Quantum $e$ ausgeübte Kraft $\mathfrak{R}^{(p)}$ hat daher (vrgl. pg. 86) den Werth:

(8.) $$\mathfrak{R}^{(p)} = e\eta\left[-\frac{dq}{dr} + 4A^2\frac{d\psi}{dr}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}s'^2 + \dots 2\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial\sigma}s'\sigma' + \dots\frac{\partial\psi}{\partial s}s'' + \dots\right)\right],$$

wo die in ( ) gestellten Glieder den Ausdruck (7.) andeuten sollen.

Um die Wirkung $\mathfrak{R}^{(n)}$ des in $D\sigma$ enthaltenen negativen Fluidums $(-\eta)$, ebenfalls auf $e$, zu erhalten, hat man nur $\eta$ mit $(-\eta)$, und gleichzeitig $\sigma'$, $\sigma''$ mit $(-\sigma')$, $(-\sigma'')$ zu vertauschen. Also:

(9.) $\mathfrak{R}^{(n)} = e\,(-\eta)\left[-\frac{d\varphi}{dr} + 4A^2\frac{d\psi}{dr}\begin{pmatrix}\text{derselbe Ausdruck, wie in (8.) nur}\\ \sigma',\ \sigma''\text{ mit } -\sigma',\ -\sigma''\text{ vertauscht}\end{pmatrix}\right].$

Durch Addition von (8.) und (9.) ergiebt sich diejenige Kraft $\mathfrak{R}_p$, welche das ganze Stromelement $D\sigma$ auf die Masse $e$ ausübt; man erhält also:

$$\mathfrak{R}_p = \mathfrak{R}^{(p)} + \mathfrak{R}^{(n)},$$

d. i.

(10.) $$\mathfrak{R}_p = e\eta\,.\,8A^2\frac{d\psi}{dr}\left(2\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial\sigma}s'\sigma' + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial\sigma}p'\sigma' + \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\sigma''\right).$$

In ähnlicher Weise kann man diejenige Kraft $\mathfrak{R}_n$ berechnen, welche das Stromelement $D\sigma$ auf die in $Ds$ enthaltene *negative* Elektricität $(-e)$ ausübt; man findet dieselbe aus (10.) durch Vertauschung von $e$, $s'$, $s''$ mit $(-e)$, $(-s')$, $(-s'')$. Also:

(11.) $$\mathfrak{R}_n = (-e)\,\eta\,.\,8A^2\frac{d\psi}{dr}\left(-2\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial\sigma}s'\sigma' + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial\sigma}p'\sigma' + \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\sigma''\right).$$

Nach der üblichen Annahme übertragen sich nun die auf $e$ und $(-e)$ ausgeübten Kräfte $\mathfrak{R}_p$ und $\mathfrak{R}_n$ unmittelbar auf die ponderable Masse. Demgemäss ist die von $D\sigma$ auf $Ds$ ausgeübte *ponderomotorische* Kraft $\mathfrak{R}$ gleich der Summe $\mathfrak{R}_p + \mathfrak{R}_n$; während andererseits die von $D\sigma$ auf $Ds$ ausgeübte *elektromotorische* Kraft $\mathfrak{A}$ proportional ist mit der Differenz jener beiden Kräfte $\mathfrak{R}_p - \mathfrak{R}_n$.

Wir erhalten somit aus (10.), (11.):

(12.) $$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_p + \mathfrak{R}_n = e\eta\,.\,32A^2\frac{d\psi}{dr}\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial\sigma}s'\sigma',$$

und andererseits

(13.) $$\mathfrak{A} = \frac{g(\mathfrak{R}_p - \mathfrak{R}_n)}{e} = g\eta\,.\,16A^2\frac{d\psi}{dr}\left(2\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial\sigma}p'\sigma' + \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\sigma''\right),$$

wo $g$ einen noch zu bestimmenden constanten Factor vorstellt. In der letzten Formel ist der Divisor $e$ erforderlich, um die elektromotorische Kraft $\mathfrak{A}$ zu beziehen auf die elektrische Masseneinheit, wie solches üblich.

Substituirt man in (12.), (13.) die aus (5.a,b) entspringenden Werthe:

$$es' = \tfrac{1}{2}JDs,$$

$$\eta\sigma' = \tfrac{1}{2}\mathrm{I}D\sigma, \qquad \eta\sigma'' = \frac{1}{2}\frac{d\mathrm{I}}{dt}D\sigma,$$

so folgt:

(14.) $$\mathfrak{R} = 8A^2\frac{d\psi}{dr}\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial\sigma}JDs\,\mathrm{I}D\sigma,$$

(15.) $$\mathfrak{A} = 8gA^2\frac{d\psi}{dr}\left(2\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial\sigma}p'\mathrm{I} + \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\frac{d\mathrm{I}}{dt}\right)D\sigma;$$

Diese auf $Ds$ einwirkenden Kräfte $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{N}$ sind beide gerechnet in *repulsiver* Richtung, d. i. in der Richtung ($D\sigma \longrightarrow Ds$). Die in der letztern noch vorhandene unbekannte Constante $g$ wird im folgenden §. bestimmt werden.

## § 2.

*Fortsetzung. Ableitung der Integralgesetze.*

Es seien ($s$, $J$) und ($\sigma$, I) zwei *gleichförmige* Stromringe; so dass also $J$ und I nur Functionen der Zeit (nicht aber der Bogenlängen) sind. Zur Abkürzung mag gesetzt werden:

$$(16.)\qquad \begin{aligned} P &= JIQ\,, \quad \text{und} \\ Q &= 4A^2\Sigma\Sigma\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\,Ds\,D\sigma\right), \end{aligned}$$

die Integration erstreckt über alle Elemente der beiden Ringe.

Befinden sich die beiden Ringe in irgend welcher Bewegung, und denkt man sich ihre relative Lage wiederum abhängig von einem sich ändernden Parameter $p$, so wird die zwischen den *ponderablen* Massen zweier Stromelemente $Ds$ und $D\sigma$ vorhandene Entfernung $r$ lediglich eine Function von $p$ sein, mithin:

$$dr = \frac{\partial r}{\partial p}\,dp\,.$$

Ist also $\mathfrak{R}$ (14.) die zwischen den beiden Elementen vorhandene ponderomotorische Kraft, so wird die während der Zeit $dt$ von den beiden Elementen auf einander ausgeübte *ponderomotorische Arbeit* den Werth haben:

$$\mathfrak{R}dr = \mathfrak{R}\,\frac{\partial r}{\partial p}\,dp\,,$$

also, mit Rücksicht auf (14.) ausdrückbar sein durch:

$$\mathfrak{R}dr = 8A^2\,\frac{\partial\psi}{\partial p}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial\sigma}\,JDs\,\mathrm{I}D\sigma\,dp\,.$$

Die von den gegebenen Stromringen auf einander ausgeübte ponderomotorische Arbeit hat daher den Werth:

$$(17.)\qquad \Sigma\Sigma\mathfrak{R}dr = 4A^2J\mathrm{I}dp\,.\,\Sigma\Sigma\left(2\,\frac{\partial\psi}{\partial p}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial\sigma}\right)Ds\,D\sigma\,,$$

die Integration ausgedehnt über beide Ringe.

Diese Formel (17.) gewinnt, mit Rücksicht auf die identische Gleichung:

$$2\frac{\partial\psi}{\partial p}\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial\sigma}=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)+\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)-\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right),$$

und mit Rücksicht darauf, dass die Ströme *geschlossene* sind, die einfachere Gestalt:

(18.) $$\Sigma\Sigma\mathfrak{R}dr=-4A^2J\mathrm{I}dp\,.\,\Sigma\Sigma\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)Ds\,D\sigma;$$

und hieraus folgt bei Benutzung der Bezeichnungen (16.) sofort:

(19.) $$\Sigma\Sigma\mathfrak{R}dr=-J\mathrm{I}\frac{\partial Q}{\partial p}\,dp\,,$$

d. i.

(20.) $$\Sigma\Sigma\mathfrak{R}dr=-J\mathrm{I}dQ\,.$$

Nennt man den Ausdruck $P=J\mathrm{I}Q$ (16.) das *Potential* der beiden Ringe auf einander, so sagt die Formel (20.) aus, *dass die von den beiden Ringen während eines Zeitelementes auf einander ausgeübte ponderomotorische Arbeit gleich ist dem negativen partiellen Zuwachs des Potentials, genommen nach der räumlichen Lage.* — Dies aber ist das ponderomotorische Integralgesetz.*)

Unter der Summe der auf den Ring $(s, J)$ ausgeübten elektromotorischen Kräfte versteht man bekanntlich**) die Summe sämmtlicher Bogenelemente $Ds$, jedes multiplicirt mit der in ihm hervorgerufenen und in seiner Richtung gerechneten elektromotorischen Kraft. Die Summe der von $(\sigma, \mathrm{I})$ auf $(s, J)$ ausgeübten elektromotorischen Kräfte ist daher dargestellt durch das über beide Ringe ausgedehnte Integral:

$$\Sigma\Sigma\,\mathfrak{A}\cos\vartheta\,Ds\,,$$

wo $\mathfrak{A}$ die Kraft (15.), und $\vartheta$ den Neigungswinkel dieser Kraft gegen das Element $Ds$ bezeichnet.

Die Kraft $\mathfrak{A}$ ist aber gerechnet in der Richtung $r$ ($D\sigma \longrightarrow Ds$); folglich $\cos\vartheta=\frac{\partial r}{\partial s}$; und also:

$$\Sigma\Sigma\,\mathfrak{A}\cos\vartheta\,Ds=\Sigma\Sigma\mathfrak{A}\frac{\partial r}{\partial s}\,Ds\,,$$

also mit Rücksicht auf (15):

$$\Sigma\Sigma\,\mathfrak{A}\cos\vartheta\,Ds=8gA^2\Sigma\Sigma\frac{\partial\psi}{\partial s}\left(2\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial\sigma}p'\mathrm{I}+\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\frac{d\mathrm{I}}{dt}\right)Ds\,D\sigma\,,$$

also mit Rücksicht auf (16.):

(21.) $$\Sigma\Sigma\,\mathfrak{A}\cos\vartheta\,Ds=8gA^2p'\mathrm{I}\,\Sigma\Sigma\left(2\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial\sigma}\right)Ds\,D\sigma+2g\frac{d\mathrm{I}}{dt}Q\,.$$

---

*) Vergl. mein Werk »*Die elektrischen Kräfte*« (Leipzig, bei Teubner, 1873), pg. 55, Form. (52. g).

**) l. c. p. 101.

Diese Formel nimmt, mit Rücksicht auf die identische Gleichung:

$$2\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial^2\psi}{\partial p\,\partial\sigma} = \frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right) + \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial\psi}{\partial p}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial p}\right)$$

und mit Rücksicht darauf, dass die Ströme geschlossene sind, die einfachere Gestalt an:

$$(22.)\quad \Sigma\Sigma\,\mathfrak{A}\cos\vartheta\,Ds = 8gA^2p'\,\mathrm{I}\,\frac{\partial}{\partial p}\left(\Sigma\Sigma\,\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\,Ds\,D\sigma\right) + 2g\frac{d\mathrm{I}}{dt}\,Q\,;$$

hieraus aber folgt mit Rücksicht auf (16.) sofort:

$$(23.)\quad \Sigma\Sigma\,\mathfrak{A}\cos\vartheta\,Ds = 2g\mathrm{I}\,\frac{dQ}{dp}\,p' + 2gQ\frac{d\mathrm{I}}{dt}\,,$$
$$= 2g\left(\mathrm{I}\,\frac{dQ}{dt} + Q\frac{d\mathrm{I}}{dt}\right),$$

also schliesslich:

$$(24.)\quad \Sigma\Sigma\,\mathfrak{A}\cos\vartheta\,Ds = 2g\,\frac{d(\mathrm{I}Q)}{dt}\,.$$

Das so erhaltene Resultat ist, bei gehöriger Bestimmung des noch unbekannten Factors $g$, identisch mit dem *elektromotorischen Integralgesetz.**) Denn dieses sagt aus dass *die Summe der während der Zeit dt vom Ringe* ($\sigma$, I) *im Ringe* ($s$, $J$) *inducirten elektromotorischen Kräfte gleich dem vollständigen Zuwachs von* IQ *sei*, und drückt sich also aus durch die Formel:

$$(\Sigma\Sigma\,\mathfrak{A}\cos\vartheta\,Ds)\,dt = d(\mathrm{I}Q)\,.$$

Somit ergiebt sich für die Constante $g$ der Werth:

$$(25.)\quad 2g = 1\,.$$

## § 3.

*Fortsetzung. Transformation der Elementargesetze.*

Die Elementargesetze sind ausgedrückt durch die Formeln (14.), (15.), welche gegenwärtig mit Rücksicht auf das Ergebniss (25.) folgende Gestalt annehmen:

$$(26.)\quad \mathfrak{R} = 8A^2\frac{d\psi}{dr}\frac{\partial^2\psi}{\partial s\,\partial\sigma}\,JDs\,\mathrm{I}D\sigma\,,$$

$$(27.)\quad \mathfrak{A} = 4A^2\frac{d\psi}{dr}\left(2\frac{\partial^2\psi}{\partial p\,\partial\sigma}\frac{dp}{dt}\,\mathrm{I} + \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\frac{d\mathrm{I}}{dt}\right)D\sigma\,.$$

Es handelt sich hier um gewisse Transformationen dieser Ausdrücke; wobei zu beachten, dass $\psi = \sqrt{r}$ ist.

Sind $\vartheta$, $\vartheta_1$ die Winkel, unter welchen die Richtung $r\,(D\sigma \longrightarrow Ds)$

*) l. c. p. 107.

gegen die Elemente $Ds$, $D\sigma$ geneigt ist, und ist $\varepsilon$ der Neigungswinkel der Elemente $Ds$, $D\sigma$ gegeneinander, so erhält man leicht:

(28.)
$$\frac{d\psi}{dr} = \frac{1}{2\sqrt{r}}\,, \quad \frac{\partial\psi}{\partial s} = \frac{\cos\vartheta}{2\sqrt{r}}\,, \quad \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} = \frac{-\cos\vartheta_1}{2\sqrt{r}}$$
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial\sigma} = \frac{3\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - 2\cos\varepsilon}{4r\sqrt{r}}\,;$$

und hieraus ergiebt sich für die ponderomotorische Kraft $\mathfrak{R}$ (26.) folgender Ausdruck:

(29.)
$$\mathfrak{R} = A^2\,\frac{3\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - 2\cos\varepsilon}{r^2}\,JDs\,\mathrm{I}D\sigma\,;$$

dies aber ist das *Ampère'sche Elementargesetz.**)

Andererseits hat nach (27.) die elektromotorische Kraft $\mathfrak{A}$ den Werth:

(30.)
$$\mathfrak{A} = 4A^2\,\frac{d\psi}{dr}\left(2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial\sigma}\,\frac{dp}{dt}\,\mathrm{I} + \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\,\frac{d\mathrm{I}}{dt}\right)D\sigma\,.$$

Das hier auftretende Differential

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial\sigma}\,dp$$

repräsentirt offenbar diejenige Aenderung, welche der Ausdruck

$$\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} = \frac{-\cos\vartheta_1}{2\sqrt{r}}$$

während der Zeit $dt$ erleidet. Diese Aenderung aber ist vollkommen bestimmt, sobald die relative Geschwindigkeit des ponderablen Massenpunktes $x$, $y$, $z$ in Bezug auf das Element $D\sigma$ ihrer Grösse und Richtung nach bekannt ist. In der That findet man durch leichte Rechnung:

(31.)
$$\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial\sigma}\,\frac{dp}{dt} = \frac{V(3\cos\vartheta_1\cos\rho - 2\cos\varsigma)}{4r\sqrt{r}}\,,$$

wo $V$ die genannte relative Geschwindigkeit bezeichnet, und $\rho$ und $\varsigma$ diejenigen Winkel vorstellen, unter denen $V$ gegen $r$ ($D\sigma \longrightarrow Ds$) und gegen $D\sigma$ geneigt ist.

---

*) l. c. pg. 45. — Setzt man für $A^2$ seinen Werth $\frac{2}{c^2}$, ausserdem $J = 2(J)$ und $\mathrm{I} = 2(\mathrm{I})$, wo alsdann $(J)$ und $(\mathrm{I})$ die Stromstärken nach *Weber*'s mechanischem Maass (Note pg. 117) vorstellen, so erhält man:

$$\mathfrak{R} = \frac{8}{c^2}\,\frac{3\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - 2\cos\varepsilon}{r^2}\,(J)Ds\,(\mathrm{I})D\sigma\,;$$

und in dieser Gestalt stimmt die Formel auch hinsichtlich des constanten Factors vollständig überein mit der von *Weber* gegebenen (vgl. *Weber*'s Elekt. Maassbest. 1855, pg. 268). Bezeichnet man also die ponderomotorische Kraft im *Weber*'schen Sinne mit $(\mathfrak{R})$, so ist:

$$\mathfrak{R} = (\mathfrak{R})\,.$$

Substituirt man die Werthe (28.) und (31.) in die Formel (27.), so folgt sofort:

(32.) $$\mathfrak{A} = A^2\left(\frac{V(3\cos\vartheta_1\cos\varrho - 2\cos\varsigma)}{r^2}\,\mathrm{I} - \frac{\cos\vartheta_1}{r}\frac{d\mathrm{I}}{dt}\right)D\sigma\ ;$$

und dies ist in der That das *von Weber aufgestellte elektromotorische Elementargesetz*, abgesehen von einem gewissen Zahlenfactor.*)

Es sei wiederholt, dass diese von $D\sigma$ auf $Ds$ ausgeübten Kräfte $\mathfrak{R}$ (29.) und $\mathfrak{A}$ (32.) zusammmenfallen mit der Verbindungslinie $r$, und *repulsiv* gerechnet sind.

*Bemerkung.* — Um das *Weber*'sche Gesetz (32.) mit dem entsprechenden Gesetz meines Vaters vergleichen zu können, muss man

---

*) *Weber*'s Elektrod. Maassbest. 1856, pg. 268. — Setzt man nämlich $A^2 = \frac{2}{c^2}$ und $\mathrm{I} = 2(\mathrm{I})$, (vrgl. die Note pg. 117), so nimmt die Formel (32.) folgende Gestalt an:

$$\mathfrak{A} = \frac{4}{c^2}\left(\frac{V(3\cos\vartheta_1\cos\varrho - 2\cos\varsigma)}{r^2}(\mathrm{I}) - \frac{\cos\vartheta_1}{r}\frac{d(\mathrm{I})}{dt}\right)D\sigma\ ;$$

und dieser Ausdruck unterscheidet sich von dem *Weber*'schen noch durch einen Factor 2. Bezeichnet man nämlich die elektromotorische Kraft im *Weber*'schen Sinne mit $(\mathfrak{A})$, so findet man:

$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A}).$$

Hiebei mag eine gelegentliche Bemerkung über das Maass des Widerstandes zugefügt werden. Nach dem *Ohm*'schen Gesetz ist die Stromstärke $J$ in einem linearen Leiter $= \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{w}}$, falls man nämlich die im ganzen Ringe (in der Richtung desselben) wirkende elektromotorische Kraft mit $\mathfrak{A}$, und den Widerstand des Ringes mit $\mathfrak{w}$ bezeichnet. Es ist also

$$\mathfrak{A} = J\mathfrak{w}\ ;$$

und in der That pflegt man allgemein, welchem Maasssystem man auch beipflichten mag, diese *Ohm*'sche Formel aufrecht zu erhalten, nämlich das Hineintreten irgend eines Zahlenfactors in dieselbe zu vermeiden. Bezeichnet man also elektromotorische Kraft, Stromstärke und Widerstand im Sinne *Weber*'s respective mit $(\mathfrak{A})$, $(J)$ und $(\mathfrak{w})$, so ist ebenfalls:

$$(\mathfrak{A}) = (J)(\mathfrak{w})\ .$$

Hieraus folgt durch Division:

$$\frac{\mathfrak{A}}{(\mathfrak{A})} = \frac{J}{(J)}\frac{\mathfrak{w}}{(\mathfrak{w})}\ .$$

Nun ist aber, wie wir bereits gesehen haben:

$$J = 2(J)\ ,$$
$$\mathfrak{A} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{A})\ .$$

Somit folgt:

$$\mathfrak{w} = \tfrac{1}{4}(\mathfrak{w})\ ;$$

und hieraus folgt weiter, falls man die *Leitungsfähigkeit* im Sinne des *hier* gebrauchten Maasssystems und im *Weber*'schen Sinne respective mit $k$ und $(k)$ bezeichnet:

$$k = 4(k)\ .$$

beachten, dass letzteres nicht $\mathfrak{A}$ selber, sondern nur die Componente von $\mathfrak{A}$ nach $Ds$ liefert. Nun ist nach (32.)

$$(33.)\quad \mathfrak{A}\cos\vartheta = A^2\left(\frac{V\cos\vartheta\,(3\cos\vartheta_1\cos\rho - 2\cos\varepsilon)}{r^2}\,\mathrm{I} - \frac{\cos\vartheta\cos\vartheta_1}{r}\frac{d\mathrm{I}}{dt}\right)D\sigma\,.$$

Andererseits aber hat $\mathfrak{A}\cos\vartheta$ nach dem von meinem Vater proponirten Gesetz [vrgl. mein Werk: *Die elektrischen Kräfte*. Leipzig, 1873, pg. 221*)] folgenden Werth:

$$(34.)\quad \mathfrak{A}\cos\vartheta = -\,\mathrm{I}D\sigma\,.\,V\mathrm{P}\cos(V,\mathrm{P}) + \frac{d\mathrm{I}}{dt}D\sigma\,.\,\Phi\,,$$

wo P, $\cos(V,\mathrm{P})$ und $\Phi$ die Bedeutung haben:

$$(35.)\quad \begin{aligned}\mathrm{P} &= A^2\,\frac{3\cos\vartheta\cos\vartheta_1 - 2\cos\varepsilon}{r^2}\,,\\ \cos(V,\mathrm{P}) &= \cos\rho\,,\end{aligned}\qquad \Phi = \begin{cases} -\,A^2\,\dfrac{\cos\vartheta\cos\vartheta_1}{r}\,,\\[2mm] -\,A^2\,\dfrac{\cos\varepsilon}{r}\,.\end{cases}$$

Mein Vater hat nämlich für den Ausdruck $\Phi$ beide Werthe angegeben, ohne bestimmte Entscheidung zu Gunsten des einen oder andern. Substituirt man nun die Ausdrücke (35.), indem man für $\Phi$ den *ersten* Werth wählt, so folgt:

$$(36.)\quad \mathfrak{A}\cos\vartheta = A^2\left(\frac{V\cos\rho\,(-3\cos\vartheta\cos\vartheta_1 + 2\cos\varepsilon)}{r^2}\,\mathrm{I} - \frac{\cos\vartheta\cos\vartheta_1}{r}\frac{d\mathrm{I}}{dt}\right)D\sigma\,.$$

Man sieht, dass die Gesetze (33.) und (36.) ausserordentlich verschieden sind.

## § 4.

*Fortsetzung. Prüfung der Elementargesetze.*

Sind die in einem materiellen System vorhandenen *innern* Kräfte ebenso wie die auf dasselbe einwirkenden *äusseren* Kräfte theils ordinären, theils elektrostatischen, theils elektrodynamischen Ursprungs, so wird dasjenige Quantum lebendiger Kraft und Wärme:

$$(37.)\quad (dT + dQ)_{J,\,\text{eldy.}\,\text{Us}}\,,$$

welches im System während der Zeit $dt$ speciell in Folge der *innern elektrodynamischen* Kräfte sich entwickelt, ein vollständiges Differential sein.

Wir wollen untersuchen, in wie weit dieser aus dem allgemeinen Axiom der lebendigen Kraft sich ergebende Satz (Abh. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1873, Bd. X, pg. 468) in Einklang ist mit den so eben besprochenen Elementargesetzen.

Es seien gegeben zwei Stromringe $(J, s)$ und $(\mathrm{I}, \sigma)$, welche be-

*) Die Componente $\mathfrak{A}\cos\vartheta$ ist dort mit $\mathfrak{E}$ bezeichnet.

griffen sind in irgend welcher Bewegung. Auch mag vorausgesetzt werden, dass auf diese Ringe irgend welche äussern elektromotorischen Kräfte einwirken, so dass die Stromstärken $J$ und $\mathrm{I}$ *ungleichförmig* sind. Diejenigen Quanta lebendiger Kraft, welche $\sigma$ in $s$ und $s$ in $\sigma$ während der Zeit $dt$ hervorbringt, haben zusammengenommen den Werth:*)

$$(38.)\qquad (dT_s^\sigma + dT_\sigma^s)_{\text{eldy. Us}} = \Sigma\Sigma\,\mathfrak{R}dr\,.$$

Hieraus folgt, wenn man analog verfährt, wie in (17.), (18.), jedoch beachtet, dass $J$ und $\mathrm{I}$ im gegenwärtigen Falle ungleichförmig, also Functionen der Bogenlängen sind:

$$(39.)\qquad (dT_s^\sigma + dT_\sigma^s)_{\text{eldy. Us}} = 4A^2\Sigma\Sigma J\mathrm{I}\left[2\,\frac{\partial\psi}{\partial p}\,\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial\sigma}\right] dp\,Ds\,D\sigma\,,$$
$$= 4A^2\Sigma\Sigma J\mathrm{I}\left[\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial\sigma} - \frac{\partial W}{\partial p}\right] dp\,Ds\,D\sigma\,,$$
$$= 4A^2\Sigma\Sigma J\mathrm{I}\left[\left(\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial\sigma}\right)dp - dW\right] Ds\,D\sigma\,,$$

wo $U$, $V$, $W$ zu Abkürzung stehen für:

$$(40.)\qquad U = \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\,\frac{\partial\psi}{\partial p}\,,\qquad V = \frac{\partial\psi}{\partial s}\,\frac{\partial\psi}{\partial p}\,,\qquad W = \frac{\partial\psi}{\partial s}\,\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\,.$$

Ferner erhält man für die von $\sigma$ in $s$ während der Zeit $dt$ hervorgebrachte Wärmemenge den Werth:**)

$$(41.)\qquad (dQ_s^\sigma)_{\text{eldy. Us}} = \Sigma\Sigma\,[JDs\,.\,\mathfrak{A}\cos\vartheta]\,dt\,,$$
$$= \Sigma\Sigma\left[JDs\,.\,\mathfrak{A}\,\frac{\partial r}{\partial s}\right]dt\,.$$

Hieraus folgt, wenn man für $\mathfrak{A}$ seinen Werth (15.) substituirt, und dabei beachtet, dass $g = \frac{1}{2}$ ist [vgl. (25.)]:

$$(42.)\qquad (dQ_s^\sigma)_{\text{eldy. Us}} = 4A^2\Sigma\Sigma J\,\frac{\partial\psi}{\partial s}\left[2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial\sigma}\,p'\mathrm{I} + \frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\,\frac{d\mathrm{I}}{dt}\right] Ds\,D\sigma\,dt\,,$$
$$= 4A^2\Sigma\Sigma J\left[\left(2\,\frac{\partial\psi}{\partial s}\,d\,\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)\mathrm{I} + Wd\mathrm{I}\right] Ds\,D\sigma\,,$$

wo $W$ die Bedeutung (40.) hat. — Somit erhält man:

$$(43.)\qquad (dQ_s^\sigma + dQ_\sigma^s)_{\text{eldy. Us}} = 4A^2\Sigma\Sigma\,[2J\mathrm{I}\,dW + Wd(J\mathrm{I})]\,Ds\,D\sigma\,,$$
$$= 4A^2\Sigma\Sigma\,[d(J\mathrm{I}W) + J\mathrm{I}dW]\,Ds\,D\sigma\,.$$

Nunmehr folgt durch Addition von (39.) und (43.):

$$(44.)\qquad dT_s^\sigma + dT_\sigma^s + dQ_s^\sigma + dQ_\sigma^s)_{\text{eldy. Us}} =$$
$$= dP_{s\sigma} + 4A^2\Sigma\Sigma J\mathrm{I}\left(\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial\sigma}\right) Ds\,D\sigma\,dp\,,$$

---

*) Vgl. mein Werk: *Die elektrischen Kräfte* (Leipzig, 1873), pg. 55, Form. (52.g).

**) Vgl. *Die elektrischen Kräfte* (Leipzig, 1873), pg. 105 Form. (23.).

wo $P_{s\sigma}$ das Integral repräsentirt:

(45.) $$P_{s\sigma} = 4A^2\Sigma\Sigma(JIW)\,,$$
$$= 4A^2\Sigma\Sigma\left(JI\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right).$$

Mit (44.) analoge Formeln ergeben sich für diejenigen Quantitäten lebendiger Kraft und Wärme, welche jeder der beiden Ringe in sich selber hervorruft. Setzt man voraus, dass jeder der beiden Ringe *starr* ist, so werden diese Formeln bei analoger Bezeichnung so lauten:

(46.) $$(dT_s^s + dQ_s^s)_{\text{eldy. Us}} = \tfrac{1}{2}\,dP_{ss}\,,$$

(47.) $$(dT_\sigma^\sigma + dQ_\sigma^\sigma)_{\text{eldy. Us}} = \tfrac{1}{2}\,dP_{\sigma\sigma}\,.$$

Nunmehr ergiebt sich durch Addition der Formeln (44.), (46.), (47.) für das eigentlich zu berechnende Quantum (37.) folgender Werth:

(48.) $$(dT + dQ)_{J,\,\text{eldy. Us}} = d(P_{s\sigma} + \tfrac{1}{2}P_{ss} + \tfrac{1}{2}P_{\sigma\sigma})$$
$$+ 4A^2\Sigma\Sigma JI\left(\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial V}{\partial\sigma}\right)Ds\,D\sigma\,dp\,.$$

Dieser Ausdruck ist ein vollständiges Differential, sobald das Glied zweiter Zeile verschwindet; das aber wird im Allgemeinen *nicht* der Fall sein, sondern nur dann, wenn $J$ und I *gleichförmig* (d. i. unabhängig von den Bogenlängen) sind.

Die beiden Elementargesetze führen also zusammengenommen zu einem Resultat (48.), welches mit dem Axiom der lebendigen Kraft oder vielmehr mit dem daraus abgeleiteten Satz (37.) nur dann in Einklang ist, wenn die betrachteten Ströme *gleichförmig* sind; folglich wird das eine oder andere jener beiden Gesetze einer Umänderung bedürfen, falls der Einklang vollständig sein soll.

Obwohl also das *Weber*'sche Gesetz selber, wie wir früher (pg. 102) gesehen haben, mit dem Axiom oder Princip der lebendigen Kraft in Einklang ist, erfreuen sich dennoch die aus ihm abgeleiteten Elementargesetze eines solchen Einklanges *nicht immer*, sondern nur dann, wenn die betrachteten Ströme *gleichförmig* sind. Dieser eigenthümliche Umstand*) dürfte seinen Grund haben in der Art und Weise, wie jene Elementargesetze aus dem *Weber*'schen Gesetz dedu-

*) Auf diesen Umstand habe ich schon früher (jedoch ohne nähere Ausführung) aufmerksam gemacht, in den Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. August, 1872, pg. 154, (pg. 13 der Separatabzüge), auch in den Mathem. Annalen, Bd. V, pg. 612.

cirt worden sind. In der That leidet diese Deduction an mancherlei accessorischen Annahmen, welche wenigstens für den Fall *un*gleichförmiger Ströme sehr bedenklich erscheinen; — wie solches aus den Auseinandersetzungen der folgenden §§. hervorgehen wird.

Uebrigens wird man geneigt sein, das *erste* der beiden Elementargesetze, nämlich das *Ampère*'sche, für richtig zu halten, und also die Schuld jenes Mangels an Uebereinstimmung dem *zweiten* d. i. dem *Weber*'schen aufzubürden. Demgemäss dürfte über die verschiedenen Versuche, das Elementargesetz der elektromotorischen Wirkungen festzustellen, Folgendes zu bemerken sein.

1) Das von *Weber* aufgestellte elektromotorische Elementargesetz steht, falls man das *Ampère*'sche ponderomotorische Elementargesetz als richtig gelten lässt, nur für gleichförmige, nicht aber für ungleichförmige Ströme in Einklang mit dem Princip der lebendigen Kraft.

2) Das von meinem Vater aufgestellte elektromotorische Elementargesetz steht mit dem ebenfalls von ihm aufgestellten und durch sorgfältige Beobachtungen constatirten Integralgesetz nicht in Einklang, sobald der inducirende Strom mit Gleitstellen behaftet ist.*)

3) Das von mir selber aufgestellte elektromotorische Elementargesetz**) ist allerdings frei von den eben genannten Uebelständen, leidet aber an dem bedenklichen Umstande, dass ihm zufolge die elektromotorische Kraft nicht zusammenfällt mit der Verbindungslinie.

## § 5.

### *Anwendung des Weber'schen Gesetzes auf beliebige (gleichförmige oder ungleichförmige) Strömungen. Voraussetzungen über die Natur der elektrischen Bewegungen.*

Bei der mathematischen Behandlung *beliebiger* elektrischer Bewegungen in linearen oder körperlichen Leitern ist man, theils um das *Weber*'sche Gesetz überhaupt anwendbar zu machen, theils um die Complicirtheit der resultirenden Formeln einigermassen zu mildern, zu zahlreichen *accessorischen Annahmen* über die innere Mechanik des elektrischen Stromes genöthigt. Da sich *Weber* über diese

---

*) Math. Annalen, Bd. V, pg. 621—624; ferner vgl. man *Die elektrischen Kräfte* (Leipzig, 1873), pg. 229.

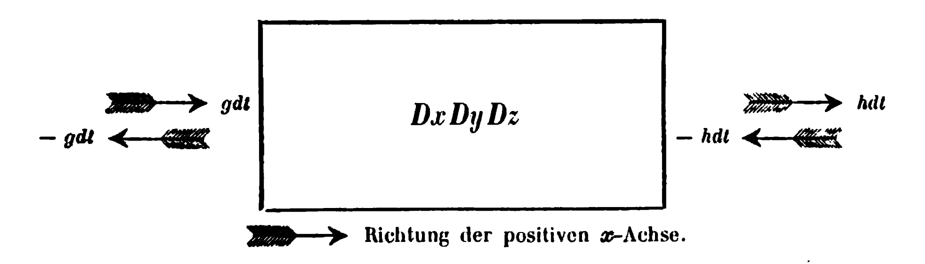
**) Vgl. *Die elektrischen Kräfte*, pg. 193.

innere Mechanik ziemlich unbestimmt und reservirt ausgesprochen hat (vgl. z. B. seine elektrodynamischen Maassbestimmungen, 1846, pg. 368, etc.), so wollen wir, um nicht gleich von Anfang einen schwankenden Boden unter den Füssen zu haben, derjenigen kategorischen Annahme beipflichten, welche — wenigstens nach der Ansicht von *Helmholtz* (Borch. J. Bd. 75, pg. 55) — den *Kirchhoff*'schen Untersuchungen (Poggendorff's Ann. Bd. 100 u. 102) zu Grunde liegt, nämlich voraussetzen,

(A.) ***dass bei einer beliebigen elektrischen Bewegung (mag sie gleichförmig oder ungleichförmig sein) in jedem Volumelement gleichgrosse Quanta positiver und negativer Elektricität mit gleichen Geschwindigkeiten in entgegengesetzten Richtungen fliessen.***

Dieser Vorstellung entsprechend werden die in Bewegung begriffenen Elektricitäten, weil ihre algebraische Summe für jedes Volumelement stets Null bleibt, als ein ***neutrales Gemisch***, oder kürzer als ***neutrale Elektricität*** zu bezeichnen sein.

Es sei $DxDyDz$ ein kleines Parallelepipedum im Innern des betrachteten Conductors; und es seien $gdt$ und $hdt$ die durch zwei einander gegenüberliegende Seitenflächen des Parallelepipedums während der Zeit $dt$ fliessenden Mengen positiver Elektricität. Alsdann sind, auf Grund der Annahme (A.), die während derselben Zeit durch jene Flächen in der entgegengesetzten Richtung fliessenden Mengen negativer Elektricität gleich $-gdt$ und $-hdt$:




Analoge Bedeutungen mögen $g_{,}$, $h_{,}$ und $g_{,,}$, $h_{,,}$ für die beiden andern Flächenpaare haben; ferner sei $g+g_{,}+g_{,,}=G$ und $h+h_{,}+h_{,,}=H$.

Sind also die innerhalb $DxDyDz$ befindlichen Mengen positiver und negativer Elektricität zur Zeit $t$ gleich

$$(1.a)\qquad \begin{matrix} +\eta\,, \\ -\eta\,, \end{matrix}$$

der betrachtete Körper homogen ist) die Dichtigkeiten der strömenden Elektricitäten nicht nur einander gleich, sondern auch an allen Stellen des Körpers und zu allen Zeiten ein und dieselben sein.

Eine zweite Determination ist hinzuzufügen in Betreff der Art und Weise der Bewegung der Quantitäten $\eta$, $\eta$. Es wäre nämlich denkbar und würde mit der Voraussetzung (A.) in Einklang sein, wenn die einzelnen Theilchen, aus denen diese Quantitäten bestehen, hinsichtlich ihrer Geschwindigkeiten eine gewisse Abstufung zeigten. Alsdann würde die Bewegung der positiven Quantität $\eta$ etwa aus $n$ Strömen von verschiedenen Geschwindigkeiten, und diejenige der negativen Quantität $\eta$ aus $n$ entsprechenden Strömen von den entgegengesetzten Geschwindigkeiten bestehen. Wir wollen auch hier der einfachsten Vorstellung den Vorzug geben, nämlich annehmen, dass eine solche Abstufung *nicht* stattfinde, dass also sämmtliche Theilchen der einen Quantität *dieselbe*, und sämmtliche Theilchen der andern die entgegengesetzte Geschwindigkeit besitzen. Alsdann besteht der vorhin genannte Tauschverkehr zwischen der ruhenden und strömenden Elektricität in sehr schnellen, fast momentanen Geschwindigkeitsänderungen. Denn [vgl. (4. a, b)] die positive Quantität $\alpha$, welche zu Anfang der Zeit $dt$ noch der strömenden Elektricität angehörte, ist zu Ende dieser Zeit bereits der ruhenden einverleibt; und das negative Quantum $\alpha$, welches zu Anfang der Zeit $dt$ noch der ruhenden Elektricität angehörte, ist zu Ende dieser Zeit bereits der strömenden einverleibt; so dass also während der Zeit $dt$ theils ein Geschwindigkeits-Uebergang von $V$ zu $0$, theils auch ein Uebergang von $0$ zu $V$ stattgefunden hat, wo $V$ die Geschwindigkeit der strömenden Elektricität bezeichnet.

Bei Hinzufügung dieser neuen Annahmen gewinnt nun die durch (A.) und (B.) angedeutete Anschauungsweise folgende bestimmtere Gestaltung:

(C.) *Bei einem homogenen Körper ist die Dichtigkeit der strömenden Elektricität nicht nur für die beiderlei Elektricitäten, sondern auch an allen Stellen und zu allen Zeiten ein und dieselbe, — also eine dem Körper eigenthümliche Constante, welche mit $E$ bezeichnet werden mag. Demgemäss sind die in einem gegebenen Volumelement $Dx\,Dy\,Dz$ in Strömung begriffenen Elektricitäten unter allen Umständen durch $\pm E Dx\,Dy\,Dz$ darge-*

*stellt, also der Quantität nach constant; jedoch der Geschwindigkeit nach variabel.*

*Mit den elektrischen Strömungen stehen die in dem Volumelement $DxDyDz$ ruhenden Elektricitäten in einem gewissen Tauschverkehr. Denn während jedes Zeitelementes wird im Allgemeinen die eine dieser beiden Elektricitäten durch einen Niederschlag aus der gleichnamigen Strömung um ein gewisses Quantum wachsen, die andere aber durch ein Hineingerissenwerden in die andere Strömung um ein gleich grosses Quantum abnehmen. Demgemäss bewegen sich bei diesem Tauschverkehr gleich grosse Quantitäten positiver und negativer Elektricität in entgegengesetzten Richtungen.*

Dieser Anschauungsweise zufolge ist die algebraische Summe der *strömenden* Elektricitäten stets $= 0$; folglich kann die sogenannte *freie* Elektricität nichts Anderes sein als die algebraische Summe der *ruhenden* Elektricitäten.

Definirt man wie früher (pg. 117) festgesetzt wurde die elektrische *Stromstärke* als die *algebraische Summe* derjenigen Elektricitätsmengen, welche durch einen gegebenen zur Bewegungsrichtung senkrechten Querschnitt während der Zeiteinheit hindurchfliessen, ferner die *Strömung* $i$ als die dem Querschnitt Eins entsprechende Stromstärke, und bezeichnet man endlich die Componenten von $i$ mit $u$, $v$, $w$, so ergeben sich die Formeln

$$(5.)\qquad \begin{aligned} u &= 2Ea\,, \\ v &= 2Eb\,, \\ w &= 2Ec\,, \end{aligned}$$

falls man nämlich unter $a$, $b$, $c$ die *Geschwindigkeit* der strömenden positiven Elektricität, und unter $E$ ihre constante Dichtigkeit versteht. Hält man fest an den früher eingeführten Bezeichnungen (pg. 129), so werden, wie beiläufig bemerkt sein mag, $u$, $v$, $w$ proportional mit $g$, $g_{,}$, $g_{,,}$ sein, nämlich den Formeln entsprechen:

$$(5.x)\qquad \begin{aligned} uDyDzdt &= 2g\,dt\,, \\ vDzDxdt &= 2g_{,}dt\,, \\ wDxDydt &= 2g_{,,}dt\,. \end{aligned}$$

## § 6.

*Fortsetzung. Ueber die Dichtigkeit der freien Elektricität.*

Der Anschauungsweise (A.), (B.), (C.) entsprechend wird offenbar anzunehmen sein,

(D.) ***dass die sogenannte freie Elektricität, mag sie nun im Innern oder an der Oberfläche des Körpers sich befinden, stets in Ruhe sei, und dass sie also ihre Variation nicht irgend welcher eigenen Bewegung, sondern nur ihrem Tauschverkehr mit der strömenden Elektricität verdanke.****)

Die in dem Volumen $DxDyDz$ zu den Zeiten $t$ und $t+dt$ vorhandenen Elektricitätsmengen sind, was ihre *algebraischen Werthe* betrifft, ausgedrückt durch:

(6.a)
$$+\varrho+\eta\,,\qquad -\varrho'-\eta\,,$$

und durch

(6.b)
$$+[\varrho+(G-H)dt]+\eta\,,\qquad -[\varrho'-(G-H)dt]-\eta\,;$$

wie sich aus (4.a,b) sofort ergiebt, falls man für $\alpha$ seine eigentliche Bedeutung substituirt. — Die algebraische Summe der Quantitäten (6.a) ist:

$$\varrho-\varrho'\,,$$

und diejenige der Quantitäten (6.b):

$$\varrho-\varrho'+2(G-H)dt\,.$$

Bezeichnet man daher die Dichtigkeit der freien Elektricität zu den Zeiten $t$ und $t+dt$ mit $\varepsilon$ und $\varepsilon+d\varepsilon$, so wird:

$$\varepsilon\,DxDyDz=\varrho-\varrho'\,,$$
$$(\varepsilon+d\varepsilon)\,DxDyDz=\varrho-\varrho'+2(G-H)dt\,,$$

folglich:

(6.x)
$$(d\varepsilon)DxDyDz=2(G-H)dt;$$

---

*) Diesen Tauschverkehr als eine Bewegung *freier* Elektricität bezeichnen zu wollen, würde nämlich unzulässig sein, weil bei demselben *gleich grosse* Quanta positiver und negativer Elektricität in *entgegengesetzten* Richtungen sich bewegen. [Vrgl. die Schlussbemerkung in (C.)].

und hieraus ergiebt sich, falls man $(G - H)\,dt$ vermittelst der elektrischen Strömungen $u, v, w$ ausdrückt [vrgl. (5. x)], die bekannte Formel:

$$(7.)\qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Bezeichnet man andererseits die Dichtigkeit der freien Elektricität an der *Oberfläche* des Körpers mit $e$, so gelangt man, ebenfalls in bekannter Weise, zu der Formel:

$$(8.)\qquad \frac{\partial e}{\partial t} = -\,[u \cos(N,x) + v \cos(N,y) + w \cos(N,z)]\,,$$

wo $N$ die *innere* Normale der Oberfläche vorstellt; dabei ist vorausgesetzt, dass der Körper überall von einem isolirenden Medium umgeben sei. — Es mag mir gestattet sein, zwei Bemerkungen in Betreff dieser Formel (8.) hier hinzuzufügen.

*Erste Bemerkung.* — Man könnte gegen die Formel (8.) den Einwand machen, dass an der Oberfläche des Conductors im Allgemeinen zweierlei Processe stattfänden, nämlich *erstens* die elektrische Communication zwischen je einem Oberflächenelement und dem angrenzenden Volumelement, *zweitens* die Communication zwischen je zwei aneinandergrenzenden Oberflächenelementen, dass aber bei Ableitung jener Formel nur auf den ersten Process Rücksicht genommen sei. Hierauf ist zu erwidern, dass der zweite Process in Wirklichkeit *nicht* stattfindet. Denn zufolge (D.) kann die an der Oberfläche ausgebreitete freie Elektricität ihre Variation nicht irgend welcher eigenen Bewegung, sondern nur demjenigen Tauschverkehr verdanken, welcher zwischen ihr und den Strömungen im Innern stattfindet.

*Zweite Bemerkung.* — Bringt man die Formel (8.) in Anwendung auf eine isolirte und fest aufgestellte Metallkugel $K$, um welche ein elektrischer Massenpunkt $Q$ (etwa der Mittelpunkt einer gleichmässig mit Elektricität beladenen Schelllackkugel) *langsam* und mit *constanter Geschwindigkeit* im Kreise herumläuft, so scheint ein gewisser Widerspruch sich einzustellen.*) Denn man wird geneigt sein anzunehmen, dass unter diesen Umständen nach Eintritt des stationären Zustandes dieselbe elektrische Oberflächenbelegung vorhanden sein wird, als wenn $Q$ ruhte, nur mit dem Unterschiede, dass jene

*) Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, dass die Kreisbahn des Punktes $Q$ mit der Kugel $K$ *concentrisch* sein soll, und dass ausser diesem Punkte $Q$ *keine weiteren* Kräfte auf die Kugel einwirken sollen.

Belegung im gegenwärtigen Fall Theil nimmt an der Bewegung von $Q$; demnach würde die elektrische Bewegung während des stationären Zustandes überall tangential (also senkrecht zu $N$) sein; hieraus aber würde mit Rücksicht auf (8.) folgen, dass

$$\frac{\partial e}{\partial t} = 0 ,$$

mithin $e$ selber *constant* sei. Trotzdem kann andererseits kein Zweifel darüber stattfinden, dass die Dichtigkeit $e$ an irgend einer Stelle der Kugeloberfläche in Folge der Bewegung von $Q$ fortwährend (und zwar periodisch) variirt. — Dieser Widerspruch kann nur durch die Vorstellung beseitigt werden, dass der eintretende stationäre Zustand (trotz der vorausgesetzten *langsamen* Bewegung des Punktes) wesentlich verschieden sei von demjenigen Zustand, welcher dem *ruhenden* Punkt entspricht.*)

## § 7.

*Fortsetzung. Berechnung der vorhandenen Kräfte.*

Sind $a$, $b$, $c$ und $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ beliebige Grössen, so mögen unter $\Psi(a)$, $\Omega(a^2)$, $\Omega(a\alpha)$ folgende Ausdrücke verstanden werden:

$$\begin{aligned}
&\Psi(a) = \frac{\partial\psi}{\partial x} a + \frac{\partial\psi}{\partial y} b + \frac{\partial\psi}{\partial z} c ,\\
(9.)\quad &\Omega(a^2) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} a^2 + \dots + \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} 2bc + \dots ,\\
&\Omega(a\alpha) = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} a\alpha + \dots + \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} (b\gamma + \beta c) + \dots ;
\end{aligned}$$

so dass also z. B. bei der Entwicklung von $\psi(x+a, y+b, z+c)$ nach Potenzen von $a$, $b$, $c$ die Glieder erster und zweiter Ordnung respective durch $\Psi(a)$ und $\frac{1}{2}\Omega(a^2)$ dargestellt sein würden. Uebrigens soll unter $\psi$ stets die im *Weber*'schen Gesetz vorhandene Function $\psi(r)$ verstanden werden, welche für beträchtliche Entfernungen $= \sqrt{r}$ ist.

Solches vorangeschickt, seien nun $Dx\,Dy\,Dz$ und $Dx_1 Dy_1 Dz_1$ zwei unendlich kleine Parallelepipeda im Innern des gegebenen homogenen Conductors, gelegen an den Orten $x, y, z$ und $x_1, y_1, z_1$. Die

*) Uebrigens dürfte es nicht leicht sein, über den eintretenden stationären Zustand eine deutliche und *mit der Formel* (8.) *verträgliche* Vorstellung sich zu bilden. Ich begnüge mich, auf diesen (wie mir scheint) dunklen Punkt hiemit aufmerksam gemacht zu haben.

in diesen Elementen zur Zeit $t$ vorhandenen Massen *positiven* Fluidums, sowie die augenblicklichen Geschwindigkeiten und Beschleunigungen dieser Massen seien bezeichnet mit $\eta$, $x'$, $y'$, $z'$, $x''$, $y''$, $z''$ und $\eta_1$, $x_1'$, $y_1'$, $z_1'$, $x_1''$, $y_1''$, $z_1''$. Nach dem *Weber*'schen Gesetz (pg. 86):

$$\mathfrak{R} = \eta\eta_1 \left[ -\frac{d\varphi}{dr} + 4A^2 \frac{d\psi}{dr} \frac{d^2\psi}{dt^2} \right] \tag{10.}$$

und mit Benutzung der Abkürzungen (9.) findet man alsdann für die von $\eta_1$ auf $\eta$ ausgeübte Kraft $\mathfrak{R}^{(p)}$ den Werth:

$$\mathfrak{R}^{(p)} = \eta\eta_1 \left[ -\frac{d\varphi}{dr} + 4A^2 \frac{d\psi}{dr} \Psi(x'' - x_1'') + 4A^2 \frac{d\psi}{dr} \Omega((x' - x_1')^2) \right]. \tag{11.}$$

Zufolge unserer Voraussetzungen (A.), (B.), (C.) sind die zur Zeit $t$ in $DxDyDz$ enthaltenen Quanta positiven und negativen Fluidums gleich $\eta$ und $-\eta$, und ihre Geschwindigkeiten gleich $x'$, $y'$, $z'$ und $-x'$, $-y'$, $-z'$. Hieraus aber schliessen zu wollen, dass ihre Beschleunigungen ebenfalls gleich $x''$, $y''$, $z''$ und $-x''$, $-y''$, $-z''$ seien, würde *falsch* sein. Betrachtet man nämlich (wie in der Hydrodynamik) die Geschwindigkeiten als Functionen der Coordinaten und der Zeit:

$$\begin{aligned} x' &= a(x, y, z, t), \\ y' &= b(x, y, z, t), \\ z' &= c(x, y, z, t), \end{aligned}$$

so wird bekanntlich:

$$\begin{aligned} x'' &= \frac{\partial a}{\partial x} a + \frac{\partial a}{\partial y} b + \frac{\partial a}{\partial z} c + \frac{\partial a}{\partial t}, \\ y'' &= \frac{\partial b}{\partial x} a + \frac{\partial b}{\partial y} b + \frac{\partial b}{\partial z} c + \frac{\partial b}{\partial t}, \\ z'' &= \frac{\partial c}{\partial x} a + \frac{\partial c}{\partial y} b + \frac{\partial c}{\partial z} c + \frac{\partial c}{\partial t}; \end{aligned}$$

vertauscht man aber hier $a$, $b$, $c$ mit $-a$, $-b$, $-c$, so schlagen die Beschleunigungen $x''$, $y''$, $z''$ *keineswegs* in ihr Gegentheil um. Folglich sind die Beschleunigungen der Massen $\eta$ und $-\eta$ keineswegs einander entgegengesetzt, vielmehr unter Umständen sogar einander gleich. In der That wird der Fall der Gleichheit stets eintreten, sobald $a$, $b$, $c$ unabhängig von $t$ sind, d. i. sobald der elektrische Strömungszustand stationär geworden ist.

Wollen wir also diejenige Kraft $\mathfrak{R}^{(n)}$ haben, welche das in $Dx_1 Dy_1 Dz_1$ enthaltene *negative* Fluidum $-\eta_1$ auf die schon betrachtete Masse $\eta$ ausübt, so haben wir im Ausdruck (11.) $\eta_1$ mit $-\eta_1$,

ebenso $x_1'$, $y_1'$, $z_1'$ mit $-x_1'$, $-y_1'$, $-z_1'$, hingegen $x_1''$, $y_1''$, $z_1''$ mit $X_1''$, $Y_1''$, $Z_1''$ zu vertauschen, wo die drei letzten Grössen die unbekannten Beschleunigungen von $-\eta_1$ vorstellen. Somit folgt:

$$(12.)\quad \mathfrak{R}^{(n)} = \eta(-\eta_1)\left[-\frac{d\varphi}{dr} + 4A^2\frac{d\psi}{dr}\Psi(x'' - X_1'') + 4A^2\frac{d\psi}{dr}\Omega((x' + x_1')^2)\right];$$

also durch Addition von (11.) und (12.):

$$(13.)\quad \mathfrak{R}^{(p)} + \mathfrak{R}^{(n)} = -\eta\eta_1 \,.\, 4A^2\frac{d\psi}{dr}\Psi(x_1'' - X_1'') - \eta\eta_1 \,.\, 16A^2\frac{d\psi}{dr}\Omega(x'x_1');$$

vgl. die in (9.) getroffenen Festsetzungen.

Die zur Zeit $t$ im Volumen $DxDyDz$ vorhandene *freie* Elektricität (d. i. die algebraische Summe der darin enthaltenen *ruhenden* Elektricitäten) sei bezeichnet mit $\eta^{(f)}$; desgleichen die in $Dx_1Dy_1Dz_1$ vorhandene mit $\eta_1^{(f)}$.

Sind nun $\mathfrak{R}^{(p)}$, $\mathfrak{R}^{(n)}$, $\mathfrak{R}^{(f)}$ die von $\eta_1$, $-\eta_1$, $\eta_1^{(f)}$ auf $\eta$ ausgeübten Kräfte, so besitzen $\mathfrak{R}^{(p)}$, $\mathfrak{R}^{(n)}$ die bereits besprochenen Werthe; ferner wird $\mathfrak{R}^{(f)}$ aus (11.) dadurch zu erhalten sein, dass man daselbst $\eta_1$ mit $\eta_1^{(f)}$, sodann $x_1'$, $y_1'$, $z_1'$ mit 0, 0, 0, endlich $x_1''$, $y_1''$, $z_1''$ ebenfalls mit 0, 0, 0 vertauscht. Also:

$$(14.)\quad \mathfrak{R}^{(f)} = \eta\eta_1^{(f)}\left[-\frac{d\varphi}{dr} + 4A^2\frac{d\psi}{dr}\Psi(x'') + 4A^2\frac{d\psi}{dr}\Omega(x'^2)\right].$$

Hiemit aber ist die Wirkung von $Dx_1Dy_1Dz_1$ auf die Masse $\eta$ noch nicht erschöpft. Denn während der Zeit $dt$ erleidet die in $Dx_1Dy_1Dz_1$ enthaltene *freie* Elektricität $\eta_1^{(f)}$ eine gewisse Variation $d\eta_1^{(f)}$, in Folge ihres von plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen begleiteten Tauschverkehrs mit der *strömenden* Elektricität. Wir haben daher noch diejenigen Kräfte in Rechnung zu bringen, welche durch diese plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen erzeugt werden.

Es seien ähnlich wie früher (pg. 129) $G_1dt$ und $H_1dt$ diejenigen Quanta *positiven* Fluidums, welche während der Zeit $dt$ in das Volumen $Dx_1Dy_1Dz_1$ hinein- und aus demselben herausströmen; und es sei, um die Vorstellung zu fixiren, $G_1 > H_1$. Dann wird während der Zeit $dt$ das Quantum $(G_1 - H_1)\,dt$ *positiven* Fluidums innerhalb des Volumens hängen bleiben, mithin die Geschwindigkeit dieses Quantums während der Zeit $dt$ von $x_1'$, $y_1'$, $z_1'$ auf 0, 0, 0 herabsinken. Die Kraft $\mathfrak{R}^{(\pi)}dt$, welche dieses Quantum $(G_1 - H_1)\,dt$ während der Zeit $dt$ auf die Masse $\eta$ ausübt, hat nach dem *Weber*'schen Gesetz (10.) den Werth:

$$\mathfrak{R}^{(\pi)}dt = \eta\,(G_1 - H_1)\,dt\left[-\frac{d\varphi}{dr}dt + 4A^2\frac{d\psi}{dr}(\psi'_{t+dt} - \psi'_t)\right];$$

hier sind durch die Indices $t$ und $t+dt$ diejenigen Werthe angedeutet, welche $\psi'$ $\left(\text{d. i. } \frac{d\psi}{dt}\right)$ in jenen beiden Zeitaugenblicken besitzt; demgemäss ist:

$$\psi'_t = \frac{\partial\psi}{\partial x}(x' - x_1') + \frac{\partial\psi}{\partial y}(y' - y_1') + \frac{\partial\psi}{\partial z}(z' - z_1') = \Psi(x' - x_1'),$$

$$\psi'_{t+dt} = \frac{\partial\psi}{\partial x}(x' - 0) + \frac{\partial\psi}{\partial y}(y' - 0) + \frac{\partial\psi}{\partial z}(z' - 0) = \Psi(x' - 0).$$

und folglich:

$$\mathfrak{R}^{(\pi)}dt = \eta\,(G_1 - H_1)\,dt\left[-\frac{d\varphi}{dr}\,dt + 4A^2\frac{d\psi}{dr}\Psi(x_1')\right],$$

oder weil das erste Glied in der eckigen Klammer gegen das zweite verschwindend klein ist:

(15.) $$\mathfrak{R}^{(\pi)} = \eta\,(G_1 - H_1)\,.\,4A^2\frac{d\psi}{dr}\Psi(x_1')\,.$$

Andererseits wird während der Zeit $dt$ das Quantum $-(G_1 - H_1)dt$ *negativer* Elektricität aus der in $Dx_1Dy_1Dz_1$ ruhenden Elektricität ausscheiden und in die Bewegung des negativen Fluidums hineingerissen werden, seine Geschwindigkeit also während der Zeit $dt$ vom Werthe 0, 0, 0 zum Werthe $-x_1'$, $-y_1'$, $-z_1'$ übergehen. Die Kraft $\mathfrak{R}^{(\nu)}dt$, welche dieses Quantum während der Zeit $dt$ auf $\eta$ ausübt, ist daher ausgedrückt durch:

$$\mathfrak{R}^{(\nu)}dt = -\eta\,(G_1 - H_1)\,dt\left[-\frac{d\varphi}{dr}\,dt + 4A^2\frac{d\psi}{dr}(\psi'_{t+dt} - \psi'_t)\right],$$

wo diesmal:

$$\psi'_t = \Psi(x' - 0),$$

$$\psi'_{t+dt} = \Psi(x' + x_1').$$

Hieraus folgt:

(16.) $$\mathfrak{R}^{(\nu)} = -\eta\,(G_1 - H_1)\,.\,4A^2\frac{d\psi}{dr}\Psi(x_1')\,.$$

Aus den Formeln (15.) und (16.) folgt*) durch Addition sofort:

(17.) $$\mathfrak{R}^{(\pi)} + \mathfrak{R}^{(\nu)} = 0\,.$$

Dass die Formeln (15.), (16.), (17.) an die vorläufige Voraussetzung: $G_1 > H_1$ nicht gebunden, sondern allgemein gültig sind, erkennt man leicht.

---

*) In diesen Formeln ist übrigens, wie aus (6.x) folgt:

$$G_1 - H_1 = \frac{1}{2}\frac{d\varepsilon_1}{dt}Dx_1Dy_1Dz_1,$$

falls man nämlich unter $\varepsilon_1$ die Dichtigkeit der in $Dx_1Dy_1Dz_1$ enthaltenen *freien* Elektricität versteht.

Versteht man unter

(18.) $$\mathfrak{R}_p, \quad \mathfrak{R}_n, \quad \mathfrak{R}_f$$

diejenigen Kräfte, welche $Dx_1 Dy_1 Dz_1$ auf die drei in $Dx Dy Dz$ enthaltenen Massen $\eta$, $-\eta$, $\eta^{(f)}$ ausübt, so hat die erste dieser Kräfte den Werth:

(19.) $$\mathfrak{R}_p = \mathfrak{R}^{(p)} + \mathfrak{R}^{(n)} + \mathfrak{R}^{(f)} + \mathfrak{R}^{(\pi)} + \mathfrak{R}^{(\nu)};$$

woraus durch Substitution der Ausdrücke (13.), (14.) und (17.) folgt:

(20.) $$\mathfrak{R}_p = -\eta\eta_1^{(f)} \frac{d\varphi}{dr} + \eta\eta_1^{(f)} . 4A^2 \frac{d\psi}{dr} \left[\Psi(x'') + \Omega(x'^2)\right] - \eta\eta_1 . 4A^2 \frac{d\psi}{dr} \left[\Psi(x_1'' - X_1'') + 4\Omega(x'x_1')\right].$$

Hieraus erhält man die Kraft $\mathfrak{R}_n$ durch Vertauschung von $\eta$ mit $-\eta$, von $x'$, $y'$, $z'$ mit $-x'$, $-y'$, $-z'$ und von $x''$, $y''$, $z''$ mit $X''$, $Y''$, $Z''$, falls man nämlich unter den letzten drei Grössen die Beschleunigungen der Masse $-\eta$ versteht. Also:

(21.) $$\mathfrak{R}_n = +\eta\eta_1^{(f)} \frac{d\varphi}{dr} - \eta\eta_1^{(f)} . 4A^2 \frac{d\psi}{dr} \left[\Psi(X'') + \Omega(x'^2)\right] + \eta\eta_1 . 4A^2 \frac{d\psi}{dr} \left[\Psi(x_1'' - X_1'') - 4\Omega(x'x_1')\right].$$

Aus (20.), (21.) folgt durch Addition und Subtraction:

(22.) $$\mathfrak{R}_p + \mathfrak{R}_n = \eta\eta_1^{(f)}\, 4A^2 \frac{d\psi}{dr} \Psi(x'' - X'') - \eta\eta_1 . 4A^2 \frac{d\psi}{dr} . 8\Omega(x'x_1'),$$

(23.) $$\mathfrak{R}_p - \mathfrak{R}_n = -2\eta\eta_1^{(f)} \frac{d\varphi}{dr} + \eta\eta_1^{(f)} . 4A^2 \frac{d\psi}{dr} \left[\Psi(x'' + X'') + 2\Omega(x'^2)\right] - \eta\eta_1\, 4A^2 \frac{d\psi}{dr} . 2\Psi(x_1'' - X_1'').$$

Was endlich die dritte der Kräfte (18.) betrifft, so ergiebt sich diese, sobald man im Ausdruck (20.) $\eta$ mit $\eta^{(f)}$, ferner $x'$, $y'$, $z'$ mit 0, 0, 0, endlich $x''$, $y''$, $z''$ ebenfalls mit 0, 0, 0 vertauscht. Man erhält also:

(24.) $$\mathfrak{R}_f = -\eta^{(f)}\eta_1^{(f)} \frac{d\varphi}{dr} - \eta^{(f)}\eta_1\, 4A^2 \frac{d\psi}{dr} \Psi(x_1'' - X_1'').$$

## § 8.

*Fortsetzung. Ueber die theils ponderomotorische theils elektromotorische Wirkung der vorhandenen Kräfte.*

Nach der Voraussetzung (A.) sollen bei einer elektrischen Bewegung — wie die einwirkenden Kräfte auch beschaffen sein mögen —

stets *gleiche* Quanta der beiderlei Elektricitäten mit *gleichen* Geschwindigkeiten in entgegengesetzten Richtungen fliessen. Somit wird anzunehmen sein, dass die positiven und negativen Elektricitätstheilchen durch einen gewissen *Mechanismus* verbunden sind, welcher bewirkt, dass die Theilchen immer nur *paar*weise sich bewegen können, welcher also z. B. bewirkt, dass kein positives Theilchen $\eta$ eine Bewegung ausführen kann, ohne dass gleichzeitig ein an derselben Stelle befindliches negatives Theilchen $-\eta$ mit gleicher Geschwindigkeit die entgegengesetzte Bewegung erleidet.

In Folge dieses Mechanismus werden zwei auf $\eta$ und $-\eta$ einwirkende Kräfte von *gleicher Stärke*, falls beide in *derselben* Richtung wirken, keine innere Bewegung, sondern nur eine Bewegung des ganzen Körpers hervorzurufen im Stande sein. Mit andern Worten: Zwei gleich starke Kräfte können, falls sie von *gleicher* Richtung sind, keinen elektromotorischen, sondern. nur einen ponderomotorischen Effect haben; und umgekehrt werden sie, im Fall *entgegengesetzter* Richtung, keinen ponderomotorischen, sondern lediglich einen elektromotorischen Effect haben.

Bezeichnet man also (was das von uns betrachtete Volumelement $Dx\,Dy\,Dz$ betrifft) die auf $\eta$ und $-\eta$ einwirkenden Kräfte mit $\mathfrak{R}_p$ und $\mathfrak{R}_n$, und zerlegt man dieselben nach dem Schema:

$$(25.)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{R}_p &= \frac{\mathfrak{R}_p + \mathfrak{R}_n}{2} + \frac{\mathfrak{R}_p - \mathfrak{R}_n}{2}\,, \\ \mathfrak{R}_n &= \frac{\mathfrak{R}_p + \mathfrak{R}_n}{2} - \frac{\mathfrak{R}_p - \mathfrak{R}_n}{2}\,, \end{aligned}$$

so werden die beiden Kräfte $\frac{\mathfrak{R}_p + \mathfrak{R}_n}{2}$ nur einen ponderomotorischen, andererseits die beiden Kräfte $\frac{\mathfrak{R}_p - \mathfrak{R}_n}{2}$ nur einen elektromotorischen Effect haben.

Da ferner zufolge jenes Mechanismus die Theilchen nur *paar*weise sich bewegen können, so wird der an irgend einer Stelle befindliche Ueberschuss d. i. die sogenannte *freie* Elektricität als *unbeweglich* anzusehen sein, mithin anzunehmen sein, dass die auf diese freie Elektricität einwirkenden Kräfte keinen elektromotorischen, sondern nur einen ponderomotorischen Effect haben; folglich ist der auf die Masse $\eta^{(f)}$ einwirkenden Kraft

$$(26.)\qquad \mathfrak{R}_f$$

lediglich ein ponderomotorischer Effect zuzuschreiben.

Bezeichnen wir nun die ponderomotorische Wirkung der drei auf $DxDyDz$ einwirkenden Kräfte $\mathfrak{R}_p$, $\mathfrak{R}_n$, $\mathfrak{R}_f$ kurzweg mit $\mathfrak{R}$, andererseits ihre elektromotorische Wirkung mit $\mathfrak{A}$, so ist nach (25.), (26.):

$$(27.a) \qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_p + \mathfrak{R}_n + \mathfrak{R}_f\,,$$

$$(27.b) \qquad \mathfrak{A} = g\,\frac{\mathfrak{R}_p - \mathfrak{R}_n}{\eta}\,,$$

wo $g$ einen noch unbestimmten Factor bezeichnet. Diese Formeln (27.a,b) entsprechen den früher bei *gleichförmigen* Strömen aufgestellten (12.), (13.) auf pg. 119; und der Factor $g$ wird daher wahrscheinlich ebenso wie dort den Werth $\frac{1}{2}$ haben.

Das Unsichere und Schwankende dieser Betrachtungen hat seinen Grund in der Natur der gemachten Prämissen. Denn so lange wir uns mit Prämissen begnügen, welche, wie die Voraussetzungen (A.), (B.), (C.), (D.), nur gewisse *Symptome* der inneren Mechanik, nicht aber die eigentliche *Einrichtung* derselben betreffen, werden wir den Effect, welchen gegebene Kräfte in Folge dieser inneren Mechanik hervorbringen, mit einiger Sicherheit zu beurtheilen, ausser Stande sein. Das Resultat unserer Betrachtungen wird daher strenge genommen nicht als ein Satz, sondern als eine Hypothese anzusehen sein, die etwa so auszusprechen ist:

(E.) *Werden die in einem gegebenen Volumelement $DxDyDz$ vorhandenen Elektricitäten $\eta$, $-\eta$, $\eta^{(f)}$ der Reihe nach von drei Kräften $\mathfrak{R}_p$, $\mathfrak{R}_n$, $\mathfrak{R}_f$ sollicitirt, welche sämmtlich dieselbe Richtung besitzen, so soll angenommen werden, dass die ponderomotorische Wirkung $\mathfrak{R}$ und die elektromotorische Wirkung $\mathfrak{A}$ dieser drei Kräfte dargestellt seien durch:*

$$(28.a) \qquad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_p + \mathfrak{R}_n + \mathfrak{R}_f\,,$$

$$(28.b) \qquad \mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{R}_p - \mathfrak{R}_n}{2\eta}\,.$$

*Selbstverständlich sind dabei unter $\eta$, $-\eta$ die in dem Volumelement enthaltenen Fluida, und unter $\eta^{(f)}$ das daselbst vorhandene Quantum freier Elektricität zu verstehen.*

Um die ponderomotorische und elektromotorische Wirkung von $Dx_1Dy_1Dz_1$ auf $DxDyDz$ zu erhalten, sind nun für $\mathfrak{R}_p + \mathfrak{R}_n$, $\mathfrak{R}_p - \mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_f$ die Werthe (22.), (23.), (24.) zu substituiren. Alsdann ergiebt sich:

$$(29.a)\quad \mathfrak{R} = -\eta\eta_1 \,.\, 4A^2 \frac{d\psi}{dr}\, 8\Omega\,(x'x_1') + \eta\eta_1^{(f)}\, 4A^2 \frac{d\psi}{dr}\, \Psi\,(x''-X'')$$
$$-\eta^{(f)}\eta_1^{(f)}\frac{d\varphi}{dr} - \eta^{(f)}\eta_1\, 4A^2 \frac{d\psi}{dr}\, \Psi\,(x_1''-X_1'')\,,$$

$$(29.b)\quad \mathfrak{A} = -\eta_1^{(f)}\frac{d\varphi}{dr} + \eta_1^{(f)}\,.\, 4A^2 \frac{d\psi}{dr}\left[\tfrac{1}{2}\,\Psi\,(x''+X'') + \Omega\,(x'^2)\right]$$
$$-\eta\,.\, 4A^2 \frac{d\psi}{dr}\, \Psi\,(x_1''-X_1'')\,.$$

Die ponderomotorische Kraft $\mathfrak{R}$ (29.a) entspricht dem *Princip der Gleichheit der Action und Reaction.* Denn es ist zu beachten, dass der Ausdruck $\Psi$ [vrgl. (9.)] linear ist in Bezug auf $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$, und dass diese Grössen bei einer Vertauschung von $x, y, z$ mit $x_1, y_1, z_1$ ihr Vorzeichen wechseln. — Uebrigens wird im gegenwärtigen Fall, wo $Dx\,Dy\,Dz$ und $Dx_1\,Dy_1\,Dz_1$ *demselben* Körper angehören, die ponderomotorische Kraft $\mathfrak{R}$ annullirt durch die Starrheit der ponderablen Masse.

## § 9.

*Fortsetzung. Ableitung der Kirchhoff'schen Differentialgleichungen.*

Bezeichnet $E$ die *constante* Dichtigkeit der strömenden Elektricität [vrgl. (C.)], und $\varepsilon$, respective $\varepsilon_1$ die *variable* Dichtigkeit der freien Elektricität, so ist:

$$(30.)\quad \begin{aligned} \eta &= E\,Dx\,Dy\,Dz\,, & \eta_1 &= E\,Dx_1\,Dy_1\,Dz_1\,,\\ \eta^{(f)} &= \varepsilon\,Dx\,Dy\,Dz\,, & \eta_1^{(f)} &= \varepsilon_1\,Dx_1\,Dy_1\,Dz_1\,; \end{aligned}$$

ferner ergiebt sich [vrgl. (5.)]:

$$(31.)\quad \begin{aligned} u &= 2Ex'\,, & u_1 &= 2Ex_1'\,,\\ v &= 2Ey'\,, & v_1 &= 2Ey_1'\,,\\ w &= 2Ez'\,, & w_1 &= 2Ez_1'\,, \end{aligned}$$

wo $u, v, w$ und $u_1, v_1, w_1$ die elektrischen Strömungen bezeichnen.

Setzt man [vrgl. pg. 137]:

$$x' = a\,(x, y, z, t)\,, \qquad y' = \text{etc.}\,,$$

so wird:

$$x'' = \left(\frac{\partial a}{\partial x}\,a + \frac{\partial a}{\partial y}\,b + \frac{\partial a}{\partial z}\,c\right) + \frac{\partial a}{\partial t}\,;$$

und hieraus folgt $X''$ durch Vertauschung von $a, b, c$ mit $-a, -b, -c$; also:

$$X'' = \left(\frac{\partial a}{\partial x}\,a + \frac{\partial a}{\partial y}\,b + \frac{\partial a}{\partial z}\,c\right) - \frac{\partial a}{\partial t}\,.$$

Somit folgt weiter:

$$x'' + X'' = 2\left(\frac{\partial a}{\partial x} a + \frac{\partial a}{\partial y} b + \frac{\partial a}{\partial z} c\right),$$
$$x'' - X'' = 2\frac{\partial a}{\partial t};$$

substituirt man nun für die Geschwindigkeiten $a$, $b$, $c$ oder $x'$, $y'$, $z'$ die aus (31.) entspringenden Werthe, und beachtet, dass $E$ eine *Constante* ist [vrgl. (C.)], so folgt:

$$(32.)\qquad x'' + X'' = \frac{1}{2E^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} u + \frac{\partial u}{\partial y} v + \frac{\partial u}{\partial z} w\right) = \frac{\lambda}{2E^2},$$

$$(33.)\qquad x'' - X'' = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u}{E}\right) = \frac{1}{E}\frac{\partial u}{\partial t},$$

wo $\lambda$ zur augenblicklichen Abkürzung dienen soll. Analog mit (33.) ergiebt sich die Formel:

$$(34.)\qquad x_1'' - X_1'' = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{u_1}{E}\right) = \frac{1}{E}\frac{\partial u_1}{\partial t}.$$

Substituirt man in (29.b) die Werthe von $\eta_1$, $\eta_1^{(f)}$ (30.) ferner die Werthe von $x'^2$, $x'' + X''$, $x_1'' - X_1''$ (31.), (32.), (34.), so folgt sofort:

$$(35.)\qquad \mathfrak{A} = -\frac{d\varphi}{dr}\varepsilon_1 Dx_1 Dy_1 Dz_1 + \frac{\varepsilon_1}{E} 4A^2 \frac{d\varphi}{dr}\left[\frac{\Psi(\lambda)}{4E} + \frac{\Omega(u^2)}{4E}\right] Dx_1 Dy_1 Dz_1$$
$$- 4A^2 \frac{d\varphi}{dr}\Psi\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) Dx_1 Dy_1 Dz_1 .$$

Um nun zu den *Kirchhoff*'schen Differentialgleichungen zu gelangen, muss man, wie übrigens schon von *Weber* und später von *Lorberg* betont worden ist, die Voraussetzung eintreten lassen,

(F.) *dass die Dichtigkeit der freien Elektricität, sowohl im Innern wie an der Oberfläche, stets äusserst klein bleibt gegenüber derjenigen der strömenden Elektricität.*

Alsdann wird $\frac{\varepsilon}{E}$, ebenso auch $\frac{\varepsilon_1}{E}$ äusserst klein sein, so dass die mit einem solchen Bruch behafteten Glieder zu vernachlässigen sind. Hiedurch geht die Formel (35.) über in:

$$(36.)\qquad \mathfrak{A} = -\frac{d\varphi}{dr}\varepsilon_1 Dx_1 Dy_1 Dz_1 - 4A^2\frac{d\varphi}{dr}\Psi\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) Dx_1 Dy_1 Dz_1 .$$

Es sei $Do_1$ ein Oberflächenelement des Körpers, und $e_1$ die Dichtigkeit der auf $Do_1$ vorhandenen *freien* Elektricität. Die elektromotorische Kraft $\overline{\mathfrak{A}}$, welche die Elektricitätsmenge $e_1 Do_1$ auf $DxDyDz$ ausübt, kann man, ausgehend von der Formel (29.b), leicht übersehen. Man findet mit Rücksicht auf (D.) und (F.):

$$(37.)\qquad \overline{\mathfrak{A}} = -\frac{d\varphi}{dr} e_1 Do_1 .$$

Aus (36.) und (37.) ergeben sich die $x$ Componenten dieser Kräfte durch Multiplication mit $\frac{x-x_1}{r} = \frac{\partial r}{\partial x}$. Also:

$$(38.)\quad \begin{aligned} \mathfrak{A}_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\, \varepsilon_1 Dx_1 Dy_1 Dz_1 - 4A^2 \frac{\partial \psi}{\partial x}\, \Psi\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right) Dx_1 Dy_1 Dz_1 . \\ \overline{\mathfrak{A}}_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\, e_1 Do_1 ; \end{aligned}$$

oder etwas anders geschrieben:

$$(39.)\quad \begin{aligned} \mathfrak{A}_x &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi \varepsilon_1 Dx_1 Dy_1 Dz_1\right] - A^2 \frac{\partial}{\partial t}\left[4 \frac{\partial \psi}{\partial x}\, \Psi(u_1)\, Dx_1 Dy_1 Dz_1\right], \\ \overline{\mathfrak{A}}_x &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\varphi e_1 Do_1\right] ; \end{aligned}$$

dabei wird dann allerdings festzuhalten sein, dass fortan (abweichend vom bisherigen Gebrauch) unter $x$, $y$, $z$, $x_1$, $y_1$, $z_1$ die Coordinaten der *ponderablen* Massenpunkte, also Grössen zu verstehen sind, die von $t$ unabhängig sind.

Fügt man endlich zu den schon gemachten Voraussetzungen noch die bekannte Annahme hinzu,

(G.) *dass die Componenten $u$, $v$, $w$ der elektrischen Strömung den Componenten der einwirkenden elektromotorischen Kraft stets proportional sind,*

so erhält man die Formeln

$$(40.)\quad u = k\left(\iiint \mathfrak{A}_x + \iint \overline{\mathfrak{A}}_x\right), \qquad v = \text{etc.},$$

die Integrationen ausgedehnt über alle Elemente $Dx_1 Dy_1 Dz_1$ resp. $Do_1$ des gegebenen Körpers. Hieraus folgen nun schliesslich durch Substitution der Werthe (39.) die *Kirchhoff*'schen Differentialgleichungen:

$$(41.)\quad \begin{aligned} u &= -k\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} + A^2 \frac{\partial U}{\partial t}\right), \\ v &= -k\left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} + A^2 \frac{\partial V}{\partial t}\right), \\ w &= -k\left(\frac{\partial \Omega}{\partial z} + A^2 \frac{\partial W}{\partial t}\right), \end{aligned}$$

in denen $\Omega$ das elektrostatische Potential bezeichnet:

$$(42.)\quad \Omega = \iiint \varphi \varepsilon_1 Dx_1 Dy_1 Dz_1 + \iint \varphi e_1 Do_1 ,$$

während $U$, $V$, $W$ die Werthe besitzen:

$$(43.)\quad \begin{aligned} U &= 4\iiint \frac{\partial \psi}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} u_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y} v_1 + \frac{\partial \psi}{\partial z} w_1\right) Dx_1 Dy_1 Dz_1 , \\ V &= 4\iiint \frac{\partial \psi}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} u_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y} v_1 + \frac{\partial \psi}{\partial z} w_1\right) Dx_1 Dy_1 Dz_1 , \\ W &= 4\iiint \frac{\partial \psi}{\partial z}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} u_1 + \frac{\partial \psi}{\partial y} v_1 + \frac{\partial \psi}{\partial z} w_1\right) Dx_1 Dy_1 Dz_1 ; \end{aligned}$$

dabei repräsentirt $k$ eine Constante, die sogenannte **Leitungsfähigkeit.***)

*Bemerkung.* Wollte man in der Hydrodynamik bei Einführung der Bedingungsgleichung $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$ die gleichzeitige Einführung der entsprechenden Kräfte $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ unterlassen, so würde man zu Formeln gelangen, die mit sich selber in Widerspruch sind. — *Ueberhaupt wird, falls ein materielles System irgend welchen Bedingungen unterworfen gedacht werden soll, nicht nur die Einführung der Bedingungen selber, sondern auch die Einführung von* ***Kräften*** *erforderlich sein, welche für die Aufrechterhaltung jener Bedingungen Sorge tragen.***) Adoptirt man also z. B. die in (A.) genannte Voraussetzung, dass in einem elektrischen Strome stets *gleiche* Quanta der beiderlei Elektricitäten mit *gleichen* Geschwindigkeiten in entgegengesetzten Richtungen fliessen, so dürfte man gezwungen sein, daneben auch gewisse *Kräfte* zu adoptiren, welche für ein solches *Gleichsein* Sorge tragen; und diese neuen Kräfte würden alsdann in den Differentialgleichungen (41.) noch hinzuzufügen sein. Allerdings wird man die analytischen Ausdrücke dieser Kräfte nicht gut angeben

*) Für beträchtliche $r$ ist $\varphi = \frac{1}{r}$ und $\psi = \sqrt{r}$, mithin:

(I.) $$\Omega = \iiint \frac{\varepsilon_1 Dx_1 Dy_1 Dz_1}{r} + \iint \frac{e_1 Do_1}{r},$$

(II.) $$U = \iiint \frac{(x-x_1)[(x-x_1)u_1 + (y-y_1)v_1 + (z-z_1)w_1]}{r^3} Dx_1 Dy_1 Dz_1 .$$

Die von *Kirchhoff* mit $u, v, w, U, V, W, k$ benannten Grössen haben eine etwas andere Bedeutung. Bezeichnet man diese *Kirchhoff*'schen Grössen zur Unterscheidung mit $(u), (v), (w), (U), (V), (W), (k)$, so ist (vrgl. die Note pg. 124):

(III.) $$u = 2(u), \qquad v = 2(v), \qquad w = 2(w), \qquad k = 4(k),$$

also mit Rücksicht auf (II.) auch:

(IV.) $$U = 2(U), \qquad V = 2(V), \qquad W = 2(W).$$

Substituirt man diese Werthe in die obigen Formeln (41.), und setzt zugleich $A^2 = \frac{2}{c^2}$, so erhält man sofort:

(V.) $$(u) = -2(k)\left[\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{4}{c^2}\frac{\partial(U)}{\partial t}\right];$$

dies aber ist genau die von *Kirchhoff* gegebene Formel (Poggendorff's Ann. Bd. 102. Berl. Ber. 1857, pg. 387).

**) Gleiches habe ich schon früher bei einer anderen Gelegenheit bemerkt (Mathem. Annalen, Bd. VI, pg. 336).

können, so lange man über jene Voraussetzung (A.) keine deutlicheren Vorstellungen als bisher sich gebildet hat.

## § 10.

*Ueber die betreffenden Aeusserungen von Helmholtz.*

Gelegentlich meiner elektrodynamischen Untersuchungen von 1871 (Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss., October 1871, pg. 477) war von mir bemerkt worden, dass die *Kirchhoff*'schen Differentialgleichungen ausser auf dem *Weber*'schen Gesetz noch auf mancherlei andern *accessorischen Annahmen* beruhen, dass es auch nicht ganz leicht sein werde, diese letztern mit der erforderlichen Schärfe auszusprechen, und dass also das *Weber*'sche Gesetz durch ein gegen diese Differentialgleichungen geäussertes Bedenken nicht erschüttert werden könne.

Mit Bezug hierauf bemerkte sodann Herr *Helmholtz* (Borchardt's J. Bd. 75, pg. 55), jene accessorischen Annahmen seien aus der betreffenden *Kirchhoff*'schen Arbeit leicht herauszulesen, und äusserte sich über dieselben mit folgenden Worten:

(1.) Derselbe (*Kirchhoff*) benutzt den von Herrn *W. Weber* selbst gegebenen Werth für die elektrodynamisch inducirten elektromotorischen Kräfte, welchen dieser unter der Voraussetzung abgeleitet hat, dass *in jedem elektrischen Strome gleich grosse Quanta positiver und negativer Elektricität mit gleichen Geschwindigkeiten in entgegengesetzten Richtungen fliessen*. Aus dieser Voraussetzung können die von Herrn *Kirchhoff* gebrauchten Ausdrücke in der Form, wie er sie braucht, nach bekannten Methoden ohne Schwierigkeit hergeleitet werden. Diese Annahme fällt übrigens mit der andern zusammen, dass an jeder Stelle eines Leiters die absolute Menge beider elektrischen Fluida zusammengenommen stets constant ist. Dieselbe Annahme bedingt auch weiter, dass alle Anziehungskräfte, welche gleichzeitig auf die positive und negative Elektricität des Leiters ausgeübt werden, diesen selbst zu bewegen streben müssen, da die beiden Elektricitäten nicht gleichzeitig ihren Ort verlassen können.

(2.) Es wird vorausgesetzt, dass *die elektrischen Fluida in dem Leiter continuirlich verbreitet sind, und ihre Geschwindigkeiten continuirliche Functionen der Coordinaten sind*. Diese Voraussetzung liegt der Ausführbarkeit der über den Raum erstreckten Integrationen zu Grunde.

(3.) Es werden die Grundhypothesen des *Ohm*'schen Gesetzes gemacht, dass nämlich in jedem Augenblick die elektrische Strömung so hoch steige, bis die durch den Leitungswiderstand erzeugte Gegenkraft der

treibenden elektromotorischen Kraft gleich sei. Es liegt darin die Annahme, dass die elektrischen Fluida keine träge Masse haben.

Es mag gestattet sein, auf den Charakter dieser *Helmholtz*'schen Voraussetzungen (1.), (2.), (3.) etwas näher einzugehen.

Aus der Voraussetzung (1.), welche übereinstimmend ist mit der von mir gemachten Voraussetzung (A.), pg. 129, folgt, dass in jedem Volumelement ausser den gleich grossen Quantitäten *strömender* Elektricität auch noch irgend welche Quantitäten *ruhender* Elektricität vorhanden sind, und dass die algebraische Summe dieser letztern die sogenannte *freie* Elektricität repräsentirt; sodann folgt aus jener Voraussetzung, dass zwischen der *ruhenden* und *strömenden* Elektricität ein gewisser *Tauschverkehr* stattfindet, der Art, dass bald Theilchen der erstern in die Bewegung der letztern hineingerissen werden, bald umgekehrt Theilchen aus der letztern ausscheiden, um der ruhenden Elektricität sich beizugesellen; vrgl. (B.) pg. 131.

In Betreff dieses Tauschverkehrs bedarf es nun aber, um der Rechnung das erforderliche Fundament zu geben, nothwendiger Weise noch weiterer Voraussetzungen. Diese können — eine gewisse Willkühr ist bei ihrer Wahl nicht zu vermeiden — etwa darin bestehen, dass die Dichtigkeit der *strömenden* Elektricität *constant* bleibt, und dass ferner jener Tauschverkehr durch plötzliche, fast momentan erfolgende Geschwindigkeitsänderungen der betreffenden Theilchen bewirkt werde; vrgl. (C.) pg. 132. Derartige Voraussetzungen sind von *Helmholtz nicht* genannt.

Die *Helmholtz*'sche Voraussetzung (1.) führt zu der Vorstellung, dass die sogenannte *freie* Elektricität (im Innern oder an der Oberfläche des Körpers) sich stets in *Ruhe* befindet, dass sie also ihre Variation nicht irgend welcher eignen Bewegung, sondern nur ihrem Tauschverkehr mit der *strömenden* Elektricität verdanke; vrgl. (D.) pg. 134. Sind nun aber $+\eta$, $-\eta$ und $\eta^{(f)}$ die in irgend einem Augenblick in einem Volumelement vorhandenen Quantitäten *strömender* und *freier* Elektricität, und wirken auf diese Massen in ein und derselben Richtung irgend welche Kräfte $\mathfrak{R}_p$, $\mathfrak{R}_n$ und $\mathfrak{R}_f$ ein, so bedarf es, um das für die Rechnung erforderliche Fundament zu gewinnen, weiterer Voraussetzungen über die theils ponderomotorische theils elektromotorische Wirkungsweise dieser Kräfte. In dieser Beziehung kann man etwa — eine gewisse Willkühr ist dabei wiederum nicht

zu vermeiden — annehmen, dass die elektromotorische Wirkung der Kräfte $\mathfrak{R}_p$, $\mathfrak{R}_n$ *proportional mit ihrer Differenz*, und dass andererseits die elektromotorische Wirkung von $\mathfrak{R}_f$ *gleich Null* sei; vrgl. (E.), pg. 142. Von diesen Annahmen ist die erstere von *Helmholtz* in (1.) allerdings angedeutet, die letztere aber *nicht* genannt worden.

Sodann bedarf es, um zu den *Kirchhoff*'schen Differentialgleichungen zu gelangen, der Vernachlässigung gewisser Glieder, die in Bezug auf die elektrischen Strömungen *quadratisch* sind. Hiezu aber bedarf es der Voraussetzung, dass die Dichtigkeit der *freien* Elektricität stets äusserst klein bleibe gegenüber derjenigen der *strömenden* Elektricität, vrgl. (F.), pg. 144. Diese Voraussetzung ist von *Helmholtz nicht* genannt worden.

Was schliesslich die *Helmholtz*'schen Voraussetzungen (2.) und (3.) betrifft, so habe ich nur noch zu bemerken, dass (3.) in Uebereinstimmung steht mit der auch von mir genannten Voraussetzung (G.), pg. 145.

***Aus diesen Expositionen geht hervor, dass jene von Helmholtz namhaft gemachten Voraussetzungen*** (1.), (2.), (3.) ***in mehr als einer Beziehung zur Ableitung der Kirchhoff'schen Differentialgleichungen unzureichend sind.***

## § 11.

*Ueber die betreffenden Aeusserungen von Weber und Lorberg.*

Will man jene accessorischen Voraussetzungen, welche abgesehen vom *Weber*'schen Gesetz den *Kirchhoff*'schen Differentialgleichungen zu Grunde liegen, in erschöpfender Weise angeben, so wird dabei, wie mehrfach betont wurde, eine gewisse Willkühr, eine gewisse Wahl zwischen vielleicht gleich berechtigten, gleich gut sich eignenden Vorstellungen schwerlich zu vermeiden sein. So erklärt sich z. B., dass die von *Weber* und *Lorberg* gewählten Voraussetzungen von den von mir proponirten (A.), (B.), ... (G.) wesentlich verschieden sind. Nach *Weber* (Elektrodynam. Maassbest. 1864, pg. 581) bestehen nämlich die zur Ableitung der *Kirchhoff*'schen Differentialgleichungen erforderlichen Voraussetzungen

(I.) in der Annahme, dass in allen Theilen des Leiters gleiche Mengen von positiver und negativer Elektricität enthalten wären oder genauer (da dies streng genommen so viel heissen würde, als dass die Dich-

tigkeit der freien Elektricität im Innern und an der Oberfläche des Leiters stets Null sein sollte, was nicht der Fall ist), dass wenigstens die vorhandene *freie* Elektricität gegen die Menge des an derselben Stelle vorhandenen *neutralen Gemisches* beider Elektricitäten stets als verschwindend klein betrachtet werden dürfe;

(II.) in der Annahme, dass durch jeden Querschnitt gleichzeitig immer gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität in entgegengesetzter Richtung durchgehen, *was nur dann anzunehmen gestattet ist, wenn man überall eine beliebige Bewegung des neutralen Fluidums hinzugefügt denken darf,* aus dem Grunde nämlich, weil eine solche hinzugefügte Bewegung des neutralen Fluidums, wenn sie wirklich vorhanden wäre, gar keinen Einfluss auf die *Beobachtungen* haben würde;

(III.) in der Annahme einer allgemeineren Geltung des *Ohm*'schen Gesetzes, welche auf die Annahme zurückgeführt werden kann, dass die *Masse* des elektrischen Fluidums gegen die *Masse* seines ponderablen Trägers überall völlig verschwinde, was allerdings allgemein angenommen zu werden pflegt;

ferner ist nach *Lorberg* (Borch. Journal. 1869, Bd. 71, pg. 55) diesen Annahmen noch eine vierte beizufügen, darin bestehend,

(IV.) dass die Dichtigkeit der positiven sowie der negativen *strömenden* Elektricität unabhängig von der Zeit sei.

Es lässt sich über solche Voraussetzungen, so lange nicht, mit denselben Hand in Hand, die Ableitung der betreffenden Gleichungen wirklich durchgeführt wird, nur schwer urtheilen; und ich muss mich daher bei einem Vergleich der *Weber-Lorberg*'schen Voraussetzungen (I.), (II.), (III.), (IV.) mit den von mir in den vorhergehenden §§. proponirten Voraussetzungen (A.), (B.), (C.), (D.), (E.), (F.), (G.) auf einige oberflächliche Bemerkungen beschränken.

Ein Vorzug der *Weber-Lorberg*'schen Voraussetzungen gegenüber den meinigen dürfte darin bestehen, dass bei jenen die *freie* Elektricität an der Bewegung unmittelbar Theil zu nehmen scheint, und daher die Annahme eines von plötzlichen Geschwindigkeitsänderungen begleiteten Tauschverkehrs zwischen ruhender und strömender Elektricität nicht erforderlich ist. Umgekehrt dürfte ein Vorzug der von mir proponirten Voraussetzungen gegenüber den *Weber-Lorberg*'schen darin bestehen, dass ich der wenig ansprechenden Hinzufügung einer Bewegung neutralen Fluidum's nicht bedarf.

Mag man nun aber auch über diese accessorischen Voraussetzungen,

welche, abgesehen vom *Weber*'schen Gesetz, zur Ableitung der *Kirchhoff*'schen Differentialgleichungen erforderlich sind, verschiedener Ansicht sein, — jedenfalls wird man einräumen, dass dieselben nicht minder hypothetisch sind als das *Weber*'sche Gesetz selber; und es bleibt daher immer die Frage, ob der von *Helmholtz* gegen die *Kirchhoff*'schen Differentialgleichungen erhobene Einwand *) dem *Weber*'schen Gesetz oder jenen accessorischen Voraussetzungen aufzubürden ist.

Dritter Abschnitt.

## Das Weber'sche Gesetz unter Zugrundelegung einer gewissen unitarischen Vorstellungsweise.

### § 1.

*Nähere Determination dieser unitarischen Anschauungsweise.*

Wir gehen aus von einer gewissen *unitarischen* Anschauungsweise, nämlich von der Annahme, dass die negative Elektricität mit der ponderablen Masse unlöslich verbunden, die positive Elektricität hingegen ein Fluidum sei, welches durch die Poren der ponderablen Masse in beliebiger Weise sich bewegen kann. Die kleinsten Theilchen der aus ponderabler Masse und negativer Elektricität zusammengesetzten *festen Substanz* mögen mit $m + (-e)$, andererseits die kleinsten Theilchen des aus positiver Elektricität bestehenden *Fluidums* mit $(+e)$ bezeichnet sein. Der Bequemlichkeit willen mag übrigens diese Bezeichnung

| feste Substanz | Fluidum |
|---|---|
| $m + (-e)$ , | $(+e)$ , |

ersetzt werden durch:

$$m + e_, \,, \qquad e_{,,} \,;$$

so dass unter $e_,$ eine negative, unter $e_{,,}$ eine positive Grösse zu verstehen ist.

Ich nenne diese Anschauungsweise eine *unitarische*, weil bei derselben nur die *eine* Elektricität als beweglich angesehen wird;

---

*) Dieser Einwand besteht bekanntlich darin, dass die *Kirchhoff*'schen Differentialgleichungen ein *labiles* Gleichgewicht der Elektricität in leitenden Körpern geben. (Borchardt's J. Bd. 75, pg. 38.)

während bei der gewöhnlichen *dualistischen* Anschauungsweise *beide* Elektricitäten beweglich sind.

Befindet sich die positive Elektricität in einem gegebenen Körper in Bewegung, während der Körper selbst ebenfalls in irgend welcher Bewegung begriffen ist, so wird man erstere als die *relative*, letztere als die *generelle* Bewegung zu bezeichnen haben.

Denkt man sich die *relative* Geschwindigkeit, welche das elektrische Fluidum zur Zeit $t$ an irgend einer Stelle des Körpers besitzt, geometrisch dargestellt durch eine Linie $\lambda$ von entsprechender Richtung und Länge, und senkrecht gegen $\lambda$ ein Flächenelement $D\omega$ construirt, so wird

$$E \lambda D\omega dt$$

diejenige Menge des Fluidums sein, welche während der Zeit $dt$ durch $D\omega$ fliesst; dabei ist unter $E$ die Dichtigkeit des Fluidum's verstanden, und $D\omega$ verbunden zu denken mit der festen Substanz des Körpers, also theilnehmend an der *generellen* Bewegung. — Die eben genannte Menge von Fluidum pflegt man nun kürzer zu bezeichnen mit

$$i D\omega dt ,$$

und $i$ die *Strömung* zu nennen. Somit folgt:

$$i = E\lambda ; \tag{1.a}$$

und hieraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} u &= E\alpha , \\ v &= E\beta , \\ w &= E\gamma , \end{aligned} \tag{1.b}$$

falls man nämlich unter $u$, $v$, $w$ die Componenten der Strömung $i$, anderseits unter $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ diejenigen der Geschwindigkeit $\lambda$ versteht.

Jede elektrische Bewegung ist erfahrungsmässig von einer gewissen Wärmeentwicklung begleitet. Der einfachste Weg zur Erklärung dieser Thatsache dürfte wohl der sein, dass man annimmt, der Durchgang des elektrischen Fluidums durch die Poren der festen Substanz sei erschwert durch eine gewisse *Reibung*; und infolge dieser Reibung transformire sich von der vorhandenen lebendigen Kraft der Bewegung während jedes Zeitelementes ein gewisser Theil in Dasjenige, was wir *Wärme* zu nennen gewohnt sind.

Um in Betreff der anzunehmenden Reibung bestimmte Vorstel-

lungen uns zu bilden, construiren wir im Innern des betrachteten Körpers ein kleines Volumelement

$$Dv\ ;$$

alsdann sind die innerhalb $Dv$ befindlichen Theilchen $m+e_,$ permanent *dieselben*, die darin enthaltenen Theilchen $e_{,,}$ hingegen von Augenblick zu Augenblick *andere*. Das Volumen $Dv$ mag nun eine ungemein grosse Anzahl von Theilchen beiderlei Art beherbergen, trotzdem aber so klein gedacht werden, dass man bei allen Theilchen gleicher Art *einerlei* Geschwindigkeit annehmen darf. Diese Geschwindigkeit mag (in Bezug auf ein ausserhalb des Körpers gedachtes absolut festes Axensystem) für die einen Theilchen mit $\frac{dx_,}{dt}$, $\frac{dy_,}{dt}$, $\frac{dz_,}{dt}$, für die andern mit $\frac{dx_{,,}}{dt}$, $\frac{dy_{,,}}{dt}$, $\frac{dz_{,,}}{dt}$ bezeichnet sein. Ausserdem mag die *Gesammtmasse* dieser im Augenblick $t$ in $Dv$ befindlichen Theilchen $m+e_,$ und $e_{,,}$ mit den analogen Griechischen Buchstaben, nämlich mit $\mu+\eta_,$ und $\eta_{,,}$ bezeichnet sein; so dass also die Formeln stattfinden:

$$(2.)\qquad \mu = \Sigma m\ , \qquad \eta_, = \Sigma e_,\ , \qquad \eta_{,,} = \Sigma e_{,,}\ ,$$

die Summation ausgedehnt über $Dv$.

Die gegenseitige Reibung zwischen den Massen $\mu+\eta_,$ und $\eta_{,,}$ kann nur bedingt sein durch die *relativen* Verhältnisse. Demgemäss ist anzunehmen, dass die Reibung oder Reibungskraft, welche jede der beiden Massen von Seiten der andern erleidet, von entgegengesetzter Richtung und proportionaler Stärke sei mit der relativen Geschwindigkeit der ersten Masse in Bezug auf die letztere. Sind also $\Xi_,$, $\Upsilon_,$, $Z_,$ und $\Xi_{,,}$, $\Upsilon_{,,}$, $Z_{,,}$ die Componenten der respective auf $\mu+\eta_,$ und $\eta_{,,}$ einwirkenden Reibungskräfte, so wird:

$$(3.)\qquad \begin{aligned} \Xi_, &= -\left(\frac{dx_,}{dt} - \frac{dx_{,,}}{dt}\right) hDv\ , &\qquad \Xi_{,,} &= -\Xi_,\ ,\\ \Upsilon_, &= -\left(\frac{dy_,}{dt} - \frac{dy_{,,}}{dt}\right) hDv\ , &\qquad \Upsilon_{,,} &= -\Upsilon_,\ ,\\ Z_, &= -\left(\frac{dz_,}{dt} - \frac{dz_{,,}}{dt}\right) hDv\ , &\qquad Z_{,,} &= -Z_,\ . \end{aligned}$$

Der Proportionalitätsfactor $hDv$ besteht aus dem Volumen $Dv$ und einem zweiten Factor $h$, welcher der Reibungscoefficient heissen mag. Dieser Coefficient $h$ ist abhängig von der Natur und Dichtigkeit der beiderlei Massen $\mu+\eta_,$ und $\eta_{,,}$; oder (was dasselbe) er ist aufzufassen als eine Function von der Dichtigkeit des Fluidums $\eta_{,,}$, jedoch als eine Function, welche von verschiedener Beschaffenheit sein kann je nach der Natur der festen Substanz $\mu+\eta_,$.

Die *Trägheitszahlen* der Massen

$$m + e_, \quad \text{und} \quad e_{,,} , \qquad \mu + \eta_, \quad \text{und} \quad \eta_{,,}$$

bezeichnen wir mit

$$m + m_, \quad \text{und} \quad m_{,,} , \qquad \mu + \mu_, \quad \text{und} \quad \mu_{,,} ;$$

so dass also zu den schon in (2.) erwähnten Relationen:

$$(4.a) \qquad \mu = \Sigma\, m , \qquad \eta_, = \Sigma\, e_, , \qquad \eta_{,,} = \Sigma\, e_{,,} ,$$

noch folgende hinzuzufügen sind:

$$(4.b) \qquad \mu_, = \Sigma\, m_, , \qquad \mu_{,,} = \Sigma\, m_{,,} ,$$

die Summationen stets ausgedehnt über $Dv$.

Wir wollen nun (wie das ja auch sonst üblich ist) annehmen, dass die Trägheit der elektrischen Materie eine *äusserst geringe* ist, dass also $m_,$, $m_{,,}$, $\mu_,$, $\mu_{,,}$ *ausserordentlich kleine* Zahlen sind.

Endlich wollen wir annehmen, dass je zwei elektrische Theilchen nach dem *Weber*'schen Gesetz, oder vielmehr nach dem *modificirten Weber*'schen Gesetz auf einander wirken (pg. 86).

## § 2.

### *Aufstellung der Differentialgleichungen. Ableitung des Joule'schen Gesetzes.*

Bezeichnen wir für irgend zwei Theilchen $m + e_,$ und $e_{,,}$ die Coordinaten mit $x_,$, $y_,$, $z_,$ und $x_{,,}$, $y_{,,}$, $z_{,,}$, ferner die Componenten der einwirkenden Kräfte mit $X_,$, $Y_,$, $Z_,$ und $X_{,,}$, $Y_{,,}$, $Z_{,,}$, so gelten, falls wir von der Reibung einstweilen abstrahiren, die Differentialgleichungen:

$$(5.) \qquad (m + m_,)\frac{d^2x_,}{dt^2} = X_, , \qquad m_{,,}\frac{d^2x_{,,}}{dt^2} = X_{,,} ,$$

etc. etc., etc. etc.,

wo $m_,$, $m_{,,}$ die schon erwähnten Trägheitszahlen vorstellen. Summirt man nun diese Gleichungen über alle zur Zeit $t$ im Volumen $Dv$ vorhandenen Theilchen $m + e_,$ und $e_{,,}$, und betrachtet man $Dv$ als so klein, dass bei allen Theilchen gleicher Gattung *einerlei* Geschwindigkeit und *einerlei* Beschleunigung angenommen werden darf, so erhält man mit Rücksicht auf (4.a, b):

$$(6.) \qquad (\mu + \mu_,)\frac{d^2x_,}{dt^2} = \Sigma_{Dv} X_, , \qquad \mu_{,,}\frac{d^2x_{,,}}{dt^2} = \Sigma_{Dv} X_{,,} ,$$

etc. etc., etc. etc.

Nimmt man endlich Rücksicht auf die zwischen den Massen $\mu + \eta_,$ und $\eta_{,,}$ vorhandene gegenseitige Reibung, so erhält man:

$$(7.)\quad (\mu + \mu_,)\frac{d^2x_,}{dt^2} = \Xi_, + \Sigma_{D\nu} X_, \,, \qquad \mu_{,,}\frac{d^2x_{,,}}{dt^2} = \Xi_{,,} + \Sigma_{D\nu} X_{,,} \,,$$

$$\text{etc. etc.,} \qquad\qquad = -\Xi_, + \Sigma_{D\nu} X_{,,} \,, \quad \text{etc. etc.,}$$

wo $\Xi_,$, $\Upsilon_,$, $Z_,$ und $\Xi_{,,}$, $\Upsilon_{,,}$, $Z_{,,}$ die in (3.) angegebenen Werthe haben.

Aus (7.) folgt sofort:

$$(\mu + \mu_,)\frac{dx_,}{dt}\frac{d^2x_,}{dt^2} + \mu_{,,}\frac{dx_{,,}}{dt}\frac{d^2x_{,,}}{dt^2}$$
$$= \left(\frac{dx_,}{dt} - \frac{dx_{,,}}{dt}\right)\Xi_, + \Sigma_{D\nu}\left(X_,\frac{dx_,}{dt} + X_{,,}\frac{dx_{,,}}{dt}\right),$$

oder falls man für $\Xi_,$ seinen Werth (3.) substituirt:

$$\frac{\mu + \mu_,}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_,}{dt}\right)^2 + \frac{\mu_{,,}}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{dx_{,,}}{dt}\right)^2$$
$$= -\left(\frac{dx_,}{dt} - \frac{dx_{,,}}{dt}\right)^2 hD\nu + \Sigma_{D\nu}\left(X_,\frac{dx_,}{dt} + X_{,,}\frac{dx_{,,}}{dt}\right).$$

Analoge Gleichungen gelten für die $y$- und $z$-Coordinaten. Durch Addition dieser Gleichungen folgt:

$$(8.)\quad \frac{\mu + \mu_,}{2}\frac{d(V_,^2)}{dt} + \frac{\mu_{,,}}{2}\frac{d(V_{,,}^2)}{dt}$$
$$= -\lambda^2 hD\nu + \Sigma_{D\nu}\left(X_,\frac{dx_,}{dt} + \ldots\right) + \Sigma_{D\nu}\left(X_{,,}\frac{dx_{,,}}{dt} + \ldots\right),$$

wo $V_,$, $V_{,,}$, $\lambda$ die Bedeutung haben:

$$(9.)\quad \begin{aligned} V_,^2 &= \left(\frac{dx_,}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_,}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_,}{dt}\right)^2, \\ V_{,,}^2 &= \left(\frac{dx_{,,}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_{,,}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_{,,}}{dt}\right)^2, \\ \lambda^2 &= \left(\frac{dx_,}{dt} - \frac{dx_{,,}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_,}{dt} - \frac{dy_{,,}}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz_,}{dt} - \frac{dz_{,,}}{dt}\right)^2; \end{aligned}$$

so dass also z. B. $\lambda$ die bereits in (1.a, b) besprochene *relative* Geschwindigkeit von $\eta_{,,}$ in Bezug auf $\mu + \eta_,$ vorstellt.

Bedient man sich der Collectivbezeichnungen:

$$x,\ y,\ z \text{ für } \begin{cases} x_,,\ y_,,\ z_, \\ x_{,,},\ y_{,,},\ z_{,,} \end{cases} \qquad \text{und } X,\ Y,\ Z \text{ für } \begin{cases} X_,,\ Y_,,\ Z_,\,, \\ X_{,,},\ Y_{,,},\ Z_{,,}\,, \end{cases}$$

und beachtet man, dass nach (1.a, b) $i = E\lambda$ ist, so kann die Formel (8.) auch so geschrieben werden:

$$(10.)\quad \frac{\mu + \mu_,}{2} d(V_,^2) + \frac{\mu_{,,}}{2} d(V_{,,}^2)$$
$$= -\frac{i^2 h D\nu dt}{E^2} + \Sigma_{D\nu}(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Diese Formel enthält auf ihrer linken Seite denjenigen Zuwachs,

welchen die lebendige Kraft der betrachteten Massen $\mu + \eta_{,}$ und $\eta_{,,}$ erfährt während des Zeitelementes $dt$; sie sagt aus, dass dieser Zuwachs, *falls* $h = 0$, mithin *keine* Reibung vorhanden wäre, den Werth besitzen würde:

$$\Sigma_{Dv} (Xdx + Ydy + Zdz) ,$$

dass er aber in *Wirklichkeit*, in Folge der vorhandenen Reibung, den etwas kleineren Werth hat:

$$-\frac{i^2 h Dv\, dt}{E^2} + \Sigma_{Dv} (Xdx + Ydy + Zdz) .$$

Die Grösse $\frac{i^2 h Dv\, dt}{E^2}$ repräsentirt also denjenigen Betrag, um welchen die lebendige Kraft jener beiden Massen, in Folge der Reibung, *zu wenig* angewachsen ist, oder (was dasselbe) denjenigen Theil jener lebendigen Kraft, der während der Zeit $dt$, in Folge der Reibung, scheinbar verloren gegangen ist. Demgemäss wird die Grösse $\frac{i^2 h Dv\, dt}{E^2}$ aufzufassen sein als die während der Zeit $dt$ im Volumen $Dv$ entwickelte *Wärmemenge*.

Dieses Resultat steht in guter Uebereinstimmung mit dem *Joule*schen Gesetz, nach welchem die innerhalb $Dv$ sich entwickelnde Wärmemenge $dQ$ den Werth hat:

$$dQ = \frac{i^2 Dv\, dt}{k} , \tag{11.}$$

wo $k$ die Leitungsfähigkeit bezeichnet. Die Uebereinstimmung ist eine vollständige, falls man nur anzunehmen berechtigt ist, dass

$$\frac{1}{k} = \frac{h}{E^2} , \tag{12.}$$

dass also *die reciproce Leitungsfähigkeit gleich sei dem Reibungscoefficienten, dividirt durch das Quadrat der Fluidums-Dichtigkeit.*

Solches vorausgesetzt, kann die Formel (10.) so dargestellt werden:

$$dT + dQ = \Sigma_{Dv} (Xdx + Ydy + Zdz) , \tag{13.a}$$

wo die Ausdrücke

$$\begin{aligned} dT &= \frac{\mu + \mu_{,}}{2} d (V_{,}^2) + \frac{\mu_{,,}}{2} d (V_{,,}^2) , \\ dQ &= \frac{i^2 Dv\, dt}{k} \end{aligned} \tag{13.b}$$

diejenigen Quanta von lebendiger Kraft und Wärme vorstellen, welche während der Zeit $dt$ in den betrachteten Massen $\mu + \eta_{,}$ und $\eta_{,,}$ sich entwickeln. Die Formel sagt also aus, *dass das während der Zeit dt*

*im Volumen Dv entstandene Quantum von lebendiger Kraft und Wärme gleichgross ist mit derjenigen Arbeit, welche während dieser Zeit ausgeübt ist auf sämmtliche in Dv enthaltene Materie.*

## § 3.

*Ueber die Zerlegung der Verschiebungen und Arbeiten in generelle und relative.*

Es mögen die Collectivbezeichnungen eingeführt werden:

$$(14.)\quad p \text{ für } \begin{cases} m + e_{,}\,, \\ e_{,,}\,, \end{cases} \quad x, y, z \text{ für } \begin{cases} x_{,}, y_{,}, z_{,}\,, \\ x_{,,}, y_{,,}, z_{,,}\,, \end{cases} \quad X, Y, Z \text{ für } \begin{cases} X_{,}, Y_{,}, Z_{,}\,, \\ X_{,,}, Y_{,,}, Z_{,,}\,; \end{cases}$$

und zwar mögen die Coordinaten $x$, $y$, $z$ und die Componenten $X$, $Y$, $Z$, ebenso wie bisher, bezogen sein auf ein *absolut unbewegliches* Axensystem. — Zwischen diesen Coordinaten $x$, $y$, $z$ des Theilchens $p$ und zwischen denjenigen Coordinaten $\xi$, $v$, $\zeta$, welche das Theilchen besitzt in Bezug auf ein mit der ponderablen Masse des betrachteten Körpers verbundenes Axensystem, finden Rèlationen statt von der Form:

$$(15.)\quad \begin{aligned} x &= C^1 + C^{11}\xi + C^{12}v + C^{13}\zeta\,, \\ y &= C^2 + C^{21}\xi + C^{22}v + C^{23}\zeta\,, \\ z &= C^3 + C^{31}\xi + C^{32}v + C^{33}\zeta\,. \end{aligned}$$

Die Coefficienten $C$ sind Functionen der Zeit, entsprechend der *generellen* Bewegung des Körpers; andererseits sind $\xi$, $v$, $\zeta$ ebenfalls Functionen der Zeit, abhängig von der *relativen* Bewegung des Theilchens $p$. Genauer ausgedrückt, sind daher $\xi$, $v$, $\zeta$ nur dann Functionen der Zeit, wenn das Theilchen $p$ dem Fluidum zugehört, hingegen Constante, sobald dasselbe der festen Substanz angehört; mit andern Worten: $\xi$, $v$, $\zeta$ sind Functionen der Zeit oder Constante, jenachdem $p$ von der Form $e_{,,}$ oder von der Form $m + e_{,}$ ist.

Wir wollen nun die Zeit $t$ specieller mit $\tau$ benennen, insofern sie Argument der $C$, hingegen mit $\vartheta$, insofern sie Argument der $\xi$, $v$, $\zeta$ ist. Die Formeln (15.) nehmen alsdann, wenn wir sie successive zuerst auf ein Theilchen $m + e_{,}$, sodann auf ein Theilchen $e_{,,}$ anwenden, folgendes Gepräge an:

$$(16.)\quad \begin{aligned} x_{,} &= f(\tau)\,, & x_{,,} &= F(\tau, \vartheta)\,, \\ y_{,} &= g(\tau)\,, & y_{,,} &= G(\tau, \vartheta)\,, \\ z_{,} &= h(\tau)\,, & z_{,,} &= H(\tau, \vartheta)\,, \end{aligned}$$

wo $f$, $g$, $h$ und $F$, $G$, $H$ Functionen der beigefügten Argumente vorstellen. In beiden Fällen nämlich sind die $C$ abhängig von $\tau$, während die $\xi$, $\nu$, $\zeta$ im erstern Fall (für das Theilchen $m + e_{,}$) Constante, hingegen im letztern Fall (für das Theilchen $e_{,,}$) Functionen von $\vartheta$ sind.

Ferner mag gesetzt werden:

$$(17.)\qquad \frac{\partial}{\partial\tau}\, dt = \delta\,, \qquad \frac{\partial}{\partial\vartheta}\, dt = \Delta\,.$$

Dann ist allgemein

für jedes Theilchen $p$: oder was dasselbe ist:

$$(18.)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial\tau} + \frac{\partial x}{\partial\vartheta}\,, & dx &= \delta x + \Delta x\,,\\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial\tau} + \frac{\partial y}{\partial\vartheta}\,, & dy &= \delta y + \Delta y\,,\\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial\tau} + \frac{\partial z}{\partial\vartheta}\,, & dz &= \delta z + \Delta z\,; \end{aligned}$$

nur mit dem Unterschiede, dass $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ bald Null, bald von Null verschieden sind, jenachdem $p$ der festen Substanz oder dem Fluidum zugehört.

Durch (18.) ist die *wirkliche* Verschiebung $dx$, $dy$, $dz$ des Theilchens $p$ in zwei partielle Verschiebungen $\delta x$, $\delta y$, $\delta z$ und $\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$ zerlegt, von denen die erstere als *generelle*, die letztere als *relative* zu bezeichnen sein wird. Der Ausdruck $Xdx + Ydy + Zdz$ repräsentirt die Arbeit, welche eine auf das Theilchen $p$ einwirkende Kraft $X$, $Y$, $Z$ während der Zeit $dt$ verrichtet, und kann offenbar, entsprechend den Formeln (18.), ebenfalls in zwei Theile zerlegt werden:

$$(19.)\quad Xdx + Ydy + Zdz = (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) + (X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z)\,,$$

in die *generelle* und in die *relative* Arbeit.

Bringen wir nun die für ein beliebiges Theilchen $p$ eingeführten Bezeichnungen auf irgend zwei Theilchen $m + e_{,}$ und $e_{,,}$ in Anwendung, welche im betrachteten Augenblick *einander unendlich nahe* liegen, so ergeben sich die Formeln:

$$(20.a)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial x_{,}}{\partial\tau} &= \frac{\partial x_{,,}}{\partial\tau}\,,\\ \frac{\partial x_{,}}{\partial\vartheta} &= 0\,, \end{aligned}$$

ferner folgende:

$$(20.b)\qquad \begin{aligned} \frac{dx_{,}}{dt} &= \frac{\partial x_{,}}{\partial\tau}\,, & \frac{dx_{,,}}{dt} &= \frac{\partial x_{,,}}{\partial\tau} + \frac{\partial x_{,,}}{\partial\vartheta}\,,\\ \frac{d^2x_{,}}{dt^2} &= \frac{\partial^2 x_{,}}{\partial\tau^2}\,, & \frac{d^2x_{,,}}{dt^2} &= \frac{\partial^2 x_{,,}}{\partial\tau^2} + 2\,\frac{\partial^2 x_{,,}}{\partial\tau\,\partial\vartheta} + \frac{\partial^2 x_{,,}}{\partial\vartheta^2}\,; \end{aligned}$$

aus (20. b) aber ergiebt sich mit Rücksicht auf (20. a) sofort:

(20. c) $$\frac{dx_{\prime\prime}}{dt} - \frac{dx_{\prime}}{dt} = \frac{\partial x_{\prime\prime}}{\partial \vartheta}.$$

Analoge Formeln gelten für die $y$- und $z$-Coordinaten.

In solcher Weise können alle nach $t$ gebildeten Differentialquotienten reducirt werden auf partielle Ableitungen nach $\tau$ und $\vartheta$; wobei als durchgreifende Regel festzuhalten ist, *dass die* $x_{\prime}$, $y_{\prime}$, $z_{\prime}$ *nur von* $\tau$, *hingegen die* $x_{\prime\prime}$, $y_{\prime\prime}$, $z_{\prime\prime}$ *von* $\tau$ *und* $\vartheta$ *abhängen*, [vgl. (16.)]. Repräsentiren $\lambda$ und $i$ die *relative Geschwindigkeit* und die sogenannte *Strömung* des Fluidums und bezeichnet man die Componenten von $\lambda$ mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, diejenigen von $i$ mit $u$, $v$, $w$, so ist offenbar: $\alpha = \frac{dx_{\prime\prime}}{dt} - \frac{dx_{\prime}}{dt}$, also nach (20. c): $\alpha = \frac{\partial x_{\prime\prime}}{\partial \vartheta}$. Mit Rücksicht auf (1. a, b) ergeben sich daher folgende Formeln:

(20. d) $$\begin{aligned} i &= E\lambda, \\ u &= E\alpha = E\left(\frac{dx_{\prime\prime}}{dt} - \frac{dx_{\prime}}{dt}\right) = E\frac{\partial x_{\prime\prime}}{\partial \vartheta}, \\ v &= E\beta = E\left(\frac{dy_{\prime\prime}}{dt} - \frac{dy_{\prime}}{dt}\right) = E\frac{\partial y_{\prime\prime}}{\partial \vartheta}, \\ w &= E\gamma = E\left(\frac{dz_{\prime\prime}}{dt} - \frac{dz_{\prime}}{dt}\right) = E\frac{\partial z_{\prime\prime}}{\partial \vartheta}. \end{aligned}$$

## § 4.

*Zwei aus den Differentialgleichungen sich ergebende Theoreme.*

Solches vorausgeschickt, kehren wir nun zurück zu den früher gefundenen Differentialgleichungen (7.):

(21.) $$(\mu + \mu_{\prime})\frac{d^2x_{\prime}}{dt^2} = \Xi_{\prime} + \Sigma_{D\nu} X_{\prime}, \qquad \mu_{\prime\prime}\frac{d^2x_{\prime\prime}}{dt^2} = \Xi_{\prime\prime} + \Sigma_{D\nu} X_{\prime\prime}.$$

Aus denselben folgt durch Addition und mit Rücksicht auf (3.):

(22.) $$(\mu + \mu_{\prime})\frac{d^2x_{\prime}}{dt^2} + \mu_{\prime\prime}\frac{d^2x_{\prime\prime}}{dt^2} = \Sigma_{D\nu}(X_{\prime} + X_{\prime\prime}).$$

Ferner folgt aus der Gleichung (21.) rechter Hand, falls man für $\Xi_{\prime\prime}$ seinen Werth (3.) substituirt:

$$\mu_{\prime\prime}\frac{d^2x_{\prime\prime}}{dt^2} = \left(\frac{dx_{\prime}}{dt} - \frac{dx_{\prime\prime}}{dt}\right) hD\nu + \Sigma_{D\nu} X_{\prime\prime};$$

diese Formel aber kann mit Rücksicht auf (20. d) auch so geschrieben werden:

$$\mu_{\prime\prime}\frac{d^2x_{\prime\prime}}{dt^2} = -\frac{u}{E}\, hD\nu + \Sigma_{D\nu} X_{\prime\prime},$$

oder, weil nach (12.) $h = \frac{E^2}{k}$ ist, auch so:

(23.) $$\mu_{''} \frac{d^2 x_{''}}{dt^2} = - \frac{uEDv}{k} + \Sigma_{Dv} X_{''} .$$

Nach einer schon erwähnten Annahme sollen die Trägheitszahlen der elektrischen Materie als verschwindend klein angesehen werden. Demgemäss können $\mu_{,}$ und $\mu_{''}$ in den Gleichungen (21.), (22.), (23.) ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden. Alsdann aber folgt aus (22.)

$$\mu \frac{d^2 x_{,}}{dt^2} = \Sigma_{Dv} (X_{,} + X_{''}) \text{ , und ebenso:}$$

(24.) $$\mu \frac{d^2 y_{,}}{dt^2} = \Sigma_{Dv} (Y_{,} + Y_{''}) \text{ ,}$$

$$\mu \frac{d^2 z_{,}}{dt^2} = \Sigma_{Dv} (Z_{,} + Z_{''}) \text{ .}$$

Diese Gleichungen (24.) beziehen sich auf die im Volumelement $Dv$ permanent enthaltene Masse $\mu + \eta_{,}$ und auf die darin temporär vorhandene Masse $\eta_{''}$; denn die rechten Seiten repräsentiren die Summen *sämmtlicher* distantiellen*) Kräfte, welche auf die eben genannten Massen einwirken. Die Gleichungen sagen daher aus, dass die Bewegung der *ponderablen Masse* $\mu$ in dem betrachteten Augenblick in solcher Weise vor sich geht, als würde sie sollicitirt von *all'* jenen Kräften, nicht nur von denen, welche auf sie selber, sondern auch von denen, welche auf $\eta_{,}$ und $\eta_{''}$ einwirken. Es enthalten also die Gleichungen den wichtigen Satz, dass die auf irgend eine ponderable Masse ausgeübte bewegende Kraft identisch ist mit der Resultante sämmtlicher distantiellen Kräfte, welche einwirken theils auf die ponderable Masse selber, theils auf die augenblicklich in ihr enthaltene elektrische Materie; einen Satz, den man kürzer auch so andeuten kann:

(25.) ***Die auf die elektrische Materie ausgeübten Kräfte übertragen sich unmittelbar auf die ponderable Masse, genau ebenso, als befände sich in dem betrachteten Augenblick nicht nur die negative, sondern auch die positive Elektricität mit der ponderablen Masse in fester Verbindung.***

Man betrachtet diesen Satz gewöhnlich als selbstverständlich. Dass das indessen *nicht* der Fall sei, zeigt die hier für den Satz gegebene Deduction. Denn aus dieser Deduction geht hervor, dass die Richtigkeit des Satzes wesentlich geknüpft ist an die Voraussetzung, die elektrische Materie besitze *keine* oder nur eine *verschwindend geringe* Trägheit.

---

*) Das Epitheton »*distantiell*« soll dienen, um die Reibungskräfte auszuschliessen.

Andererseits ergiebt sich aus (23.), falls man die Trägheitszahl $\mu_{''}$ der elektrischen Materie wiederum vernachlässigt:

(26.) $$0 = -\frac{uEDv}{k} + \Sigma_{Dv} X_{''} ,$$

oder was dasselbe ist:

(27.) $$u = k\,\frac{\Sigma_{Dv} X_{''}}{EDv}\,, \quad \text{und ebenso:}$$
$$v = k\,\frac{\Sigma_{Dv} Y_{''}}{EDv}\,,$$
$$w = k\,\frac{\Sigma_{Dv} Z_{''}}{EDv}\,.$$

Unter den Componenten einer *elektromotorischen Kraft* pflegt man diejenigen Grössen zu verstehen, welche multiplicirt mit der Leitungsfähigkeit die elektrischen Strömungscomponenten geben. Demgemäss können wir auf Grund der Formeln (27.) sagen, in dem betrachteten Volumelement $Dv$ sei eine elektromotorische Kraft $\mathfrak{A}$ vorhanden, deren Componenten $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ die Werthe haben:

(28.) $$\mathfrak{A}_x = \frac{\Sigma_{Dv} X_{''}}{EDv}\,,$$
$$\mathfrak{A}_y = \frac{\Sigma_{Dv} Y_{''}}{EDv}\,,$$
$$\mathfrak{A}_z = \frac{\Sigma_{Dv} Z_{''}}{EDv}\,.$$

Die Kräfte $X_{''}$, $Y_{''}$, $Z_{''}$ beziehen sich ausschliesslich auf das elektrische *Fluidum*. So repräsentirt z. B. $\Sigma_{Dv} X_{''}$ die Summe sämmtlicher Kräfte, welche auf das in $Dv$ enthaltene Fluidum $\eta_{''}$ ausgeübt werden in der Richtung der $x$ Axe. Dieses $\eta_{''}$ aber ist vom Werthe:

$$\eta_{''} = EDv\,,$$

weil $E$ die Dichtigkeit des Fluidums vorstellt. Folglich kann der Bruch

$$\frac{\Sigma_{Dv} X_{''}}{EDv} \quad \text{oder} \quad \frac{\Sigma_{Dv} X_{''}}{\eta_{''}}$$

bezeichnet werden als diejenige Kraft, welche in der Richtung der $x$ Axe ausgeübt wird auf die Massen*einheit* des Fluidums. Somit kann der Inhalt der Formeln (28.) folgendermassen ausgesprochen werden:

(29.) *Die in irgend einem Punkt des betrachteten Körpers vorhandene elektromotorische Kraft ist identisch mit der daselbst auf das Fluidum ausgeübten Kraft, letztere bezogen gedacht auf die Masseneinheit des Fluidums.*

Die beiden Theoreme (25.) und (29.) habe ich genau in derselben Weise schon früher abgeleitet, in den Berichten der Kgl. Sächs.

Ges. d. Wiss. vom 20. October 1871, pg. 409 und 410. In der That sind die bisherigen §§. des gegenwärtigen Abschnittes nur eine Reproduction der dort schon mitgetheilten Untersuchungen. In gewisser Beziehung sind sogar die dort mitgetheilten Untersuchungen noch allgemeiner. Denn während ich *hier* den betrachteten Körper als *homogen* vorausgesetzt, von *Volta*'schen Contactkräften also abstrahirt habe, ist *dort* das etwaige Vorhandensein solcher Contactkräfte mitberücksichtigt worden.

## § 5.

### *Ueber eine Bemerkung des Herrn Helmholtz.*

Ueber die im vorhergehenden §. mitgetheilten Untersuchungen, welche genau in derselben Weise, nur unter Anwendung anderer Bezeichnungen, schon 1871 (Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. October 1871, pg. 405—410) von mir publicirt sind, hat Herr *Helmholtz* im Jahr 1872 im *Borchardt*'schen Journal eine Bemerkung gemacht, welche mir im Ganzen wenig verständlich ist. Es erscheint mir daher angemessen, dieselbe hier wörtlich abdrucken zu lassen. Nur werde ich dabei, was die Nummern der Formeln und die in den Formeln angewendeten Bezeichnungen betrifft, diejenigen Abänderungen eintreten lassen, welche erforderlich sind, um jene Bemerkung des Herrn *Helmholtz* mit der von mir im vorhergehenden §. gegebenen Darstellung in unmittelbaren Connex zu bringen.

Herr *Helmholtz* spricht am angeführten Orte (Borchardt's Journal, Bd. 75, S. 55) über die den *Kirchhoff*'schen Differentialgleichungen zu Grunde liegenden Hypothesen, und fährt dann folgendermassen fort:

> Bei diesem Punkt erlaube ich mir auf einen Fehler aufmerksam zu machen, den Herr *C. Neumann* — — — — in seinen Rechnungen begangen hat. Er behauptet — — —, dass er durch seine Gleichungen (24.) »den wichtigen Satz, dass die auf irgend eine ponderable Masse ausgeübte bewegende Kraft identisch ist mit der Resultante aller distantiellen Kräfte, welche einwirken theils auf die ponderable Masse selber, theils auf die augenblicklich in ihr enthaltene elektrische Materie«, bewiesen habe, und fügt hinzu: »Man betrachtet diesen Satz gewöhnlich als selbstverständlich. Dass das indessen *nicht* der Fall sei, zeigt die hier für den Satz gegebene Deduction. Denn aus dieser Deduction geht hervor, dass die Richtigkeit

des Satzes wesentlich geknüpft ist an die Voraussetzung, die elektrische Materie besitze *keine* oder nur eine *verschwindend geringe* Trägheit«. Ich erstaunte nicht wenig, als ich diesen Satz las, denn in den Hypothesen, von denen Herr *C. Neumann* ausging, und auf welche seine »Deduction« gegründet ist, war über die mechanischen Beziehungen zwischen der sich bewegenden, hier nur positiven Elektricität und der Materie des Leiters nichts weiter angenommen, als dass die Elektricität der Reibung des Leitungswiderstandes*) — — — — unterworfen sei. Dass nun durch blosse Rechnung eine neue mechanische Beziehung zwischen beiden, zu welcher in den Prämissen kein Grund gelegt war, erzeugt werden sollte, machte mich neugierig, das Verfahren kennen zu lernen, welches so etwas leisten konnte. Der Fehler ist einfach folgender: In Gleichung (22.) kommt ein Summandus vor $\mu_{\prime\prime} \frac{d^2 x_{\prime\prime}}{dt^2}$, worin $\mu_{\prime\prime}$ die träge Masse der positiven Elektricität, $x_{\prime\prime}$ deren $x$-Coordinate bezeichnet. Herr *Neumann* setzt, der von ihm erwähnten Annahme gemäss, die er erst einführt, nachdem die genannte Gleichung gebildet ist, $\mu_{\prime\prime} = 0$, und lässt den genannten Summandus ausfallen. In Gleichung (23.) aber ist $\mu_{\prime\prime} \frac{d^2 x_{\prime\prime}}{dt^2}$ einer endlichen Kraft gleichgesetzt, und wenn also $\mu_{\prime\prime} = 0$, so wird die Beschleunigung $\frac{d^2 x_{\prime\prime}}{dt^2}$ unendlich gross, aber das Product beider wird darum noch nicht Null, kann also aus Gleichung (22.) noch nicht weggelassen werden. Vielmehr müsste erwiesen werden, dass die Summe der Kräfte, welcher $\mu_{\prime\prime} \frac{d^2 x_{\prime\prime}}{dt^2}$ gleich gesetzt ist, gleich Null sei, und dieser Beweis wird sich, soviel ich sehe, nur führen lassen, wenn der angeblich deducirte Satz (25.) als Voraussetzung angenommen wird.

Herr *Helmholtz* hat wahrscheinlich übersehen, dass die Kräfte $X_{\prime\prime}$, $Y_{\prime\prime}$, $Z_{\prime\prime}$ in (23.) das *Weber*'sche Gesetz befolgen sollen, und daher mit Gliedern behaftet sein werden, welche die zweiten Differentialquotienten $\frac{d^2 x_{\prime\prime}}{dt^2}$, $\frac{d^2 y_{\prime\prime}}{dt^2}$, $\frac{d^2 z_{\prime\prime}}{dt^2}$ enthalten.

Demgemäss habe ich, trotz der Bemerkung des Herrn *Helmholtz*, meine ursprüngliche Darstellung (Ber. d. Kön. Sächs. Ges. d. Wiss., October 1871, pg. 405—410) *in ungeänderter Weise* beibehalten.

---

*) Bei *Helmholtz* heisst es: »nichts weiter angenommen, als dass die Elektricität der Reibung des Leitungswiderstandes *und den voltaischen elektromotorischen Kräften (Schiebungskräften)* unterworfen sei«.

Beschränken wir uns aber, wie überall in der gegenwärtigen Abhandlung, auf den Fall eines *homogenen* Leiters, so werden jene voltaischen Kräfte verschwinden, einer besonderen Erwähnung also nicht bedürfen.

## § 6.

*Die Formeln der mechanischen und calorischen Energie.*

Die beiden ersten der Gleichungen (24.) und (27.) lauten:

$$(30.)\qquad \mu\frac{d^2x_,}{dt^2} = \Sigma_{D\mathsf{v}}(X_, + X_{,,})\,,\qquad \frac{uED\mathsf{v}}{k} = \Sigma_{D\mathsf{v}} X_{,,}\,.$$

Nun ist nach (20.a, b) und (20.d):

$$(31.)\qquad \frac{dx_,}{dt} = \frac{\partial x_,}{\partial\tau} = \frac{\partial x_{,,}}{\partial\tau}\,,\qquad \frac{u}{E} = \frac{\partial x_{,,}}{\partial\vartheta}\,.$$

Durch Multiplication von (30.) und (31.) folgt aber:

$$(32.)\qquad \mu\frac{dx_,}{dt}\frac{d^2x_,}{dt^2} = \Sigma_{D\mathsf{v}}\left(X_,\frac{\partial x_,}{\partial\tau} + X_{,,}\frac{\partial x_{,,}}{\partial\tau}\right),\qquad \frac{u^2D\mathsf{v}}{k} = \Sigma_{D\mathsf{v}}\left(X_{,,}\frac{\partial x_{,,}}{\partial\vartheta}\right);$$

denn das Volumen $D\mathsf{v}$ kann so klein gedacht werden, dass z. B. $\frac{\partial x_,}{\partial\tau}$ innerhalb desselben überall *denselben* Werth hat, also *unter* das Summenzeichen gestellt werden kann; ebenso verhält es sich mit $\frac{\partial x_{,,}}{\partial\tau}$ und $\frac{\partial x_{,,}}{\partial\vartheta}$. Uebrigens können die Formeln (32.) auch so geschrieben werden:

$$(33.)\quad \frac{\mu}{2}d\left(\frac{dx_,}{dt}\right)^2 = \Sigma_{D\mathsf{v}}\left(X_,\frac{\partial x_,}{\partial\tau} + X_{,,}\frac{\partial x_{,,}}{\partial\tau}\right)dt,\quad \frac{u^2D\mathsf{v}dt}{k} = \Sigma_{D\mathsf{v}}\left(X_,\frac{\partial x_,}{\partial\vartheta} + X_{,,}\frac{\partial x_{,,}}{\partial\vartheta}\right)dt;$$

denn zufolge (20.a) ist:

$$(34.)\qquad \frac{\partial x_,}{\partial\vartheta} = 0\,.$$

Endlich können die Formeln (33.) durch Benutzung der Collectivbezeichnungen (14.) und mit Rücksicht auf (17.) in die einfachere Gestalt versetzt werden:

$$(35.)\qquad \frac{\mu}{2}d\left(\frac{dx_,}{dt}\right)^2 = \Sigma_{D\mathsf{v}}\left(X\frac{\partial x}{\partial\tau}\right)dt\,,\qquad \frac{u^2D\mathsf{v}dt}{k} = \Sigma_{D\mathsf{v}}\left(X\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\right)dt\,,$$
$$= \Sigma_{D\mathsf{v}}(X\delta x)\,,\qquad\qquad = \Sigma_{D\mathsf{v}}(X\Delta x)\,.$$

Verbindet man aber diese Formeln durch Addition mit den analogen Formeln für die $y$- und $z$-Coordinaten, so folgt:

$$(36.)\qquad \frac{\mu}{2}d(V_,^2) = \Sigma_{D\mathsf{v}}(X\delta x + \ldots)\,,\qquad \frac{i^2D\mathsf{v}dt}{k} = \Sigma_{D\mathsf{v}}(X\Delta x + \ldots)\,,$$

wo $V_,$ die Geschwindigkeit der Masse $\mu$ oder $\mu + \eta_,$ vorstellt, während $i$ die innerhalb dieser Masse vorhandene elektrische Strömung bezeichnet. Die linke Seite der einen Formel repräsentirt also den während der Zeit $dt$ erfolgenden Zuwachs der lebendigen Kraft von $\mu$, während die linke Seite der andern [vrgl. (13.b)] das während der Zeit $dt$ in $D\mathsf{v}$ sich entwickelnde Wärmequantum darstellt. Bezeichnen wir diesen Zuwachs von lebendiger Kraft und dieses sich entwickelnde Wärmequantum respective mit $dT$ und $dQ$, so nehmen die Formeln folgende Gestalt an:

(37.)
$$dT = \Sigma_{Dv}\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)\,,$$
$$dQ = \Sigma_{Dv}\,(X\Delta x + Y\Delta y + Z\Delta z)\,.$$

Bezeichnen wir also die *lebendige Kraft* der ponderablen Masse und die innerhalb dieser Masse vorhandene *Wärme* respective als *mechanische* und *calorische Energie*, so haben wir folgendes Theorem:

(38.) *Die in irgend einem Volumelement Dv während eines Zeitelementes dt sich entwickelnden Quantitäten von mechanischer und calorischer Energie sind gleich gross respective mit der generellen und relativen Arbeit, welche während der Zeit dt ausgeübt worden ist auf alle zu Anfang dieser Zeit in Dv enthalten gewesene Materie.*

Die Ausdrücke (37.) sind *linear* in Bezug auf $X$, $Y$, $Z$, und können also, falls diese $X$, $Y$, $Z$ aus Kräften verschiedener Gattung zusammengesetzt sind, dementsprechend in ebenso viele Glieder zerlegt werden. Sind z. B. die $X$, $Y$, $Z$ zusammengesetzt aus $A$, $B$, $C$ und $A'$, $B'$, $C'$, so zerfällt $dT$ in zwei Theile

$$\Sigma_{Dv}\,(A\delta x + B\delta y + C\delta z)$$

und

$$\Sigma_{Dv}\,(A'\delta x + B'\delta y + C'\delta z)\,;$$

von diesen wird der erstere als das *durch die Kraft* $A$, $B$, $C$ *hervorgebrachte* Quantum mechanischer Energie zu bezeichnen sein; ebenso der letztere als dasjenige, welches der Kraft $A'$, $B'$, $C'$ seine Entstehung verdankt. — Analoges gilt von der calorischen Energie $dQ$.

## § 7.

### *Die Formeln der mechanischen und calorischen Energie für ein System von zwei Körpern.*

Sind $A$ und $B$ irgend zwei Körper, und bezeichnet man die kleinsten Theilchen von $A$ [welche theils von der Form $m + e_{,}$, theils von der Form $e_{,,}$ sein werden (vrgl. pg. 151)] mit $p_0\,(x_0, y_0, z_0)$, ebenso die kleinsten Theilchen von $B$ mit $p_1\,(x_1, y_1, z_1)$, endlich die von einem Theilchen $p_1$ auf ein Theilchen $p_0$ ausgeübte Kraft mit $X_0^1$, $Y_0^1$, $Z_0^1$, so werden die von $B$ in $A$ während irgend eines Zeitelementes $dt$ hervorgebrachten Quanta mechanischer und calorischer Energie nach (37.) die Werthe haben:

(39.)
$$dT_A^B = \Sigma\Sigma\,(X_0^1\delta x_0 + Y_0^1\delta y_0 + Z_0^1\delta z_0)\,,$$
$$dQ_A^B = \Sigma\Sigma\,(X_0^1\Delta x_0 + Y_0^1\Delta y_0 + Z_0^1\Delta z_0)\,,$$

die Summationen ausgedehnt über alle Theilchen $p_0$ von $A$ und über alle Theilchen $p_1$ von $B$.

Will man von diesen Quantitäten nur diejenigen Theile haben, welche *elektrischen* Ursprungs sind, so hat man statt der Kraft $X_0^1$, $Y_0^1$, $Z_0^1$ diejenige Kraft $\mathfrak{X}_0^1$, $\mathfrak{Y}_0^1$, $\mathfrak{Z}_0^1$ zu nehmen, welche nach dem *Weber*'schen Gesetz stattfindet zwischen den *elektrischen* Bestandtheilen von $p_0$ und $p_1$. Somit folgt:

$$(40.)\qquad \begin{aligned} (dT_A^B)_{\text{el. Us}} &= \Sigma\Sigma\,(\mathfrak{X}_0^1\delta x_0 + \mathfrak{Y}_0^1\delta y_0 + \mathfrak{Z}_0^1\delta z_0)\,, \\ (dQ_A^B)_{\text{el. Us}} &= \Sigma\Sigma\,(\mathfrak{X}_0^1\Delta x_0 + \mathfrak{Y}_0^1\Delta y_0 + \mathfrak{Z}_0^1\Delta z_0)\,. \end{aligned}$$

Bei der weiteren Behandlung dieser Formeln ist es zweckmässig, die Argumente $\tau$, $\vartheta$, welche durch eine gewisse Sonderung aus $t$ sich ergaben (pg. 157), zu benutzen; alsdann ist z. B.:

$$\delta x_0 = \frac{\partial x_0}{\partial \tau}\,dt\,,$$
$$\Delta x_0 = \frac{\partial x_0}{\partial \vartheta}\,dt\,.$$

Auch erscheint es zweckmässig, diese Argumente $\tau$, $\vartheta$ noch einer weiteren Sonderung zu unterwerfen, dieselben nämlich specieller mit $\tau_0$, $\vartheta_0$ oder $\tau_1$, $\vartheta_1$ zu benennen, jenachdem sie enthalten sind in Coordinaten der Theilchen $p_0$ oder $p_1$; alsdann wird:

$$\delta x_0 = \frac{\partial x_0}{\partial \tau}\,dt = \frac{\partial x_0}{\partial \tau_0}\,dt\,,$$
$$\Delta x_0 = \frac{\partial x_0}{\partial \vartheta}\,dt = \frac{\partial x_0}{\partial \vartheta_0}\,dt\,;$$

so dass also die Formeln (40.) folgende Gestalt annehmen:

$$(41.\text{a})\qquad (dT_A^B)_{\text{el. Us}} = \Sigma\Sigma\left(\mathfrak{X}_0^1\,\frac{\partial x_0}{\partial \tau_0} + \mathfrak{Y}_0^1\,\frac{\partial y_0}{\partial \tau_0} + \mathfrak{Z}_0^1\,\frac{\partial z_0}{\partial \tau_0}\right)dt\,,$$

$$(41.\text{b})\qquad (dQ_A^B)_{\text{el. Us}} = \Sigma\Sigma\left(\mathfrak{X}_0^1\,\frac{\partial x_0}{\partial \vartheta_0} + \mathfrak{Y}_0^1\,\frac{\partial y_0}{\partial \vartheta_0} + \mathfrak{Z}_0^1\,\frac{\partial z_0}{\partial \vartheta_0}\right)dt\,.$$

Bezeichnen wir nun die elektrischen Bestandtheile der Particeln $p_0$ und $p_1$ mit $e_0$ und $e_1$, so ist nach dem *Weber*'schen Gesetz (pg. 88):

$$(42.)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{X}_0^1 &= e_0e_1\left(-\frac{\partial(\varphi+\varpi)}{\partial x_0} + \frac{d}{dt}\,\frac{\partial\varpi}{\partial x_0'}\right), \\ \mathfrak{Y}_0^1 &= e_0e_1\left(-\frac{\partial(\varphi+\varpi)}{\partial y_0} + \frac{d}{dt}\,\frac{\partial\varpi}{\partial y_0'}\right), \\ \mathfrak{Z}_0^1 &= e_0e_1\left(-\frac{\partial(\varphi+\varpi)}{\partial z_0} + \frac{d}{dt}\,\frac{\partial\varpi}{\partial z_0'}\right), \end{aligned}$$

wo $e_0e_1\varphi$ das statische, und $e_0e_1\varpi$ das dynamische Potential der Theilchen $e_0$ und $e_1$ auf einander vorstellt; demgemäss hat $\varpi$ die Bedeutung:

(43.) $\varpi = 2A^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = 2A^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_0}(x_0' - x_1') + \frac{\partial\psi}{\partial y_0}(y_0' - y_1') + \frac{\partial\psi}{\partial z_0}(z_0' - z_1')\right)^2.$

Ueberall stehen hier die Accente für $\frac{d}{dt}$.

Durch Substitution der Werthe (42.) in die Formel (41.a) ergiebt sich:

$$(44.a)\qquad (dT_A^B)_{\text{el. Us}} = \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \left(\Pi - \frac{\partial q}{\partial \tau_0}\right) dt\,;$$

hier hat $\Pi$, falls man zur augenblicklichen Abkürzung bei $x_0$, $y_0$, $z_0$ den Index 0 unterdrückt, die Bedeutung:

$$(\alpha.)\qquad \Pi = \left(\frac{\partial x}{\partial \tau_0}\frac{d}{dt}\frac{\partial \varpi}{\partial x'} + \ldots\right) - \left(\frac{\partial x}{\partial \tau_0}\frac{\partial \varpi}{\partial x} + \ldots\right),$$

und kann daher auch so geschrieben werden:

$$(\beta.)\qquad \Pi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varpi}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial \tau_0} + \ldots\right) - \left(\frac{\partial \varpi}{\partial x'}\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial \tau_0} + \ldots\right) - \left(\frac{\partial \varpi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \tau_0} + \ldots\right).$$

Für den hier auftretenden Differentialquotienten $\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial \tau_0}$ ergeben sich, weil $x$, $y$, $z$ (d. i. $x_0$, $y_0$, $z_0$) *nur* von $\tau_0$, $\vartheta_0$ abhängen, folgende Umgestaltungen:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial \tau_0} &= \frac{\partial}{\partial \tau_0}\frac{\partial x}{\partial \tau_0} + \frac{\partial}{\partial \vartheta_0}\frac{\partial x}{\partial \tau_0}, \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau_0}\left(\frac{\partial x}{\partial \tau_0} + \frac{\partial x}{\partial \vartheta_0}\right), \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau_0}\left(\frac{dx}{dt}\right), \\ &= \frac{\partial x'}{\partial \tau_0}.\end{aligned}$$

Mit Rücksicht hierauf folgt aber aus ($\beta$.) sofort:

$$(\gamma.)\qquad \Pi = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varpi}{\partial x'}\frac{\partial x}{\partial \tau_0} + \ldots\right) - \frac{\partial \varpi}{\partial \tau_0}.$$

Nun ist nach (43.):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varpi}{\partial x_0'} &= 4A^2\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_0}(x_0' - x_1') + \ldots\right)\frac{\partial \psi}{\partial x_0}, \\ &= 4A^2\frac{d\psi}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial x_0},\end{aligned}$$

oder weil bei $x_0$, $y_0$, $z_0$ der Index 0 vorläufig unterdrückt werden soll:

$$\frac{\partial \varpi}{\partial x'} = 4A^2\frac{d\psi}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Substituirt man diesen Werth in ($\gamma$.), so folgt:

$$(\delta.)\qquad \Pi = 4A^2\frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\frac{\partial \psi}{\partial \tau_0}\right) - \frac{\partial \varpi}{\partial \tau_0}\,;$$

wodurch die Formel (44.a) folgende Gestalt gewinnt:

$$(45.a)\quad (dT_A^B)_{\text{el. Us}} = \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \left\{ 4A^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial r_0}\right) - \frac{\partial(\varphi+\varpi)}{\partial r_0}\right\} dt\,.$$

In ähnlicher Weise wie (41.a) lässt sich offenbar auch die Formel (41.b) behandeln; so dass man also erhält:

$$(45.b)\quad (dQ_A^B)_{\text{el. Us}} = \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \left\{ 4A^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{d\psi}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial \vartheta_0}\right) - \frac{\partial(\varphi+\varpi)}{\partial \vartheta_0}\right\} dt\,.$$

Diese Formeln (45.a, b) können vereinfacht werden durch Einführung der Potentiale. Es sei $U_{AB}$ das elektrostatische, und $P_{AB}$ das elektrodynamische Potential der beiden Körper $A$, $B$ auf einander; dann ist:

$$(46.)\quad \begin{aligned} U_{AB} &= \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \varphi\,, \\ P_{AB} &= \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \varpi = 2A^2\, \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2, \end{aligned}$$

die Summationen ausgedehnt über alle Theilchen $e_0$ des Körpers $A$, und über alle Theilchen $e_1$ des Körpers $B$.

Nach unserer Bezeichnungsweise ist $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \vartheta}$; so dass also das Potential $P_{AB}$ auch so dargestellt werden kann:

$$(47.\alpha)\quad P_{AB} = 2A^2\, \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \frac{d\psi}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial \tau} + \frac{\partial\psi}{\partial \vartheta}\right),$$

also in *zwei* Theile zerfällt:

$$(47.\beta)\quad P_{AB} = P_{AB}^{(\tau)} + P_{AB}^{(\vartheta)}\,.$$

Desgleichen kann geschrieben werden:

$$(47.\gamma)\quad P_{AB} = 2A^2\, \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \frac{d\psi}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r_0} + \frac{\partial\psi}{\partial \tau_1} + \frac{\partial\psi}{\partial \vartheta_0} + \frac{\partial\psi}{\partial \vartheta_1}\right),$$

wodurch alsdann *vier* Theile entstehen:

$$(47.\delta)\quad P_{AB} = P_{AB}^{(\tau_0)} + P_{AB}^{(\tau_1)} + P_{AB}^{(\vartheta_0)} + P_{AB}^{(\vartheta_1)}\,.$$

Die Werthe der genannten Theile sind offenbar folgende:

$$(47.\varepsilon)\quad \begin{aligned} P_{AB}^{(\tau)} &= 2A^2\, \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \frac{d\psi}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial \tau}\,, & P_{AB}^{(\vartheta)} &= 2A^2\, \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \frac{d\psi}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial \vartheta}\,, \\ P_{AB}^{(\tau_0)} &= 2A^2\, \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \frac{d\psi}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial \tau_0}\,, & P_{AB}^{(\vartheta_0)} &= 2A^2\, \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \frac{d\psi}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial \vartheta_0}\,, \\ P_{AB}^{(\tau_1)} &= 2A^2\, \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \frac{d\psi}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial \tau_1}\,, & P_{AB}^{(\vartheta_1)} &= 2A^2\, \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \frac{d\psi}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial \vartheta_1}\,. \end{aligned}$$

Durch Einführung dieser Potentiale nehmen nun unsere Formeln (45.a, b) folgende Gestalt an:

$$(48.a)\quad (dT_A^B)_{\text{el. Us}} = \left[2\frac{d}{dt}P_{AB}^{(\tau_0)} - \frac{\partial}{\partial r_0}(U_{AB} + P_{AB})\right] dt\,,$$

$$(48.b)\quad (dQ_A^B)_{\text{el. Us}} = \left[2\frac{d}{dt}P_{AB}^{(\vartheta_0)} - \frac{\partial}{\partial \vartheta_0}(U_{AB} + P_{AB})\right] dt\,,$$

oder einfacher geschrieben folgende:

$$(49.a)\qquad (dT_A^B)_{el.\,U_B} = 2\,d\,P_{AB}^{(r_0)} - \frac{\partial\,(U_{AB}+P_{AB})}{\partial r_0}\,dt\,,$$

$$(49.b)\qquad (dQ_A^B)_{el.\,U_B} = 2\,d\,P_{AB}^{(\vartheta_0)} - \frac{\partial\,(U_{AB}+P_{AB})}{\partial \vartheta_0}\,dt\,.$$

Zur weiteren Vereinfachung dieser Formeln könnte man den schon eingeführten Charakteristiken (pg. 158):

$$\frac{\partial}{\partial r}\,dt = \delta\,, \qquad \frac{\partial}{\partial \vartheta}\,dt = \Delta\,,$$

noch die folgenden beigesellen:

$$\frac{\partial}{\partial r_0}\,dt = \delta_0\,, \qquad \frac{\partial}{\partial \vartheta_0}\,dt = \Delta_0\,,$$
$$\frac{\partial}{\partial r_1}\,dt = \delta_1\,, \qquad \frac{\partial}{\partial \vartheta_1}\,dt = \Delta_1\,.$$

Auf den rechten Seiten der Formeln (49.a,b) sind alsdann drei Differentiale enthalten, nämlich das vollständige Differential $d$, und die beiden partiellen Differentiale $\delta_0$ und $\Delta_0$. Der Zuwachs $\delta_0$ wird offenbar zu definiren sein als derjenige, welcher eintreten *würde*, falls man sämmtliche (ordinären und elektrischen) Bewegungen sistiren wollte, mit alleiniger Ausnahme der ordinären Bewegung des Körpers $A$. Ebenso wird $\Delta_0$ als derjenige Zuwachs zu definiren sein, welcher eintreten *würde*, falls man sämmtliche (ordinären und elektrischen) Bewegungen sistiren wollte, mit alleiniger Ausnahme der in $A$ stattfindenden elektrischen Bewegungen. Folglich kann $\delta_0$ bezeichnet werden als der partielle Zuwachs *nach der räumlichen Lage von A*, und $\Delta_0$ als der partielle Zuwachs *nach dem elektrischen Zustande von A*.

## § 8.

*Die Formeln der mechanischen und calorischen Energie für ein System von beliebig vielen Körpern.*

Es sei gegeben ein System von beliebig vielen Körpern $A$, $B$, $C$, $D$, .... Das elektrostatische und elektrodynamische Potential dieses Systemes auf sich selber sei bezeichnet mit $U$ und $P$:

$$(50.a)\qquad \begin{aligned} U &= \tfrac{1}{2}[\Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \varphi]\,,\\ P &= \tfrac{1}{2}[\Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \varpi] = \tfrac{1}{2}\left[2A^2\,\Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right]; \end{aligned}$$

ferner*) werde gesetzt:

(50.$\beta$) $$P = P^{(\tau)} + P^{(\vartheta)},$$

nämlich:

(50.$\gamma$) $$P^{(\tau)} = \tfrac{1}{2}\left[2A^2 \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \frac{d\psi}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right],$$
$$P^{(\vartheta)} = \tfrac{1}{2}\left[2A^2 \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \frac{d\psi}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\right].$$

Alsdann können $U$, $P$, $P_{(\tau)}$, $P^{(\vartheta)}$ entsprechend den einzelnen Körpern des gegebenen Systems folgendermassen zerlegt werden:

(50.$\delta$) $$U = \tfrac{1}{2}U_{AA} + U_{AB} + \ldots\ldots,$$
$$P = \tfrac{1}{2}P_{AA} + P_{AB} + \ldots\ldots,$$
$$P^{(\tau)} = \tfrac{1}{2}P_{AA}^{(\tau)} + P_{AB}^{(\tau)} + \ldots\ldots,$$
$$P^{(\vartheta)} = \tfrac{1}{2}P_{AA}^{(\vartheta)} + P_{AB}^{(\vartheta)} + \ldots\ldots,$$

wo jeder der Ausdrücke rechter Hand $\frac{n(n+1)}{2}$ Glieder enthält, falls das System aus $n$ Körpern besteht.**)

Solches vorangeschickt, kehren wir zurück zu den Formeln (49.a,b). Bildet man diese Formeln nicht nur für $B$ in Bezug auf $A$, sondern auch für $A$ in Bezug auf $B$, so ergiebt sich durch Addition der einen und andern sofort [vrgl. (47.$\alpha,\beta,..\varepsilon$)]:

(51.a) $$(dT_A^B + dT_B^A)_{\text{el. Us}} = 2dP_{AB}^{(\tau)} - \frac{\partial(U_{AB}+P_{AB})}{\partial\tau}dt,$$

(51.b) $$(dQ_A^B + dQ_B^A)_{\text{el. Us}} = 2dP_{AB}^{(\vartheta)} - \frac{\partial(U_{AB}+P_{AB})}{\partial\vartheta}dt.$$

Hieraus folgt, falls man $B$ mit $A$ identificirt, also die Wirkung von $A$ auf sich selber betrachtet:

(52.a) $$(dT_A^A)_{\text{el. Us}} = dP_{AA}^{(\tau)} - \frac{1}{2}\frac{\partial(U_{AA}+P_{AA})}{\partial\tau}dt,$$

(52.b) $$(dQ_A^A)_{\text{el. Us}} = dP_{AA}^{(\vartheta)} - \frac{1}{2}\frac{\partial(U_{AA}+P_{AA})}{\partial\vartheta}dt.$$

---

*) In Betreff der Formeln (50.$\alpha$) vergleiche man die Note auf pg. 102.

**) So wird z. B. der erste dieser Ausdrücke $n$ Glieder von der Form

$$\tfrac{1}{2}U_{AA},\quad \tfrac{1}{2}U_{BB},\ \ldots\ldots,$$

und $\frac{n(n-1)}{2}$ Glieder von der Form

$$U_{AB},\quad U_{AC},\quad U_{BC},\ \ldots\ldots$$

enthalten. — Dabei repräsentirt $U_{AB}$ das elektrostatische Potential von $A$ auf $B$; ferner $U_{AA}$ denjenigen Ausdruck, in welchen $U_{AB}$ sich verwandelt durch Identificirung von $B$ mit $A$; so dass also $\frac{1}{2}U_{AA}$ das Potential des Körpers $A$ auf sich selber vorstellt.

Bilden wir nun die Formeln (51.a,b) der Reihe nach für *jedes Paar* von Körpern, und die Formeln (52.a,b) für *jeden einzelnen* Körper, so gelangen wir durch Addition all' dieser Formeln, mit Rücksicht auf (50.$\delta$). zu folgendem Ergebniss:

(53.a) $$(dT)_{\text{el. Us}} = 2dP^{(\tau)} - \frac{\partial(U+P)}{\partial\tau}\,dt\,,$$

(53.b) $$(dQ)_{\text{el. Us}} = 2dP^{(\vartheta)} - \frac{\partial(U+P)}{\partial\vartheta}\,dt\,,$$

wo $(dT)_{\text{el. Us}}$ und $(dQ)_{\text{el. Us}}$ diejenigen Quanta mechanischer und calorischer Energie bezeichnen, welche in dem gegebenen System *A*, *B*, *C*, *D*, . . . während des Zeitelementes *dt* hervorgebracht werden durch die *innern Kräfte elektrischen Ursprungs*. Die Formeln (53.a,b) können offenbar (vrgl. pg. 158) auch so geschrieben werden:

(54.a) $$(dT)_{\text{el. Us}} = 2dP^{(\tau)} - \delta(U+P)\,,$$

(54.b) $$(dQ)_{\text{el. Us}} = 2dP^{(\vartheta)} - \Delta(U+P)\,;$$

hieraus aber folgt durch Addition und mit Rücksicht auf (50.$\delta$):

(55.) $$\begin{aligned}(dT+dQ)_{\text{el. Us}} &= 2dP - d(U+P)\,,\\ &= d(P-U).\end{aligned}$$

Somit gelangen wir zu folgendem Satz:

(56.) *Dasjenige Quantum mechanischer und calorischer Energie, welches in dem betrachteten System von Körpern während eines Zeitelementes dt durch die innern Kräfte elektrischen Ursprungs hervorgebracht wird, ist ein vollständiges Differential, nämlich* $= d(P-U)$, *wo U das elektrostatische und P das elektrodynamische Potential des Systemes auf sich selber bezeichnet.*

## § 9.

*Fortsetzung. Das Energie- und Potential-Gesetz.*

Das System der Körper *A*, *B*, *C*, *D*, .... sei in beliebiger Bewegung begriffen, während gleichzeitig im Innern eines jeden irgend welche elektrische Vorgänge stattfinden; dabei sei vorausgesetzt, dass die auf das System von Aussen her wirkenden Kräfte durchweg *ordinärer* (nicht elektrischer) Natur sind, und ferner vorausgesetzt,

dass zwischen den ponderablen Massen des Systemes *keine Reibungen* stattfinden.

Die lebendige Kraft $T$ des Systemes erfährt alsdann während der Zeit $dt$ einen Zuwachs $dT$, welcher in zwei Theile zerlegbar ist:

$$(57.)\qquad dT = (dT)_{\text{ord. Us}} + (dT)_{\text{el. Us}}\,,$$

von denen der erstere den äussern und innern ordinären Kräften, der zweite den innern elektrischen Kräften entspricht. Andererseits wird alsdann die während der Zeit $dt$ im System erzeugte Wärme $dQ$ (weil Reibungen zwischen ponderablen Massen vermieden sein sollen) lediglich auf Rechnung der elektrischen Kräfte kommen; so dass man also schreiben kann:

$$(58.)\qquad dQ = (dQ)_{\text{el. Us}}\,.$$

Das durch die äussern und innern ordinären Kräfte hervorgebrachte Quantum mechanischer Energie $(dT)_{\text{ord. Us}}$ lässt sich darstellen durch:

$$(59.\xi)\qquad (dT)_{\text{ord. Us}} = dS - dU^0\,,$$

falls man nämlich unter $dS$ die während der Zeit $dt$ von den äussern Kräften verrichtete Arbeit, andererseits unter $U^0$ das ordinäre Potential des Systemes auf sich selber versteht. — Ferner ergiebt sich aus den Formeln (54. a, b):

$$(59.\eta)\qquad (dT)_{\text{el. Us}} = 2dP^{(\tau)} - \delta(U+P)\,,$$

$$(59.\zeta)\qquad (dQ)_{\text{el. Us}} = 2dP^{(\vartheta)} - \Delta(U+P)\,.$$

Addirt man nun die Formeln (57.), (58.), und substituirt die Werthe (59. $\xi, \eta, \zeta$), so folgt sofort:

$$(60.)\qquad \begin{aligned} dT + dQ &= dS - dU^0 + 2dP - d(U+P)\,,\\ &= dS - d(U^0 + U - P)\,; \end{aligned}$$

andererseits nimmt die Formel (57.) durch Substitution der Werthe (59. $\xi, \eta$) die Gestalt an:

$$dT = dS - dU^0 - \delta(U+P) + 2dP^{(\tau)}\,,$$

wofür, weil $U^0$ nur von den ponderablen Massen abhängt, mithin $dU^0 = \delta U^0$ ist, auch geschrieben werden kann:

$$(61.)\qquad dT = dS - \delta(U^0 + U + P) + 2dP^{(\tau)}\,.$$

Sind die elektrischen Strömungen im Innern der einzelnen Körper überall *gleichförmig* und an ihren Oberflächen überall *tangential*,

so *verschwindet* die Function $P^{(\tau)}$, wie später*) gezeigt werden soll. Diese Kenntniss einstweilen anticipirt, führen die Formeln (60.) und (61.) zu folgendem Resultat.

*Bewegt sich ein System von Körpern unter der Einwirkung innerer und äusserer Kräfte, und sind die erstern theils ordinären theils elektrischen, die letztern aber nur ordinären Ursprungs, so existiren zweierlei wohl von einander zu unterscheidende Sätze, welche beide die lebendige Kraft betreffen. Dieselben können, zur bequemen Unterscheidung, etwa als Energie- und Potential-Gesetz bezeichnet werden, und sind, falls man das ordinäre, elektrostatische und elektrodynamische Potential des Systems auf sich selber respective mit $U^0$, $U$ und $P$, ferner die lebendige Kraft des Systemes mit $T$ bezeichnet, folgendermassen zu formuliren.*

*Das Energiegesetz. — Für jedes Zeitelement $dt$ ist:*

(62.) $$d(T + U^0 + U - P) = dS - dQ\,,$$

*wo $dS$ die während der Zeit $dt$ von den äussern Kräften ausgeübte Arbeit, und $dQ$ die während dieser Zeit (durch die elektrischen Vorgänge) im System entwickelte Wärme vorstellt.*

*Das Potentialgesetz.***) *— Für jedes Zeitelement $dt$ ist:*

(63.) $$dT + \delta(U^0 + U + P) = dS\,,$$

*wo $dS$ die schon genannte Bedeutung hat, während unter $\delta(U^0 + U + P)$ derjenige virtuelle Zuwachs zu verstehen ist, welchen das Potential $U^0 + U + P$ während der Zeit $dt$ annehmen würde, falls die elektrischen Verhältnisse im Innern eines jeden Körpers während dieser Zeit ungeändert blieben.*

Zu betonen ist, dass das Potentialgesetz nur dann gilt, wenn die elektrischen Bewegungen im Innern der einzelnen Körper *gleichförmig* und an ihren Oberflächen *tangential* sind. Ist nämlich diese Voraussetzung *nicht* erfüllt, so muss die Formel (63.) durch (61.) ersetzt werden, wo $P^{(\tau)}$ eine schwer zu definirende Function vorstellt.

---

*) Vrgl. die Formeln (4. $\gamma$) auf pg. 176.

**) Der Name *Potentialgesetz* hat (vielleicht mit Recht) Anstoss erregt, und scheint Missverständnisse herbeigeführt zu haben (vrgl. § 4 des folgd. Abschnittes). Ich habe demgemäss später, so z. B. in meinem Werke: *Die elektrischen Kräfte* (Leipzig, 1873), diesen Namen umgeändert in *ponderomotorisches Integralgesetz*. Uebrigens ist wohl zu beachten, dass $P$ in den Formeln (62.) und (63.) *entgegengesetzte* Vorzeichen hat

Diese beiden Gesetze (62.) und (63.) habe ich bereits in derselben Form in meiner Abhandlung vom Jahre 1871 (Ber. d. Königl. Sächs. Ges. vom October 1871, pg. 408, 414 und 430) publicirt. Während ich aber damals das Potentialgesetz ohne nähere Angabe seiner Deduction und auch nur für den Fall *linearer* Leiter mitgetheilt habe, habe ich gegenwärtig dieses Gesetz für den Fall *beliebiger* Körper und mit Angabe seiner vollständigen Herleitung dargelegt. Das elektrodynamische Potential $P$ ist übrigens in jener Abhandlung von 1871 mit $V$ bezeichnet worden.

*Bemerkung.* — Repartirt man in (63.) das $dT$ auf die Kräfte ordinären, elektrostatischen und elektrodynamischen Ursprungs, so folgt:

$$(dT)_{\text{ord. Us}} = -\delta U^0 + dS\,,$$
$$(dT)_{\text{elst. Us}} = -\delta U\,,$$
$$(dT)_{\text{eldy. Us}} = -\delta P\,.$$

Die letzte von diesen Formeln stimmt genau mit derjenigen überein, zu welcher ich in meinem Werk: *Die elektrischen Kräfte* (Leipzig 1873, pg. 165 und 213) von ganz andern Grundlagen aus gelangt bin.

## § 10.

### *Das ponderomotorische und elektromotorische Integralgesetz für körperliche Leiter.*

In einem homogenen Körper ist die mit der ponderablen Masse unlöslich verbundene negative Elektricität ebenfalls homogen ausgebreitet.

Der Körper wird in seinem *natürlichen* Zustand sich befinden, nämlich mit positivem Fluidum (d. i. mit positiver Elektricität) gesättigt sein, sobald die Dichtigkeit dieses Fluidums allenthalben eben so gross ist, wie die der negativen Elektricität. Bezeichnet man also die durch die Natur des Körpers gegebene unveränderliche Dichtigkeit der negativen Elektricität mit $-E$, so wird die Dichtigkeit des positiven Fluidums zur Zeit des *natürlichen* Zustandes $= +E$ sein.

Wir wollen uns nun in diesem §. auf solche Bewegungen beschränken, bei denen das positive Fluidum sich wie eine incompressible Flüssigkeit verhält, nämlich den Bedingungen entspricht:

$$(1.)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \upsilon} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0\,, \quad \text{(im Innern)}\,, \\ &u\cos(N,\xi) + v\cos(N,\upsilon) + w\cos(N,\zeta) = 0\,, \quad \text{(an der Oberfläche)}. \end{aligned}$$

Hier bedeutet $u$, $v$, $w$ die im Punkte $\xi$, $v$, $\zeta$ vorhandene Strömung, und $N$ die auf der Oberfläche des Körpers errichtete Normale; dabei ist das Axensystem $\xi$, $v$, $\zeta$ mit dem Körper fest verbunden zu denken. — Bewegungen, welche diesen Bedingungen (1.) entsprechen, nennen wir *im Innern gleichförmig*, und *tangential an der Oberfläche*.

Das elektrodynamische Potential zweier Körper $A$ und $B$ auf einander

$$(2.)\qquad P = 2A^2 \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2$$

ist im Vorhergehenden (pg. 168) in vier Theile zerlegt worden:

$$P = P^{(\tau_0)} + P^{(\tau_1)} + P^{(\vartheta_0)} + P^{(\vartheta_1)},$$

$$(3.)\qquad P^{(\tau_g)} = 2A^2 \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \frac{d\psi}{dt} \frac{\partial\psi}{\partial\tau_g},$$

$$P^{(\vartheta_g)} = 2A^2 \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \frac{d\psi}{dt} \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta_g}, \text{ wo } g = 0,1 .$$

Entsprechen nun die in $A$ und $B$ vorhandenen elektrischen Bewegungen den Bedingungen (1.), so sind die in einem Volumelement $Dv_0$ des Körpers $A$ vorhandenen Elektricitäten von *gleichem* Betrag, also mit $\pm\eta_0$ zu bezeichnen; und ebenso die in einem Volumelement $Dv_1$ des Körpers $B$ anzudeuten durch $\pm\eta_1$. Die diesen vier Massen $\pm\eta_0$ und $\pm\eta_1$ entsprechenden Glieder des Potentials $P$ (2.) lauten [vrgl. die auf pg. 157 und pg. 166 gegebenen Definitionen von $\tau$, $\vartheta$ und $\tau_0$, $\tau_1$, $\vartheta_0$, $\vartheta_1$]:

$$2A^2(+\eta_0)(+\eta_1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta_0} + \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta_1} + \frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)^2,$$

$$2A^2(-\eta_0)(+\eta_1)\left(0 + \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta_1} + \frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)^2,$$

$$2A^2(+\eta_0)(-\eta_1)\left(\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta_0} + 0 + \frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)^2,$$

$$2A^2(-\eta_0)(-\eta_1)\left(0 + 0 + \frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)^2,$$

und geben also zusammengenommen:

$$2A^2\eta_0\eta_1 \,.\, 2\,\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta_0}\,\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta_1},$$

oder falls man $\eta_0 = E_0 Dv_0$ und $\eta_1 = E_1 Dv_1$ setzt:

$$4A^2 Dv_0 Dv_1 \,.\, E_0 \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta_0}\, E_1 \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta_1}.$$

Somit folgt:

$$(4.\alpha)\qquad P = 4A^2 \Sigma\Sigma \left(Dv_0 Dv_1\, E_0 \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta_0}\, E_1 \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta_1}\right),$$

die Summation ausgedehnt über alle $D\mathrm{v}_0$ des Körpers $A$ und über alle $D\mathrm{v}_1$ des Körpers $B$.

Sind $\xi_0$, $v_0$, $\zeta_0$ die Coordinaten eines in $A$ vorhandenen Fluidumtheilchens, bezogen auf ein mit $A$ fest verbundenes Axensystem, so ist:

$$E_0 \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_0} = E_0 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_0}\frac{d\xi_0}{d\vartheta_0} + \frac{\partial\varphi}{\partial v_0}\frac{dv_0}{d\vartheta_0} + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_0}\frac{d\zeta_0}{d\vartheta_0}\right),$$

folglich (vrgl. die Formeln (1.b) pg. 152):

$$E_0 \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_0} = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_0} u_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial v_0} v_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_0} w_0 ,$$

wo $u_0$, $v_0$, $w_0$ die Componenten der elektrischen Strömung bezeichnen. Desgleichen wird:

$$E_1 \frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1} u_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial v_1} v_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta_1} w_1 ;$$

so dass also die Formel (4.$\alpha$) folgende Gestalt annimmt:

$$(4.\beta) \qquad P = 4A^2 \Sigma\Sigma \left\{D\mathrm{v}_0 D\mathrm{v}_1 \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_0} u_0 + \ldots\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi_1} u_1 + \ldots\right)\right\} .$$

In analoger Weise lassen sich, falls die Bedingungen (1.) erfüllt sind, die Potential*theile* $P^{(\tau_0)}$, etc. berechnen; man findet leicht:

$$(4.\gamma) \qquad \begin{aligned} P^{(\tau_0)} &= P^{(\tau_1)} = \text{Null} , \\ P^{(\vartheta_0)} &= P^{(\vartheta_1)} = \tfrac{1}{2} P . \end{aligned}$$

Endlich findet man für das elektrostatische Potential $U = \Sigma\Sigma(e_0 e_1 \varphi)$ der beiden Körper auf einander den Werth:

$$(4.\delta) \qquad U = \text{Null}.$$

Durch Substitution dieser Werthe (4. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$) nehmen nun die früher gefundenen Formeln [pg. 169 (49. a, b)]:

$$\begin{aligned} (dT_A^B)_{\text{el. Us}} &= 2dP^{(\tau_0)} - \delta_0 (U + P) , \\ (dQ_A^B)_{\text{el. Us}} &= 2dP^{(\vartheta_0)} - \Delta_0 (U + P) \end{aligned}$$

die einfachere Gestalt an:

$$(5.\text{a}) \qquad (dT_A^B)_{\text{el. Us}} = - \delta_0 P ,$$

$$(5.\text{b}) \qquad (dQ_A^B)_{\text{el. Us}} = - \Delta_0 P + dP .$$

Wir gelangen somit zu folgenden Sätzen:

(6.a) *Das ponderomotorische Integralgesetz. — Sind die elektrischen Strömungen in zwei Körpern A und B im Innern überall gleichförmig und an den Oberflächen überall tangential, und bezeichnet P das elektrodynamische Potential der beiden*

*Körper auf einander, so wird die von $B$ in $A$ vermöge der Kräfte elektrischen Ursprungs während eines Zeitelementes hervorgebrachte lebendige Kraft (oder mechanische Energie) gleich sein dem negativen partiellen Zuwachs von $P$, genommen nach der räumlichen Lage von $A$.*

(6.b) *Das elektromotorische Integralgesetz. — Gleichzeitig wird die von $B$ in $A$ vermöge der elektrischen Kräfte erzeugte Wärme (oder calorische Energie) gleich sein dem vollständigen Zuwachs von $P$, davon in Abzug gebracht der nach dem elektrischen Zustande von $A$ genommene partielle Zuwachs von $P$.*

Diese Sätze (6.a, b), welche als das *ponderomotorische* und *elektromotorische Integralgesetz für körperliche Leiter* bezeichnet werden können, sind identisch mit denjenigen, zu welchen ich bereits früher auf Grund einer *ganz andern* Theorie hingeleitet worden bin. Vrgl. mein Werk: *Die elektrischen Kräfte* (Leipzig. 1873), pg. 165, 176 und 213; ferner meine Abhandlung: *Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze* (Abhandl. d. Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 1873, Bd. X, pg. 505).

## § 11.

*Das ponderomotorische und elektromotorische Integralgesetz für lineare Leiter.*

Denken wir uns $A$ und $B$ als zwei geschlossene lineare Leiter, so reduciren sich die Bedingungen (1.) darauf, dass in jedem derselben die Stromstärke *gleichförmig*, d. i. unabhängig von der Bogenlänge, also nur eine Function der Zeit ist.

Bezeichnen wir die Bogenlängen mit $s_0$ und $s_1$, und setzen wir

(7.) $$Dv_0 = q_0 Ds_0 \,, \qquad Dv_1 = q_1 Ds_1 \,,$$

wo $q_0$ und $q_1$ die Querschnitte bezeichnen; so geht die Formel (4.$\beta$) über in:

$$P = 4A^2 \Sigma\Sigma \left\{ q_0 Ds_0 \, q_1 Ds_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} i_0 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} i_1 \right\} ,$$

wo $i_0$ und $i_1$ die elektrischen *Strömungen* (in den Richtungen $s_0$ und $s_1$) bezeichnen. Setzen wir also:

(8.) $$q_0 i_0 = J_0 \,, \qquad q_1 i_1 = J_1 \,,$$

wo alsdann $J_0$ und $J_1$ die sogenannten *Stromstärken* sind, so wird:

$$P = 4A^2 \Sigma\Sigma \left\{ J_0 Ds_0 \, J_1 Ds_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \right\} ,$$

oder weil, nach unserer Voraussetzung, $J_0$ und $J_1$ von den Bogenlängen unabhängig sein sollen:

$$P = 4A^2 J_0 J_1 \, . \, \Sigma\Sigma \left\{ Ds_0 Ds_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_0} \frac{\partial\psi}{\partial s_1} \right\} .$$

Hiefür aber kann geschrieben werden:

(9.) $$P = J_0 J_1 Q \, , \qquad Q = 4A^2 \Sigma\Sigma \left\{ Ds_0 Ds_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_0} \frac{\partial\psi}{\partial s_1} \right\} ;$$

und hieraus folgt:

$$dP = d\,(J_0 J_1 Q) \, ,$$
$$\delta_0 P = J_0 J_1 \delta_0 Q \, ,$$
$$\Delta_0 P = (dJ_0)\, J_1 Q \, .$$

Demgemäss nehmen die Formeln (5.a,b) folgende Gestalt an:

(10.a) $$(dT_A^B)_{\text{el. Us}} = - \; J_0 J_1 \delta_0 Q \, ,$$

(10.b) $$(dQ_A^B)_{\text{el. Us}} = \; J_0 d(J_1 Q) \, .$$

Um die letzte dieser beiden Formeln weiter zu behandeln, bedarf es gewisser Nebenbetrachtungen, die wir zunächst folgen lassen.

Unter den Componenten einer *elektromotorischen* Kraft haben wir, wie es üblich ist (pg. 161), diejenigen Grössen verstanden, welche multiplicirt mit der Leitungsfähigkeit die elektrischen Strömungscomponenten geben. Ist also $k$ die Leitungsfähigkeit irgend eines *beliebigen* homogenen Körpers, und sind $u$, $v$, $w$ die in irgend einem Element $D$v desselben augenblicklich vorhandenen Strömungscomponenten, so werden die Componenten $\mathfrak{A}_x$ $\mathfrak{A}_y$, $\mathfrak{A}_z$ der augenblicklich in $D$v vorhandenen elektromotorischen Kraft definirt sein durch die Formeln:

($\alpha$.) $$u = k\mathfrak{A}_x \, , \quad v = k\mathfrak{A}_y \, , \quad w = k\mathfrak{A}_z \, .$$

Aus diesen folgt durch Multiplication mit $u$, $v$, $w$ und Addition:

($\beta$.) $$i^2 = u^2 + v^2 + w^2 = k\,(u\mathfrak{A}_x + v\mathfrak{A}_y + w\mathfrak{A}_z) \, .$$

Substituirt man diesen Werth von $i^2$ in das *Joule*'sche Gesetz (pg. 156):

($\gamma$.) $$dQ = \frac{i^2 D\text{v}\, dt}{k} \, ,$$

so folgt:

($\delta$.) $$dQ = (u\mathfrak{A}_x + v\mathfrak{A}_y + w\mathfrak{A}_z)\, D\text{v}\, dt \, ,$$

oder, falls man die Componente von $\mathfrak{A}$ nach der Richtung $i$, d. i. nach der Richtung $u$, $v$, $w$ kurzweg mit $\mathfrak{P}$ bezeichnet:

($\varepsilon$.) $$dQ = i\mathfrak{P} D\text{v}\, dt \, .$$

Bringen wir aber diese Formel auf einen *linearen* Leiter in Anwendung, indem wir [ähnlich wie in (7.), (8.)] $Dv = qDs$ und $qi = J$ setzen, so folgt sofort:

(ζ.) $$dQ = J\mathfrak{P}Dsdt\,.$$

Dies also ist diejenige Wärmemenge, welche während der Zeit $dt$ in einem Element $Ds$ erzeugt wird, falls die Stromstärke $= J$, und die in der Richtung von $Ds$ wirkende elektromotorische Kraft $= \mathfrak{P}$ ist. Mit Bezug auf die von uns beim Ringe $A$ eingeführten Bezeichnungen wird die Formel so zu schreiben sein:

(11.) $$dQ_0 = J_0\mathfrak{P}_0 Ds_0 dt\,.$$

Hieraus ergiebt sich durch Integration für die im *ganzen* Ringe erzeugte Wärmemenge $dQ_A$ der Werth:

(12.) $$dQ_A = (\Sigma\,\mathfrak{P}_0 Ds_0)\,J_0 dt\,.$$

Diese Wärmemenge $dQ_A$ kann, weil ihr analytischer Ausdruck in Bezug auf die Kräfte $\mathfrak{P}_0$ *linear* ist, in $n$ Theile zerlegt werden, falls jene Kräfte in $n$ Kategorieen zerfallen. Will man also speciell diejenige Wärmemenge

$$dQ_A^B \quad \text{oder} \quad (dQ_A^B)_{\text{el. Us}}$$

haben, welche durch *Einwirkung des Ringes B* hervorgebracht wird, so hat man statt der Kräfte $\mathfrak{P}_0$ diejenigen Theile dieser Kräfte zu nehmen, welche von $B$ herrühren, und etwa mit $\mathfrak{P}_0^B$ zu bezeichnen sind. Man erhält also:

(13.) $$(dQ_A^B)_{\text{el. Us}} = (\Sigma\,\mathfrak{P}_0^B Ds_0)\,J_0 dt\,.$$

Mit Rücksicht hierauf können die Formeln (10.a,b) so dargestellt werden:

(14.a) $$(dT_A^B)_{\text{el. Us}} = -\,J_0 J_1 \delta_0 Q\,,$$

(14.b) $$(\Sigma\,\mathfrak{P}_0^B Ds_0)\,dt = d\,(J_1 Q)\,,$$

oder mit Rücksicht auf (9.) auch so:

(15.a) $$(dT_A^B)_{\text{el. Us}} = -\,\delta_0 P\,,$$

(15.b) $$(\Sigma\,\mathfrak{P}_0^B Ds_0)\,dt = d\left(\frac{P}{J_0}\right).$$

Somit gelangen wir zu folgenden Sätzen:

(16.a) Das ponderomotorische Integralgesetz. — *Befinden sich zwei gleichförmige elektrische Stromringe A und B in irgend welchen Bewegungen, befinden sich ferner die in ihnen vorhan-*

*denen Stromstärken $J_0$ und $J_1$ (unbeschadet der Gleichförmigkeit) in irgend welchen Zuständen der Veränderung, und bezeichnet man mit $P$ das elektrodynamische Potential der beiden Ringe auf einander, so wird für jedes Zeitelement die von $B$ auf $A$ ausgeübte ponderomotorische Arbeit dargestellt sein durch den negativen partiellen Zuwachs von $P$, genommen nach der räumlichen Lage von $A$.*

16. b) *Das elektromotorische Integralgesetz. — Die Summe der vom Ringe $B$ im Ringe $A$ während eines Zeitelementes hervorgebrachten elektromotorischen Kräfte ist identisch mit dem vollständigen Zuwachs von $\frac{P}{J_0}$.*

Diese beiden Gesetze sind identisch mit den von meinem Vater aufgefundenen. Man vrgl. mein Werk: *Die elektrischen Kräfte* (Leipzig. 1873, pg. 49—67 und pg. 102—108).

## § 12.

### *Die Formeln der mechanischen und calorischen Energie für Theile der betrachteten Körper.*

Ganz ähnliche Betrachtungen wie in § 7 (pg. 165) können auch dann angestellt werden, wenn $A$ und $B$ nicht *ganze* Körper, sondern *Theile* von solchen sind.

Es seien $v_0$ und $v_1$ zwei in den ponderablen Massen verschiedener Körper (oder auch desselben Körpers) willkührlich abgegrenzte Volumina von beliebiger Grösse. Der materielle Inhalt dieser Volumina in einem *bestimmten Zeitaugenblick* $t$ oder (was dasselbe) zu *Anfang* *) des Zeitelementes $dt$ sei bezeichnet respective mit $A$ und $B$.

Auf diese Massen $A$ und $B$ wollen wir nun genau dieselben Bezeichnungen anwenden, wie früher auf die betreffenden *ganzen* Körper. So z. B. benennen wir das elektrostatische und elektrodynamische Potential von $A$ auf $B$ mit $U_{AB}$ und $P_{AB}$, oder kürzer mit $U$ und $P$. Auch zerlegen wir wiederum $P$ in zwei, resp. vier Theile. Also:

---

*) Ein solcher Hinweis auf einen bestimmten Zeitaugenblick ist erforderlich, weil der materielle Inhalt jener Volumina, obwohl *constant* in Bezug auf die ponderable Masse und in Bezug auf die negative Elektricität, doch ein *wechselnder* ist hinsichtlich der positiven Elektricität.

(1.) $U = \Sigma\Sigma\,[e_0 e_1 \varphi]$ ,

(2.) $P = \Sigma\Sigma\,[e_0 e_1 \varpi] = 2A^2\,\Sigma\Sigma\left[e_0 e_1 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right]$ ,

(3.) $P = P^{(\tau)} + P^{(\vartheta)}$

(4.) $P = P^{(\tau_0)} + P^{(\tau_1)} + P^{(\vartheta_0)} + P^{(\vartheta_1)}$

$$P^{(\tau_g)} = 2A^2\,\Sigma\Sigma\left[e_0 e_1 \frac{d\psi}{dt}\,\frac{\partial\psi}{\partial\tau_g}\right],$$

$$P^{(\vartheta_g)} = 2A^2\,\Sigma\Sigma\left[e_0 e_1 \frac{d\psi}{dt}\,\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta_g}\right];$$

wo $g = 0,1$ ist.

Bei Anwendung dieser Bezeichnungen gelangen wir, indem wir Schritt für Schritt denselben Weg einschlagen wie damals, zu denselben Formeln wie dort (pg. 169):

(5.a) $(dT_A^B)_{\text{el. Us}} = 2dP^{(\tau_0)} - \delta_0(U + P)$ ;

(5.b) $(dQ_A^B)_{\text{el. Us}} = 2dP^{(\vartheta_0)} - \Delta_0(U + P)$ ;

hieraus folgt:

(6.a) $(dT_A^B + dT_B^A)_{\text{el. Us}} = 2dP^{(\tau)} - \delta(U + P)$ ,

(6.b) $(dQ_A^B + dQ_B^A)_{\text{el. Us}} = 2dP^{(\vartheta)} - \Delta(U + P)$ ;

und hieraus endlich folgt durch Addition:

(7.) $(dT_A^B + dT_B^A + dQ_A^B + dQ_B^A)_{\text{el. Us}} = d(P - U)$ .

Bei diesen Formeln (5.), (6.), (7.) ist wohl zu beachten, dass die Potentiale $U$ und $P$ nicht schlechtweg auf die Volumina $v_0$, $v_1$, sondern vielmehr auf gewisse Massen $A$, $B$ sich beziehen, welche nur zu *Anfang* der Zeit $dt$ innerhalb jener Volumina sich befinden, nicht aber zu *Ende* derselben. Demgemäss würde es z. B. zur Berechnung von $dP$ [in Formel (7.)] *nicht* erlaubt sein, zuerst $P$ für die gegebenen Volumina $v_0$, $v_1$ zu berechnen, und den so erhaltenen Ausdruck zu differenziren. Mit einem Wort:

*Die Potentiale $U$ und $P$, desgleichen auch die Potentialtheile $P^{(\tau)}$, etc. sind bei der Differentiation wie bestimmte Integrale zu behandeln, bei denen nicht nur die Ausdrücke unter den Integralzeichen, sondern auch die Grenzen variabel sind.*

Um den Werth des Differentials $dP$ näher zu bestimmen, wollen wir zunächst auf einen speciellen Fall uns beschränken, nämlich annehmen, die in $v_g$ enthaltene positive Elektricität bewege sich während der Zeit $dt$ an der Oberfläche von $v_g$ überall *von Innen nach Aussen;* so dass also die zu *Anfang* der Zeit $dt$ innerhalb $v_g$ ent-

haltene positive Elektricität zu *Ende* dieser Zeit ein Volumen $w_g$ erfüllt, dessen Oberfläche diejenige von $v_g$ umschliesst. Diese Annahme soll sich auf $A$ wie auf $B$ beziehen; denn es steht $g$ für 0,1.

Das zu berechnende $dP$ kann dargestellt werden durch

(8.) $$dP = P'' - P',$$

wo $P'$ und $P''$ die Werthe des Potentiales (2.) zu Anfang und zu Ende der Zeit $dt$ vorstellen. Bezeichnen wir nun jedes elektrische Theilchen, jenachdem es augenblicklich innerhalb $v_g$ oder innerhalb des *schalenförmigen* Raumes $w_g - v_g$ sich befindet, mit $\eta_g$ oder $\varepsilon_g$, so besteht $P'$ aus lauter Gliedern von der Form:

(9.) $$(\eta_0 \eta_1),$$

hingegen $P''$ aus Gliedern der verschiedenen Formen:

(10.) $$(\eta_0 \eta_1), \quad (\varepsilon_0 \eta_1), \quad (\varepsilon_1 \eta_0), \quad (\varepsilon_0 \varepsilon_1).$$

Da die negative Elektricität mit der ponderablen Masse unlöslich verbunden ist, so bestehen die $\varepsilon_g$ nur aus *positiver* Elektricität, während die $\eta_g$ theils positiv theils negativ sind.

Durch Subtraction von (9.) und (10.) erhält man für das zu berechnende $dP$ oder $P'' - P'$ Glieder von der Form:

(11.) $$d(\eta_0 \eta_1), \quad (\varepsilon_0 \eta_1), \quad (\varepsilon_1 \eta_0), \quad (\varepsilon_0 \varepsilon_1),$$

wo unter $d(\eta_0 \eta_1)$ die Differenz zweier Ausdrücke von der Form $(\eta_0 \eta_1)$ zu verstehen ist, beide bezogen auf *dieselben* unendlich kleinen Volumelemente $Dv_0$, $Dv_1$. — Den Gliedern (11.) entsprechend zerfällt $dP$ in vier Theile:

(12.) $$dP = d[P] + (P\varepsilon_0 \eta_1) + (P\varepsilon_1 \eta_0) + (P\varepsilon_0 \varepsilon_1),$$

wo alsdann der erste Theil $d[P]$ als dasjenige Differential zu bezeichnen ist, welches auf die *gegebenen Volumina* $v_0$, $v_1$ sich bezieht, während das $dP$ selber nicht auf diese, sondern auf die *gegebenen Massen* $A$, $B$ sich bezieht. Selbstverständlich repräsentirt $(P\varepsilon_0 \eta_1)$ eine Summe von Gliedern, jedes von der Form $(\varepsilon_0 \eta_1)$, oder (einfacher ausgedrückt) das Potential $P$, bezogen auf alle Theilchen $\varepsilon_0$ einerseits und alle Theilchen $\eta_1$ andererseits. Aehnliches gilt von $(P\varepsilon_1 \eta_0)$ und $(P\varepsilon_0 \varepsilon_1)$.

Leicht erkennt man, dass die drei ersten Theile in (12.) von der Ordnung $dt$, der letzte Theil hingegen von der Ordnung $(dt)^2$ ist. Hieraus folgt:

(13.) $$dP = d[P] + (P\varepsilon_0 \eta_1) + (P\varepsilon_1 \eta_0).$$

Nachträglich übersieht man nun, dass die Formel (12.) oder (13.) in *allen* Fällen anwendbar ist, einerlei ob die Oberfläche von $w_g$ diejenige von $v_g$ umschliesst, oder schneidet, oder innerhalb derselben liegt. Bezeichnet man nämlich die während der Zeit $dt$ die Oberfläche von $v_g$ passirenden Theilchen mit $\varepsilon_g$, so werden die aus $v_g$ *austretenden* $\varepsilon_g$ genau ebenso wie früher zu behandeln sein, die in $v_g$ *eintretenden* $\varepsilon_g$ aber in entgegengesetzter Weise. Mit andern Worten:

(13'.) *Die Formel* (13.) *ist allgemein gültig, falls man unter* $\varepsilon_g$ *alle während der Zeit dt durch die Oberfläche von* $v_g$ *gegangenen Elektricitätstheilchen versteht, jedes multiplicirt mit* (+ 1) *oder* (— 1), *jenachdem dasselbe aus* $v_g$ *ausgeschieden, oder in* $v_g$ *eingetreten ist.*

Das Differential $dP$ zerfällt in vier partielle Differentiale $\delta_0 P$, $\delta_1 P$, $\Delta_0 P$, $\Delta_1 P$. Für diese findet man, von der Formel (13.) ausgehend, sofort die Werthe:

$$(14.)\qquad \begin{aligned} \delta_0 P &= \delta_0[P]\,, \\ \delta_1 P &= \delta_1[P]\,, \\ \Delta_0 P &= \Delta_0[P] + (P\varepsilon_0\eta_1)\,, \\ \Delta_1 P &= \Delta_1[P] + (P\varepsilon_1\eta_0)\,. \end{aligned}$$

Analoge Formeln ergeben sich offenbar für $U$ und auch für die in (3.) und (4.) genannten Theile von $P$.

Demgemäss können z. B. die Formeln (5. a, b) und (7.), falls man ebenso wie in (12.), (13.), (14.) die auf die gegebenen *Volumina* bezüglichen Differentiale durch *eckige Klammern* kenntlich macht, folgendermassen dargestellt werden:

$$(15.a)\quad (dT_A^B)_{\text{el. Us}} = 2d[P^{(\tau_0)}] - \delta_0[U+P] + 2(P^{(\tau_0)}\varepsilon_0\eta_1) + 2(P^{(\tau_0)}\varepsilon_1\eta_0)\,,$$

$$(15.b)\quad (dQ_A^B)_{\text{el. Us}} = 2d[P^{(\vartheta_0)}] - \Delta_0[U+P] + 2(P^{(\vartheta_0)}\varepsilon_0\eta_1) + 2(P^{(\vartheta_0)}\varepsilon_1\eta_0) - (U\varepsilon_0\eta_1) - (P\varepsilon_0\eta_1)\,,$$

$$(16.)\quad (dT_A^B + dT_B^A + dQ_A^B + dQ_B^A)_{\text{el. Us}} = d[P-U] + (P\varepsilon_0\eta_1) + (P\varepsilon_1\eta_0) - (U\varepsilon_0\eta_1) - (U\varepsilon_1\eta_0)\,.$$

Dieser letzte Ausdruck ist also, wie aus (7.) folgt, ein vollständiges Differential in Bezug auf die *Massen*, hingegen, wie aus (16.) ersichtlich, *kein* vollständiges Differential in Bezug auf die *Volumina*.

## § 13.

*Fortsetzung. Anwendung auf den Fall gleichförmiger Strömungen.*

Wir beschränken uns auf den Fall, dass die betrachteten elektrischen Strömungen *gleichförmig* sind, nämlich der Bedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \upsilon} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0 \tag{17.}$$

entsprechen (vrgl. pg. 174).

Sind nun nach wie vor $v_0$ und $v_1$ beliebig gegebene Volumina im Innern der betrachteten Körper, und $A$ und $B$ diejenigen Materien, welche zu Anfang der Zeit $dt$ innerhalb dieser Volumina enthalten sind, und bezeichnet man endlich mit $U$ und $P$ die Potentiale zwischen $A$ und $B$ zu Anfang der Zeit $dt$, so wird [vrgl. (4. $\alpha,\beta,\gamma,\delta$), pg. 175]:

$$(18.)\quad \begin{aligned} U &= \text{Null},\\ P &= 4A^2 \Sigma\Sigma \{E_0 Dv_0\, E_1 Dv_1\, \Theta_0 \Theta_1\},\\ P^{(\tau_0)} &= P^{(\tau_1)} = \text{Null},\\ P^{(\vartheta_0)} &= P^{(\vartheta_1)} = \tfrac{1}{2} P; \end{aligned}$$

dabei stehen $\Theta_0$, $\Theta_1$ zur Abkürzung für $\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_0}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_1}$. Selbstverständlich bezeichnen $E_0$, $E_1$ die Dichtigkeiten des positiven Fluidums, also Dichtigkeiten, welche im gegenwärtigen Fall, in Folge der Voraussetzung (7.), *constant* bleiben.

Schreibt man zur Abkürzung nicht nur $\Theta$, $\Theta_0$, $\Theta_1$ für $\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_0}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\vartheta_1}$, sondern ebenso auch $T$, $T_0$, $T_1$ für $\frac{\partial\varphi}{\partial r}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial r_0}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial r_1}$, so erhält man ferner für die in (15.a,b), (16.) auftretenden Grössen $(U\varepsilon_0\eta_1)$, $(P\varepsilon_0\eta_1)$, etc. etc. — immer mit Rücksicht auf die Voraussetzung (17.) — nach leichter Rechnung folgende Werthe:

$$(19.)\quad \begin{aligned} (U\varepsilon_0\eta_1) &= \text{Null},\\ (U\varepsilon_1\eta_0) &= \text{Null},\\ (P\varepsilon_0\eta_1) &= 4A^2\Sigma\Sigma\{\varepsilon_0 E_1 Dv_1(\tfrac{1}{2}\Theta_1^2 + \Theta_1\Theta_0 + \Theta_1 T)\},\\ (P\varepsilon_1\eta_0) &= 4A^2\Sigma\Sigma\{\varepsilon_1 E_0 Dv_0(\tfrac{1}{2}\Theta_0^2 + \Theta_0\Theta_1 + \Theta_0 T)\}, \end{aligned}$$

und ferner folgende:

$$(20.)\quad \begin{aligned} (P^{(\tau_0)}\varepsilon_0\eta_1) &= 2A^2\Sigma\Sigma\{\varepsilon_0 E_1 Dv_1\Theta_1 T_0\}, & (P^{(\tau_1)}\varepsilon_0\eta_1) &= 2A^2\Sigma\Sigma\{\varepsilon_0 E_1 Dv_1\Theta_1 T_1\},\\ (P^{(\tau_0)}\varepsilon_1\eta_0) &= 2A^2\Sigma\Sigma\{\varepsilon_1 E_0 Dv_0\Theta_0 T_0\}, & (P^{(\tau_1)}\varepsilon_1\eta_0) &= 2A^2\Sigma\Sigma\{\varepsilon_1 E_0 Dv_0\Theta_0 T_1\},\\ (P^{(\vartheta_0)}\varepsilon_0\eta_1) &= 2A^2\Sigma\Sigma\{\varepsilon_0 E_1 Dv_1\Theta_1\Theta_0\}, & (P^{(\vartheta_1)}\varepsilon_0\eta_1) &= 2A^2\Sigma\Sigma\{\varepsilon_0 E_1 Dv_1(\Theta+T)\Theta_1\},\\ (P^{(\vartheta_0)}\varepsilon_1\eta_0) &= 2A^2\Sigma\Sigma\{\varepsilon_1 E_0 Dv_0(\Theta+T)\Theta_0\}, & (P^{(\vartheta_1)}\varepsilon_1\eta_0) &= 2A^2\Sigma\Sigma\{\varepsilon_1 E_0 Dv_0\Theta_0\Theta_1\}. \end{aligned}$$

Ueberall haben hier $\varepsilon_0$, $\varepsilon_1$ die früher, in (13'.) angegebene Bedeutung, also die Werthe:

$$\begin{aligned}(21.)\qquad \varepsilon_0 &= (u_0\alpha_0 + v_0\beta_0 + w_0\gamma_0)\, D\omega_0 dt\,, \\ \varepsilon_1 &= (u_1\alpha_1 + v_1\beta_1 + w_1\gamma_1)\, D\omega_1 dt\,,\end{aligned}$$

wo $D\omega_g$ irgend ein Oberflächenelement des Volumens $v_g$, und $\alpha_g$, $\beta_g$, $\gamma_g$ die Richtungscosinus der auf $D\omega_g$ errichteten *äussern* Normale vorstellen; während $u_g$, $v_g$, $w_g$ die Componenten der durch $D\omega_g$ gehenden elektrischen Strömung bezeichnen. Die Summationen $\Sigma\Sigma$ in (19.), (20.) sind also hinerstreckt über die $D\omega_0$ und $Dv_1$, respective über die $D\omega_1$ und $Dv_0$. Mit andern Worten: Sie sind hinerstreckt über die *Oberfläche* des einen und den *Inhalt* des andern Volumens.

Durch Substitution der Werthe (18.), (19.), (20.) in die Formeln (15.a, b) und (16.) folgt sofort:

$$\begin{aligned}(22.a)\quad (dT_A^B)_{el.\,Us} &= -\,\delta_0[P] + 4A^2\Sigma\Sigma\,\{\varepsilon_0 E_1 Dv_1 \theta_1 T_0\} \\ &\quad + 4A^2\Sigma\Sigma\,\{\varepsilon_1 E_0 Dv_0 \theta_0 T_0\}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(22.b)\quad (dQ_A^B)_{el.\,Us} &= d[P] - \Delta_0[P] + 4A^2\Sigma\Sigma\,\{\varepsilon_0 E_1 Dv_1(-\tfrac{1}{2}\theta_1^2 - \theta_1 T)\} \\ &\quad + 4A^2\Sigma\Sigma\,\{\varepsilon_1 E_0 Dv_0(\theta + T)\,\theta_0\}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(23.)\quad (dT_A^B + dT_B^A + dQ_A^B + dQ_B^A)_{el.\,Us} &= \\ = d[P] &+ 4A^2\Sigma\Sigma\,\{\varepsilon_0 E_1 Dv_1(\tfrac{1}{2}\theta_1^2 + \theta_1\theta_0 + \theta_1 T)\} \\ &+ 4A^2\Sigma\Sigma\,\{\varepsilon_1 E_0 Dv_0(\tfrac{1}{2}\theta_0^2 + \theta_0\theta_1 + \theta_0 T)\}\,,\end{aligned}$$

wo also überall unter $\varepsilon_0$, $\varepsilon_1$ die Ausdrücke (21.) zu verstehen sind.

Vergleicht man die beiden Formeln (22.a, b) mit denjenigen, welche ich früher, in meinem Werke: *Die elektrischen Kräfte*, von ganz *andern* Grundlagen aus entwickelt habe, so findet man volle Uebereinstimmung bei der ersten Formel, hingegen Verschiedenheit bei der zweiten.*)

---

*) Um eine solche Vergleichung zu ermöglichen, sind jene Formeln [*Elektrische Kräfte*, pg. 211, Form. (33.$\alpha$), (34.$\alpha$) und (35.)] ebenfalls auf den hier betrachteten Fall *gleichförmiger* Ströme, d. i. auf die Voraussetzung (17.) zu beziehen. Alsdann aber nehmen jene Formeln, bei Anwendung der hier gebrauchten Bezeichnungen, folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned}(dT_A^B)_{eldy.\,Us} &= -\,\delta_0[P] + 4A^2\Sigma\Sigma\,\{\varepsilon_0 E_1 Dv_1 \theta_1 T_0\} \\ &\quad + 4A^2\Sigma\Sigma\,\{\varepsilon_1 E_0 Dv_0 \theta_0 T_0\}\,, \\ (dQ_A^B)_{eldy.\,Us} &= d[P] - \Delta_0[P] - 4A^2\Sigma\Sigma\,\{\varepsilon_0 E_1 Dv_1 \theta_1 T\}\,, \\ (dT_A^B + dT_B^A + dQ_A^B + dQ_B^A)_{eldy.\,Us} &= d[P]\,,\end{aligned}$$

wo statt des Index: *eldy. Us*, ebenso gut auch der Index: *el. Us* gesetzt werden

## § 14.

*Fortsetzung. Anwendung auf lineare Leiter und Ableitung des Ampère'schen Gesetzes.*

Zur Voraussetzung der Gleichförmigkeit (17.) mag noch die hinzugefügt werden, dass die betrachteten Körper linear, also drahtförmig sind. Nimmt man für die Volumina $v_0$ und $v_1$ zwei Segmente dieser Drähte, setzt man also:

$$v_0 = q_0(s_0'' - s_0') , \qquad v_1 = q_1(s_1'' - s_1') ,$$

wo $q_0$, $q_1$ die Querschnitte der Drähte, und $s_0'$, $s_0''$, $s_1'$, $s_1''$ die jene Segmente bestimmenden Bogenlängen bezeichnen sollen, so kann die Formel (22.a) weiter entwickeit werden.

Um zunächst die in jener Formel in der *ersten* Zeile auftretende über $\varepsilon_0$ oder (was dasselbe) über $D\omega_0$ ausgedehnte Summe:

$$\mathfrak{L} = \Sigma\,\{e_0 E_1 Dv_1 \Theta_1 T_0\} = \Sigma\left\{(u_0\alpha_0 + ..)\, D\omega_0 E_1 Dv_1 \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta_1}\frac{\partial\psi}{\partial r_0}\right\} dt$$

dem gegenwärtigen Falle anzupassen, mag die Strömung $u_0$, $v_0$, $w_0$ mit $i_0$, und die auf $D\omega_0$ errichtete äussere Normale $\alpha_0$, $\beta_0$, $\gamma_0$ mit $\nu_0$ bezeichnet werden. Dann wird:

$$\mathfrak{L} = \Sigma\left\{i_0 \cos(i_0, \nu_0)\, D\omega_0 \,.\, E_1 Dv_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\frac{ds_1}{d\vartheta_1}\frac{\partial\psi}{\partial r_0}\right\} dt .$$

Nun ist $E_1 \frac{ds_1}{d\vartheta_1} \doteq i_1$ (pg. 152), falls nämlich $i_1$ die in $Dv_1$ vorhandene Strömung vorstellt. Somit folgt:

$$\mathfrak{L} = \Sigma\left\{i_0 \cos(i_0, \nu_0)\, D\omega_0 \,.\, i_1 Dv_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\frac{\partial\psi}{\partial r_0}\right\} dt .$$

Diese Summe aber reducirt sich auf diejenigen beiden Querschnitte $q_0$, von denen das Segment $v_0$ begrenzt wird; denn für alle übrigen Oberflächenelemente $D\omega_0$ ist der Winkel $(i_0, \nu_0) = 90^0$. Somit folgt:

$$\mathfrak{L} = \left[i_0 q_0 \,.\, i_1 Dv_1 \frac{\partial\psi}{\partial s_1}\frac{\partial\psi}{\partial r_0}\right]'' dt ,$$

wo durch die beigefügten Accente die Differenz derjenigen Werthe angedeutet ist, welche der eingeklammerte Ausdruck annimmt für $s_0'$ und $s_0''$. Nun ist im gegenwärtigen Fall $Dv_1 = q_1 Ds_1$, mithin:

$$i_0 q_0 \,.\, i_1 Dv_1 = i_0 q_0 i_1 q_1 Ds_1 = J_0 J_1 Ds_1 ,$$

wo $J_0$, $J_1$ die sogenannten Stromstärken sind. Somit folgt:

---

darf; denn Kräfte *elst. Us.* sind in Folge der gemachten Voraussetzung (17.) *nicht* vorhanden.

$$\mathfrak{L} + J_0 J_1 \left[ Ds_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \frac{\partial \psi}{\partial \tau_0} \right]_{'}^{''} dt .$$

Mit Rücksicht hierauf nimmt jene Formel (22. a), falls man die in ihrer *zweiten* Zeile enthaltene über $\varepsilon_1$ oder $D\omega_1$ ausgedehnte Summe in analoger Weise behandelt, folgende Gestalt an:

$$(24.) \quad (dT_A^B)_{\text{el. Us}} = -\delta_0 [P] + 4A^2 J_0 J_1 \, . \, \Sigma \left[ Ds_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \frac{\partial \psi}{\partial \tau_0} \right]_{'}^{''} dt$$
$$+ 4A^2 J_0 J_1 \, . \, \Sigma \left[ Ds_0 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \frac{\partial \psi}{\partial \tau_0} \right]_{'}^{''} dt ,$$

wo die Accente der obern Zeile auf $s_0'$, $s_0''$, die der untern Zeile auf $s_1'$, $s_1''$ Bezug haben. Demgemäss kann die Formel auch so geschrieben werden:

$$(25.) \quad (dT_A^B)_{\text{el. Us}} = -\delta_0 [P] + 4A^2 J_0 J_1 \Sigma\Sigma \left\{ Ds_0 Ds_1 \frac{\partial}{\partial s_0} \left( \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \frac{\partial \psi}{\partial \tau_0} \right) \right\} dt$$
$$+ 4A^2 J_0 J_1 \Sigma\Sigma \left\{ Ds_0 Ds_1 \frac{\partial}{\partial s_1} \left( \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \frac{\partial \psi}{\partial \tau_0} \right) \right\} dt,$$

während gleichzeitig das in der Formel enthaltene elektrodynamische Potential $P$ nach (18.) darstellbar ist durch:

$$(26.) \quad P = 4A^2 J_0 J_1 \Sigma\Sigma \left\{ Ds_0 Ds_1 \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \right\} .$$

In (25.) wie in (26.) ist die Summation $\Sigma\Sigma$ ausgedehnt über sämmtliche Bogenelemente $Ds_0$, $Ds_1$ der gegebenen Segmente.

Substituirt man den Werth (26.) in (25.), so folgt:

$$(27.) \quad (dT_A^B)_{\text{el. Us}} =$$
$$= 4A^2 J_0 J_1 \, . \, \Sigma\Sigma \, Ds_0 Ds_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial s_0} \left( \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \frac{\partial \psi}{\partial \tau_0} \right) + \frac{\partial}{\partial s_1} \left( \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \frac{\partial \psi}{\partial \tau_0} \right) - \frac{\partial}{\partial \tau_0} \left( \frac{\partial \psi}{\partial s_0} \frac{\partial \psi}{\partial s_1} \right) \right\} dt,$$

oder was dasselbe ist:

$$(28.) \quad (dT_A^B)_{\text{el. Us}} = 4A^2 J_0 J_1 \, . \, \Sigma\Sigma \, Ds_0 Ds_1 \left\{ 2 \frac{\partial \psi}{\partial \tau_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s_0 \partial s_1} \right\} dt .$$

Die betrachteten Segmente können beliebig lang sein. Nimmt man dieselben unendlich klein, das eine $= Ds_0$, das andere $= Ds_1$, so reducirt sich die Formel (28.) auf:

$$(29.) \quad (dT_A^B)_{\text{el. Us}} = 4A^2 J_0 J_1 Ds_0 Ds_1 \, . \, 2 \frac{\partial \psi}{\partial \tau_0} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s_0 \partial s_1} dt ;$$

wofür, weil $\frac{\partial \psi}{\partial \tau_0} dt = \frac{d\psi}{dr} \frac{\partial r}{\partial \tau_0} dt = \frac{d\psi}{dr} \delta_0 r$ ist, auch geschrieben werden kann:

$$(30.) \quad (dT_A^B)_{\text{el. Us}} = \left( 8A^2 J_0 J_1 Ds_0 Ds_1 \frac{d\psi}{dr} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s_0 \partial s_1} \right) \delta_0 r .$$

Dies also ist diejenige ponderomotorische Arbeit, welche das Stromelement $J_1 Ds_1$ während der Zeit $dt$ auf das Stromelement $J_0 Ds_0$ ausübt.

Bezeichnet man nun aber die zwischen den beiden Stromele-

menten stattfindende ponderomotorische Kraft, repulsiv gerechnet, mit $\mathfrak{R}$, so kann die eben genannte ponderomotorische Arbeit bekanntlich ausgedrückt werden durch:

$$(31.)\qquad (dT_A^B)_{\text{el. Us}} = \mathfrak{R}\,\delta_0 r\,.$$

Aus (30.) und (31.) folgt sofort:

$$(32.)\qquad \mathfrak{R} = 8A^2 \frac{d\varphi}{dr} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s_0 \partial s_1} J_0 Ds_0 J_1 Ds_1\,;$$

und dies ist das *Ampère*'sche Gesetz (vrgl. pg. 122, 123).

## § 15.

*Nachträgliche Bemerkungen.*

Die Formeln (49.a, b) pg. 169, welche den Angelpunkt der ganzen weiteren Betrachtung bildeten, können, falls man bei den Potentialen die Indices $A$, $B$ der Bequemlichbkeit willen unterdrückt, so dargestellt werden:

$$(1.a)\qquad (dT_A^B)_{\text{el. Us}} = 2\,dP^{(\tau_0)} - \frac{\partial(U+P)}{\partial \tau_0}\,dt\,,$$

$$(1.b)\qquad (dQ_A^B)_{\text{el. Us}} = 2\,dP^{(\vartheta_0)} - \frac{\partial(U+P)}{\partial \vartheta_0}\,dt\,.$$

Daselbst hat das elektrodynamische Potential $P$ den Werth [Form. (46), pg. 168]:

$$(2.)\qquad P = 2A^2 \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2,$$

wofür geschrieben werden kann:

$$(3.)\qquad P = 2A^2 \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau_0}\tau_0' + \frac{\partial\psi}{\partial\tau_1}\tau_1' + \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta_0}\vartheta_0' + \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta_1}\vartheta_1'\right)^2,$$

wo die Accente Differentiationen nach $t$ andeuten sollen. Selbstverständlich sind im gegenwärtigen Fall die mit den Accenten versehenen Grössen sämmtlich $= 1$; denn es ist ja z. B. $\tau_0$ gleich $t$, nämlich unter gewissen Umständen in Stellvertretung von $t$ gebraucht. Differenzirt man die Formel (3.) partiell nach $\tau_0'$, so folgt:

$$\frac{\partial P}{\partial \tau_0'} = 4A^2 \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau_0}\tau_0' + \ldots\right)\frac{\partial\psi}{\partial\tau_0}\,,$$

wofür einfacher geschrieben werden kann:

$$(4.)\qquad \frac{\partial P}{\partial \tau_0'} = 4A^2 \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \frac{d\psi}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial\tau_0}\,;\ \text{ebenso wird:}\quad \frac{\partial P}{\partial \vartheta_0'} = 4A^2 \Sigma\Sigma\, e_0 e_1 \frac{d\psi}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial\vartheta_0}\,.$$

Hieraus aber erkennt man, dass die mit $P^{(\tau_0)}$, $P^{(\vartheta_0)}$ bezeichneten Grössen [Form. (17. $\varepsilon$), pg. 168] sich so ausdrücken lassen:

$$(5.)\qquad 2\,P^{(\tau_0)} = \frac{\partial P}{\partial \tau_0'}\,,\qquad 2\,P^{(\vartheta_0)} = \frac{\partial P}{\partial \vartheta_0'}\,.$$

Demgemäss nehmen die Formeln (1.a, b) folgende Gestalt an:

$$(6.a)\qquad (dT_A^B)_{\text{el. Us}} = \left[\frac{d}{dt}\,\frac{\partial P}{\partial \tau_0'} - \frac{\partial (P+U)}{\partial \tau_0}\right] dt\,,$$

$$(6.b)\qquad (dQ_A^B)_{\text{el. Us}} = \left[\frac{d}{dt}\,\frac{\partial P}{\partial \vartheta_0'} - \frac{\partial (P+U)}{\partial \vartheta_0}\right] dt\,;$$

so dass man also die Ausdrücke rechts als die negativen *Variationscoefficienten* von $P + U$ nach $\tau_0$ und $\vartheta_0$ bezeichnen könnte.

Es mag mir beiläufig noch gestattet sein, zu bemerken, dass die von mir eingeführte Methode, die Zeit je nach ihrem Vorkommen mit verschiedenen Buchstaben zu bezeichnen, vielleicht auch in der gewöhnlichen Mechanik von Nutzen sein könnte.

Es seien

$$(\alpha.)\qquad m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial V}{\partial x} + \lambda\,\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mu\,\frac{\partial \psi}{\partial x} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

die Differentialgleichungen für die Bewegung eines Systems von $n$ Punkten, wo $x$ als Collectivbezeichnung für die Coordinaten sämmtlicher Punkte dienen soll. Ferner seien $q_1$, $q_2$, . . . die an Stelle der $x$ einzuführenden independenten Variablen. Dann werden $q_1$, $q_2$, . . . unbekannte Functionen der Zeit sein:

$$q_1 = F(t)\,,\qquad q_2 = G(t)\,,\;\ldots\ldots;$$

und es mag nun die Zeit, im Allgemeinen mit $t$ bezeichnet, specieller mit $\tau_1$ benannt werden, sofern sie in $q_1$ enthalten ist, mit $\tau_2$, sofern sie in $q_2$ vorkommt, u. s. w. Also:

$$q_1 = F(\tau_1)\,,\qquad q_2 = G(\tau_2)\,,\;\ldots\ldots$$

Multiplicirt man die Gleichungen ($\alpha$.) mit den $\frac{\partial x}{\partial \tau_1}$, und addirt, so folgt sofort:

$$(\beta.)\qquad \Sigma\left(m\,\frac{d^2x}{dt^2}\,\frac{\partial x}{\partial \tau_1}\right) = -\frac{\partial V}{\partial \tau_1}\,,$$

wofür geschrieben werden kann:

$$(\gamma.)\qquad \frac{d}{dt}\,\Sigma\left(m\,\frac{dx}{dt}\,\frac{\partial x}{\partial \tau_1}\right) - \Sigma\left(m\,\frac{dx}{dt}\,\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial \tau_1}\right) = -\frac{\partial V}{\partial \tau_1}\,.$$

Ist nun $T$ die lebendige Kraft des Systems:

$$T = \Sigma \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \Sigma \frac{m}{2} \left(\frac{\partial x}{\partial \tau_1} \tau_1' + \frac{\partial x}{\partial \tau_2} \tau_2' + \ldots\right)^2,$$

wo die Accente Differentiationen nach $t$ bezeichnen, so erhält man sofort:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau_1} = \Sigma\, m \frac{dx}{dt} \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial \tau_1},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau_1'} = \Sigma\, m \left(\frac{\partial x}{\partial \tau_1} \tau_1' + \frac{\partial x}{\partial \tau_2} \tau_2' + \ldots\right) \frac{\partial x}{\partial \tau_1} = \Sigma\, m \frac{dx}{dt} \frac{\partial x}{\partial \tau_1};$$

so dass also die Formel ($\gamma$.) auch so geschrieben werden kann:

$$(\delta.) \qquad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \tau_1'} = \frac{\partial (T - V)}{\partial \tau_1}.$$

Hiemit aber sind wir von den *Lagrange*'schen Differentialgleichungen *erster* Form ($\alpha$.) zu denen *zweiter* Form ($\delta$.) gelangt.

Vierter Abschnitt.

# Ueber diejenigen Untersuchungen und Bemerkungen von Helmholtz, welche mit dem Inhalt gegenwärtiger Abhandlung zusammenhängen.

## § 1.

*Der Helmholtz'sche Einwand* (A.) *gegen das Weber'sche Gesetz.*

Derselbe besteht (Borchardt's Journal, Bd. 72, pg. 61 und Bd. 75, pg. 38) in der Behauptung, dass das *Weber*'sche Gesetz oder vielmehr die aus diesem Gesetz entspringenden *Kirchhoff*'schen Differentialgleichungen zu einer labilen Gleichgewichtslage der elektrischen Materie, respective zu einer Bewegung dieser Materie hinführen, deren Geschwindigkeit mit der Zeit ins Unendliche wächst.

Mit Rücksicht hierauf ist von mir (Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. Octob. 1871, pg. 477) geltend gemacht worden, dass die *Kirchhoff*'schen Differentialgleichungen, ausser auf dem *Weber*'schen Gesetz, noch auf mancherlei andern accessorischen Voraussetzungen beruhen (welche mit hinreichender Schärfe zu formuliren vielleicht nicht ganz leicht sein werde), und dass also das *Weber*'sche Gesetz durch ein gegen jene Differentialgleichungen geäussertes Bedenken nicht erschüttert werden könne.

Dass diese meine Bemerkung auf *solider Basis* ruht, wird nach den Expositionen der gegenwärtigen Abhandlung (pg. 128—149) nicht mehr zu bezweifeln sein, trotz der entgegenstehenden Aeusserungen des Herrn *Helmholtz* (Borchardt's Journal, Bd. 75, pg. 55).

## § 2.

*Der Helmholtz'sche Einwand* (B.) *gegen das Weber'sche Gesetz.*

Derselbe besteht (Borchardt's Journal, Bd. 72, pg. 63 und Bd. 75, pg. 38) darin, dass das *Weber*'sche Gesetz zu physikalisch unzulässigen Folgerungen hinleitet, sobald man dasselbe in Anwendung bringt auf einen elektrischen Massenpunkt, der entweder von einem andern solchen Punkt oder von einer elektrischen Kugelfläche sollicitirt wird.

Ich habe in der gegenwärtigen Abhandlung (vrgl. pg. 99) dargelegt, dass dieser Einwand sehr wohl eine *ernstliche Bedeutung* haben könne; dass man aber, darüber mit voller Bestimmtheit zu urtheilen, einstweilen noch nicht im Stande sei.

## § 3.

*Ueber einen von Herrn Helmholtz dem Verfasser zur Last gelegten Rechnungsfehler.*

In seinem kritischen Aufsatz (Borchardt's Journal, Bd. 75, pg. 55, Note) behauptet Herr *Helmholtz*, dass ich bei meinen elektrodynamischen Untersuchungen (Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. Octob. 1871, pg. 409) einen mathematischen Fehler gemacht hätte.

Dass diese Behauptung auf irgend welchen Irrthum des Herrn *Helmholtz* zurückzuführen ist, dürfte aus der gegenwärtigen Abhandlung (vrgl. pg. 162, 163) deutlich hervorgehen.

## § 4.

*Ueber das Energie- und Potential-Gesetz.*

In meinen elektrodynamischen Untersuchungen (Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. Octob. 1871) hatte ich — ebenso wie im dritten Abschnitt der gegenwärtigen Abhandlung — die Consequenzen des *Weber*'schen Gesetzes unter Zugrundelegung einer gewissen unitarischen Anschauungsweise zu entwickeln gesucht. Dabei gelangte ich zu dem Resultat, dass das Princip der lebendigen Kraft im Gebiet der elektrischen

Kräfte nicht durch *einen*, sondern durch *zwei* Sätze dargestellt sei, welche ich zur bequemern Unterscheidung als *Energie-* und *Potential-Gesetz**) bezeichnete. Zugleich bemerkte ich (l. c. pg. 472), dass diese beiden Gesetze genau in derselben Form auch aus der neuerdings von *Helmholtz* aufgestellten Theorie sich ableiten liessen, nur mit dem Unterschiede, dass das Potential-Gesetz aus der *Helmholtz*'schen Theorie sich als *allgemein* gültig ergebe, während seine Ableitung aus *meiner* Theorie bis zu jener Zeit nur für gewisse specielle Fälle gelungen wäre. — Mit Bezug hierauf hat nun Herr *Helmholtz* (Borchardt's Journal, Bd. 75, pg. 39) folgende Bemerkung gemacht:

> Gegen meinen Einwand (A.) hat Herr *C. Neumann* nur im Allgemeinen geltend gemacht, die *Kirchhoff*'schen Differentialgleichungen seien noch auf andere, nicht genau präcisirte Hypothesen gegründet, ohne aber die ihm hypothetisch erscheinenden Punkte näher zu bezeichnen. Was ich aus diesen gefolgert hätte, gelte nicht gegen das *Weber*'sche Gesetz. Uebrigens hat er selbst aus seiner eigenen neuen Annahme keine Differentialgleichungen der elektrischen Bewegung hergeleitet, sondern erklärt nur auf pg. 472 seines Aufsatzes, dass das zur Aufstellung dieser Gleichungen nöthige »Potentialgesetz« bisher für andere, als geschlossene lineare Strömungen noch nicht eruirt worden sei. Demgemäss ist denn Herr *C. Neumann* auch den Beweis schuldig geblieben, dass seine neue Modification des *Weber*'schen Gesetzes zu stabilem Gleichgewicht der ruhenden Elektricität in Leitern führe.

Dass die *Kirchhoff*'schen Differentialgleichungen ausser auf das *Weber*'sche Gesetz noch auf andere bisher nicht genau präcisirte Hypothesen gegründet sind, ist durch die Expositionen gegenwärtiger Abhandlung (vrgl. pg. 128—149) hinreichend constatirt, zugleich also auch constatirt, dass ein Einwand gegen jene Differentialgleichungen noch nicht als ein Einwand gegen das *Weber*'sche Gesetz anzusehen sei.

Andererseits will ich gerne einräumen, dass die *Kirchhoff*'schen Differentialgleichungen ein labiles Gleichgewicht der Elektricität in leitenden Körpern geben, mithin unhaltbar seien, und dass Herr *Helmholtz* mit grossem Scharfsinn und gutem Erfolg sich bemüht habe, andere Differentialgleichungen aufzufinden, die von diesem Uebelstande frei sind. Desgleichen will ich gerne anerkennen, dass ich selber mit der Aufstellung solcher Differentialgleichungen bisher mich *nicht* beschäftigt habe. — Nur bitte ich aus diesem letztern Umstande,

---

*) Dieselben Namen sind auch in gegenwärtiger Abhandlung (pg. 173) gebraucht.

der eine nothwendige Consequenz des von mir verfolgten wissenschaftlichen Planes ist, mir keinen Vorwurf zu machen.

Wir haben nämlich im Gebiet der elektrischen Erscheinungen zu unterscheiden zwischen solchen Wirkungen, die in *beträchtlichen* Entfernungen stattfinden, und zwischen solchen, bei denen die Entfernungen *äusserst kleine* sind; wobei zu bemerken, dass zur Aufstellung der Differentialgleichungen für die Bewegung der Elektricität in einem gegebenen Leiter sowohl die Kenntniss der Wirkungen *erster* Art als auch diejenige der Wirkungen *zweiter* Art erfordert wird.

Je schwieriger nun aber die Erforschung eines wissenschaftlichen Gebietes ist, desto nothwendiger erscheint es, *planmässig* vorzugehen, mit dem Leichteren zu beginnen, und erst, wenn man hier festen Fuss gefasst hat, zum Schwierigeren überzugehen. Da nun im gegenwärtigen Fall der leichtere Theil des zu erforschenden Gebietes durch die Wirkungen *erster* Art, der schwierigere Theil durch die Wirkungen *zweiter* Art repräsentirt ist, so wird es gut sein — und diess ist der von mir verfolgte Plan —, mit den Wirkungen *erster* Art zu beginnen, und zu den Wirkungen *zweiter* Art, mithin auch zur Aufstellung der in Rede stehenden Differentialgleichungen, falls irgend möglich nicht früher überzugehen, als bis die Theorie jener Wirkungen *erster* Art zu *einiger Festigkeit* gediehen ist, — was bis jetzt offenbar noch nicht der Fall.

Dass ich übrigens, wie Herr *Helmholtz* in seiner obigen Bemerkung ausspricht, erklärt haben solle, zur Aufstellung jener Differentialgleichungen *bedürfe es des Potentialgesetzes*, beruht wohl auf irgend welchem Missverständniss; denn man wird eine derartige Aeusserung in meinem Aufsatz vergeblich suchen.

Ein zweiter Irrthum des Herrn *Helmholtz* besteht darin, dass er von einer *neuen* Modification des *Weber*'schen Gesetzes spricht, welche nach seiner Ansicht (Borch. Journal, Bd. 75, pg. 39) von mir nur eingeführt sei, um seine gegen das *Weber*'sche Gesetz erhobenen Einwände zu beseitigen. Denn jene angeblich *neue* Modification ist bereits vor *funfzehn* Jahren von mir eingeführt worden (vrgl. die gegenwärtige Abhandlung, pg. 115).

## § 5.

*Ueber die Beziehung des Energiegesetzes zum Inductionsgesetz.*

Meine elektrodynamischen Untersuchungen (Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. Octob. 1871) führten mich zu einem genaueren Studium der bekannten *Helmholtz*'schen Schrift über die Erhaltung der Kraft (Berlin. 1847). Auf Grund dieses Studiums sah ich mich (l. c. pg. 439) zu der Erklärung veranlasst, dass die durch jene *Helmholtz*'sche Schrift hervorgerufene und vielfach verbreitete Ansicht, ***das Inductionsgesetz könne, wenn auch nicht im Allgemeinen, so doch wenigstens in denjenigen Fällen, wo die Induction durch einen constanten Magneten hervorgebracht wird, aus dem Princip der Erhaltung der Energie deducirt werden***, auf Irrthum beruhe. — Hierauf hat Herr *Helmholtz* (Borchardt's Journal, Bd. 75, pg. 62) folgendermassen erwiedert:

> Der Streit darüber, ob die Existenz der elektrodynamischen Induction aus dem Gesetz von der Erhaltung der Kraft »deducirt« werden könne, hat für mich nur den Werth eines *Wortstreites*. Meine Aufgabe in der Erhaltung der Kraft war, die sämmtlichen damals bekannten Thatsachen durchzugehen und zu prüfen, ob sie mit dem betreffenden allgemeinen Gesetze in Uebereinstimmung waren, ob sich vielleicht im Gegentheil irgendwo Lücken oder Widersprüche zeigten. Als *Form der Darstellung* ist es bei solcher Aufgabe oft anschaulicher, die Richtigkeit des allgemeinen Gesetzes vorauszusetzen, die Folgen zu deduciren, nicht aber um sie durch eine solche Deduction als bewiesen zu betrachten, sondern um sie mit den Thatsachen zu vergleichen, und dadurch die Zulässigkeit des allgemeinen Gesetzes zu prüfen, was den Ausgangspunkt bildete. Will man alle bei der elektrodynamischen Induction in Betracht kommenden Thatsachen bis auf eine als bekannt voraussetzen, so wird man diese eine immer noch aus dem Gesetz von der Constanz der Energie »deduciren« können, so z. B. den Werth der Inductionsconstante. Aber als Beweismittel von thatsächlichen Wahrheiten kenne ich nur den Weg der *Induction*.

Ich kann keineswegs zugeben, dass es sich hier nur um einen Wortstreit handelt. Vielmehr handelt es sich um ziemlich tiefgehende Differenzen. Um solches näher darzulegen, sei Folgendes bemerkt:

Die Ansicht, welche *Helmholtz* theils in seiner Schrift über die Erhaltung der Kraft (Berlin. 1847), theils in den eben wiederholten Worten, theils auch an einer andern Stelle (Borchardt's Journal, Bd. 72, pg. 69) vertritt, geht dahin,

(H.) *dass das Princip der Erhaltung der Energie und die Annahme constanter Magnete mit den gewöhnlichen und für richtig geltenden Gesetzen der Elektrodynamik in Einklang gebracht werden können.*

Demgemäss hat denn auch Herr *Helmholtz* (Borchardt's J., Bd. 75) behauptet, dass es nur gewisser geringfügiger Modificationen bedürfe, um den betreffenden Theil seiner Schrift (von 1847) allen Anforderungen entsprechend zu machen. Diese Modificationen oder Correctionen aber seien — so ungefähr äussert sich Herr *Helmholtz* (l. c. pg. 61) — in allen wesentlichen Punkten schon vor langer Zeit von ihm selber ausgeführt, und meine Erörterungen über seine Schrift seien daher überflüssig.

Mit dieser *Helmholtz*'schen Anschauungsweise steht die *meinige* in diametralem Gegensatz. Denn die von mir vertretene Ansicht (Ber. d. Kgl. Sächs. Ges. Octob. 1871, pg. 440) geht dahin,

(N.) *dass die Herstellung eines solchen Einklanges, wie er in* (H.) *erwähnt wurde, unmöglich, und folglich die Annahme constanter Magnete* (*wenigstens bei Anwendung des Princips der Erhaltung der Energie*) *unzulässig sei, und zwar unzulässig nicht nur im exacten, sondern auch im approximativen Sinne.*

Mag man nämlich den von der Induction *constanter* Magnete handelnden Abschnitt jener *Helmholtz*'schen Schrift (von 1847) corrigiren wie man will, immer werden daselbst noch Widersprüche zurückbleiben, — es sei denn, dass man sich entschlösse, die Vorstellung *constanter* Magnete aufzugeben, womit dann aber selbstverständlich ein Aufgeben jenes ganzen Abschnittes verbunden sein würde.

Näheres hierüber habe ich bereits an einem andern Orte mitgetheilt (Math. Annalen, Bd. VI, pg. 342—349).

Fünfter Abschnitt.

## Schlussbemerkungen zur vorhergehenden und zur gegenwärtigen Abhandlung.

Zwischen der mathematischen und physikalischen Wissenschaft bestehen wesentliche Unterschiede. Bei einem mathematischen Satz z. B. wird stets die erste Frage sein, ob derselbe richtig oder unrichtig sei. Im einen Fall steht er für immer fest, während er im andern Fall für immer zu verwerfen ist. Bei einem physikalischen Satz hingegen kann eine solche Frage niemals erhoben werden; denn es würde z. B. keinen Sinn haben, wenn man fragen wollte, ob das *Newton*'sche Gesetz richtig oder unrichtig sei.

In der That wird bei einem physikalischen Satz niemals von seiner *Richtigkeit*, sondern immer nur von seinem mehr oder weniger guten *Einklang mit den beobachteten Thatsachen* die Rede sein können. Damit hängt zusammen, dass wir in der Mathematik *definitive* Sätze haben, während die Sätze der Physik wahrscheinlich alle mehr oder weniger als *provisorische* zu betrachten sind.

Ein anderer Unterschied zwischen den beiderlei Wissenschaften knüpft sich an die Worte Induction und Deduction. Gewiss hat man mit vollem Recht gesagt, dass in der Physik ein wesentlicher Fortschritt immer nur durch *Induction* bewerkstelligt werden könne; während andererseits die Fortschritte der mathematischen Wissenschaft nothwendig von solcher Art sind, dass sie, wenn auch bisweilen durch *Induction* bewerkstelligt, doch immer durch *Deduction* hätten bewerkstelligt werden können.

Es scheint somit, dass der Mathematiker im Gebiete der Physik wenig zu suchen habe, dass er etwa nur die Exempel auszurechnen habe, welche der Physiker ihm vorlegt.

So urtheilen zu wollen, würde sehr übereilt sein. — Vielmehr hat der Mathematiker im Gebiete der Physik eine wichtige und nicht zu unterschätzende Aufgabe. Sie besteht darin, die einstweilen *vorhandenen* physikalischen Vorstellungen näher zu erforschen, ihre Consequenzen nach allen Seiten mit möglichster Strenge zu verfolgen; mit einem Wort, sie besteht darin, diese Vorstellungen *deductiv* zu

entwickeln. Solche *deductive* Entwickelungen werden, namentlich wenn sie in festen und möglichst geradlinigen Zügen ausgeführt sind, dazu dienen, die Uebersichtlichkeit des betreffenden Gebietes zu vergrössern; sie werden beitragen, um gewissermassen unserm geistigen Blick allmählig diejenige Weite und Schärfe, namentlich aber diejenige Ruhe und Sicherheit zu geben, welche zu einer glücklichen *Induction* d. i. zum Emportauchen *neuer und besserer* Vorstellungen erforderlich sind.

Einer solchen deductiven Behandlung habe ich nun die in der *Elektrodynamik* üblichen Vorstellungen zu unterwerfen gesucht. Dabei war (was allerdings erst im Verlaufe der Arbeit deutlich wurde) zu beachten, dass die eben genannten Vorstellungen in zwei von einander ziemlich unabhängige Kreise zerfallen; so dass jeder Kreis einer besondern Behandlung bedurfte.

(I.) *Der eine Kreis bietet eine gewisse äusserliche Charakteristik der elektrischen Kräfte dar. Er enthält die Vorstellung, dass diese Kräfte den Stromstärken (resp. den Aenderungen derselben) proportional sind, sonst aber nur noch von der relativen Lage (resp. der Aenderung derselben) abhängen, ferner die Vorstellung, dass jedes elektrische Stromelement hinsichtlich seiner ponderomotorischen und elektromotorischen Wirkungen ersetzbar ist durch seine sogenannten Componenten, endlich die Vorstellung, dass die elektrischen Strömungen den einwirkenden elektromotorischen Kräften proportional sind.*

(II.) *Andererseits bezieht sich der zweite Kreis von Vorstellungen auf die innere Constitution der betreffenden Körper. Er enthält die Vorstellung, dass jede ponderable Masse in ihrem Innern zwei elektrische Materien von entgegengesetzten Eigenschaften beherberge, und ferner die Vorstellung, dass die kleinsten Theilchen dieser elektrischen Materien nach dem Weber'schen Gesetz auf einander einwirken.*

Den (I.) Kreis habe ich in meinem Werke: »*Die elektrischen Kräfte*« (Teubner, 1873) und in meiner früheren Abhandlung: »*Ueber die den Kräften elektrodynamischen Ursprungs zuzuschreibenden Elementargesetze*« (Abh. d. Ges. 1873, Bd. X, pg. 419) einer sorgfältigen Betrachtung unterworfen. Eine entsprechende Untersuchung des (II.) Kreises, über deren Resultate ich schon früher (Ber. d. Ges. October

1871, pg. 386) eine kurze Mittheilung mir erlaubt hatte, findet sich in der *gegenwärtigen* Abhandlung.

Aus meinen Untersuchungen geht hervor, dass diese beiden Vorstellungskreise, wenigstens bei den vorläufig gemachten näheren Determinationen, nicht mit einander in Einklang stehen. Denn Uebereinstimmung findet, was die Consequenzen jener Vorstellungen betrifft, allerdings statt mit Bezug auf das ponderomotorische, nicht aber mit Bezug auf das elektromotorische Elementargesetz. Es geht daraus hervor, dass der eine oder andere Vorstellungskreis, vielleicht auch beide irgend welcher Abänderungen bedürfen. *Mit wirklicher Ueberzeugung kann ich für keinen der beiden Vorstellungskreise eintreten. Ich glaube aber, dass jeder derselben Keime der Wahrheit enthält; und desshalb habe ich den einen wie den andern mit Sorgfalt studirt.*

Sehr mit Unrecht hat man mir den Vorwurf gemacht, meine Ansicht gewechselt, bald den einen, bald den andern Vorstellungskreis vertheidigt zu haben; — ich habe nicht die *Vertheidigung*, sondern die *Untersuchung* jener Vorstellungen im Auge gehabt; auch würde eine eingehende Beschäftigung mit der Elektrodynamik mir wohl schwerlich der Mühe werth erschienen sein, wenn ich nicht von jeher die Ueberzeugung gehabt hätte, dass die gegenwärtigen (seit einem Vierteljahrhundert stationär gebliebenen) Vorstellungen früher oder später durch *einfachere* und *bessere* Vorstellungen ersetzt werden müssten, und den lebhaften Wunsch gehabt hätte, durch meine Untersuchungen zur Auffindung dieser letztern beizutragen.

---

# Inhalt.

Dritter Abschnitt.

## Das Weber'sche Gesetz unter Zugrundelegung einer gewissen unitarischen Anschauungsweise.



Vierter Abschnitt.

## Ueber diejenigen Untersuchungen und Bemerkungen von Helmholtz, welche mit dem Inhalt gegenwärtiger Abhandlung zusammenhängen.



Fünfter Abschnitt.



---

**Verbesserungen.**

I. Auf Seite 84 in der Note lese man (49. a, b) statt (47. a, b).

II. Auf Seite 113 in der Formel (21.) lese man $\frac{d^2\psi}{dt^2}$ an Stelle von $\frac{d^2\psi}{dr^2}$.

III. Auf Seite 169 ist die Ausdrucksweise nicht präcise genug. Unter *elektrischen Bewegungen* sind daselbst zu verstehen: *Aenderungen des elektrischen Zustandes.*

---

# ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN.

## EILFTE ABHANDLUNG.

## ÜBER DIE THERMOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES KALKSPATHES, DES BERYLLES, DES IDOCRASES UND DES APOPHYLLITES.

VON

**W. G. HANKEL**

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

---

Des XI. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° III.

MIT DREI TAFELN.

---

**LEIPZIG**

BEI S. HIRZEL.

1875.

Vom Verfasser übergeben den 17. Decbr. 1874.
Der Abdruck vollendet den 10. März 1875.

# ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

**W. G. HANKEL.**

## EILFTE ABHANDLUNG.

## ÜBER DIE THERMOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES KALKSPATHES, DES BERYLLES, DES IDOCRASES UND DES APOPHYLLITES.

In meinen Untersuchungen über das thermoelektrische Verhalten der Krystalle des Topases*), des Schwerspathes**) und des Aragonites***) habe ich nachgewiesen, dass die gleichgestalteten Enden einer Axe dieselbe Polarität besitzen, und dass der Gegensatz zwischen positiver und negativer Elektricität nur in der Vertheilung an krystallographisch verschiedene Axen zur Erscheinung kommt.

Zufolge dieser Thatsache musste erwartet werden, dass, wenn es gelänge, an symmetrisch (d. h. nicht hemimorph) gebildeten Krystallen des hexagonalen und des tetragonalen Systemes, also an sogenannten optisch einaxigen Krystallen, thermoelektrische Erregungen überhaupt wahrzunehmen, die beiden entgegengesetzten Elektricitäten auf ihren Oberflächen so vertheilt sein würden, dass die eine Elektricität an den beiden Enden der Hauptaxe, die andere aber an den Enden der Nebenaxen oder vielmehr ringsum im basischen Querschnitte und auf den prismatischen Seitenflächen hervortritt.

In der That haben die Beobachtungen dieser Voraussicht entsprochen, und zwar mit der Erweiterung, dass je nach der besonderen Art des Wachsthumes und der Gestaltung bei der einen Form die positive Elektricität an den Enden der Hauptaxe und die negative auf den prismatischen Seitenflächen, und bei der anderen gerade umgekehrt die negative an den Enden der Hauptaxe und die positive auf dem Umfange des basischen Querschnittes oder auf den prismatischen Seitenflächen erscheint.

In der vorliegenden Abhandlung habe ich die Untersuchungen über den Kalkspath, Beryll, Idocras (Vesuvian) und Apophyllit zusammengestellt; die Krystalle der beiden ersten Mineralien gehören dem hexagonalen, die der beiden letzten dem tetragonalen Systeme an.

---

*) Diese Abhandl. Bd. XIV. S. 357 ff.

**) Ebend. Bd. XV. S. 271 ff.

***) Ebend. Bd. XV. S. 343 ff.

Auf den beigefügten Tafeln sind die Krystalle entweder in ihren Netzen oder in bestimmten Projectionen abgebildet, wie solches am betreffenden Orte meistens ausdrücklich angegeben, aber auch aus den beigefügten krystallographischen Bezeichnungen der Flächen leicht zu entnehmen ist. Alle von Krystallflächen gebildeten Kanten sind durch ausgezogene Linien, dagegen alle mittelst Bruch oder Durchgänge entstandenen durch punktirte Linien bezeichnet. Die Durchgänge sind durch Einschliessen des krystallographischen Zeichens der mit ihnen parallelen Flächen in eine Klammer kenntlich gemacht. So bedeutet also [R] die Durchgänge beim Kalkspath parallel den Flächen des Grundrhomboeders, und [0P] beim Apophyllit den Durchgang senkrecht gegen die Hauptaxe. Sämmtliche Abbildungen stellen die Krystalle in natürlicher Grösse dar.

In diese Zeichnungen sind die auf den betreffenden Flächen gemachten Beobachtungen, wenn es der Platz gestattete, auch mit Angabe der Grösse der elektrischen Spannungen eingetragen, und behufs leichterer Uebersicht die positiven Zonen mit einer röthlichen und die negativen Zonen mit einer grünlichen Farbe überzogen worden. Um die Darlegung des elektrischen Verhaltens abzukürzen, beziehen sich alle Angaben sowohl im Texte als auch auf den Tafeln nur auf die elektrischen Vorgänge während der Abkühlung. Bei steigender Temperatur ist stets die Polarität gerade die entgegengesetzte.

Bevor ich zu der Untersuchung der einzelnen Mineralien übergehe, ist es meine Pflicht noch denjenigen Herren, welche mir durch gütige Darleihung geeigneter Krystalle die Durchführung derselben in der nachfolgenden Weise ermöglichten, meinen herzlichsten Dank darzubringen. Ich habe denselben auszusprechen meinem Collegen Herrn Prof. Dr. Zirkel, Herrn Prof. Dr. Quenstedt in Tübingen, Herrn Prof. Dr. Karsten in Kiel, Herrn Prof. Weissbach und Herrn Prof. Dr. Winkler in Freiberg, Herrn Schichtmeister Graff auf der Grube Wolfgang-Maassen und Herrn Bergverwalter Tröger in Neustädtel bei Schneeberg, Herrn Chemiker Sachsse in Leipzig, sowie Herrn Minister Sella in Rom und Herrn Spezia in Turin.

---

# I. Kalkspath.

In dem Verzeichnisse der thermoelektrischen Krystalle, welches Brewster*) 1824 mitgetheilt hat, ist auch der Kalkspath aufgeführt, jedoch ohne dass erwähnt wird, welchem Orte die elektrisch befundenen Krystalle entstammten, oder welche Gestalt dieselben besassen, noch auch, welche Art von elektrischer Vertheilung auf ihnen hervortrat. Wird nun auch gerade der Kalkspath durch Reibung und Druck sehr leicht elektrisch, und erscheint eine Verwechselung der auf diesem Wege entstandenen Elektricität mit der durch Temperaturveränderung hervorgerufenen um so leichter möglich, wenn nicht die Vertheilung der beiden Polaritäten über den ganzen Krystall bestimmt oder wenigstens an demselben Punkte die während der steigenden und sinkenden Temperatur auftretenden entgegengesetzten Elektricitäten beobachtet worden sind: so halte ich es doch für sehr wahrscheinlich, dass Brewster auf dem genannten Minerale wirklich die thermoelektrische Erregung beobachtet hat, und nicht durch Reibungselektricität getäuscht worden ist.

Wenn spätere Physiker die thermoelektrische Erregung des Kalkspathes nicht wahrnahmen, so hat dies sicherlich in dem Umstande seinen Grund, dass sie vorzugsweise die schönen Bildungen des isländischen Spathes für derartige Untersuchungen am geeignetsten halten mochten. Indessen zeigen gerade diese völlig klaren Massen nur äusserst geringe Spuren von Elektricität. Brewster hat jedenfalls, schon um eine mehr nach der Länge gestreckte Form verwenden zu können, entweder Krystalle von Matlock in Derbyshire oder von Alston Moor in Cumberland zu seinen Versuchen verwendet; dies

*) *The Edinb. Journal of Science*, conducted by David Brewster, Heft 2; übersetzt im *Jahrbuch der Chemie und Physik* von Schweigger, 1825. Bd. 43. S. 94.

sind aber Krystalle, welche, wie die nachstehenden Untersuchungen zeigen, in der That durch Temperaturveränderungen merklich elektrisch werden.

Ich habe mehr als hundert Kalkspathkrystalle der verschiedensten Fundorte untersucht, und werde von den an ihnen gemachten Beobachtungen soviel mittheilen, als zu einer klaren Einsicht in die thermoelektrischen Vorgänge auf diesem Minerale erforderlich erscheint.

## I. Krystalle von Schneeberg.

Die aus den Schneeberger Gruben stammenden und von mir auf ihr elektrisches Verhalten untersuchten Krystalle zerfallen nach ihrer äusseren Form in mehrere Gruppen.

### A. Krystalle, welche von den Flächen des Prismas $\infty$R und des Rhomboeders $-\frac{1}{2}$R begrenzt werden.

#### *a. Graulich gefärbte Krystalle mit glatten Rhomboeder-, aber stark gefurchten Prismenflächen.*

Die Krystalle dieser Gruppe sind aus einer Anzahl von Individuen (niedrige Prismen $\infty$R mit den Flächen $-\frac{1}{2}$R), die sich in der Richtung der Hauptaxe aufeinander gelegt haben, zusammengesetzt. Je nach dem Grade der Verwachsung der Individuen zeigen sich die Prismenflächen mit mehr oder weniger tiefen Querfurchen und Lücken*) bedeckt. Die Flächen des Rhomboeders $-\frac{1}{2}$R dagegen sind glatt. Die Masse der Krystalle ist im Allgemeinen graulich gefärbt.

Ausser den bisher genannten Flächen beobachtet man an der Polecke des Rhomboeders $-\frac{1}{2}$R eine kleine matte Fläche, die man für die gerade Endfläche 0R halten könnte, die jedoch aus den drei Flächen eines ausserordentlich stumpfen Rhomboeders in der Lage von $-\frac{1}{2}$R besteht.

*) In den Abbildungen sind dieselben nicht angegeben, weil sie für die Eintragung der Zahlen störend gewesen sein würden.

Die mir vorliegenden Krystalle sind sämmtlich nur an dem einen Ende der Hauptaxe vollkommen ausgebildet und zeigen an diesem Ende eine eigenthümliche Erscheinung. Von der Polecke des Rhomboeders ziehen sich nämlich in der Richtung der kurzen geneigten Diagonale seiner Flächen drei dunkle aus feinen Eisenkiespartikelchen gebildete Strahlen abwärts.*) Dagegen erscheint bisweilen an den Polkanten des Rhomboeders $-\frac{1}{2}R$ die Masse des Krystalles weisslich und weniger durchsichtig, sodass dann drei weissliche und drei dunkle Strahlen mit einander abwechseln. Jedoch reichen bei dieser Bildung weder die dunkeln noch die weisslichen Streifen bis zum äussersten Umfange, sondern endigen in einem Abstande von ungefähr $2^{mm}$ von demselben, sodass der sechsstrahlige Stern von einer sechsseitigen graulich gefärbten Hülle umgeben wird.

Die Krystalle dieser Gruppe zeigen im Allgemeinen eine starke elektrische Spannung; es dürfte diese Intensität eine Folge ihrer Zusammensetzung und vielleicht auch ihrer Färbung sein, indem diese beiden Umstände bei anderen Krystallen in ähnlicher Weise zu wirken scheinen. Während z. B. die wasserhellen sibirischen und uralischen Topaskrystalle nur sehr schwache elektrische Spannungen zeigen, gewinnt auf den bräunlich gefärbten brasilianischen Krystallen von einer Art faserigem Gefüge die elektrische Erregung eine sehr beträchtliche Grösse.**)

Was nun die elektrische Vertheilung auf dieser ersten Gruppe von Krystallen betrifft, so sind die Rhomboederflächen $-\frac{1}{2}R$ am ausgebildeten Ende, sowie die Durchgänge [R] am unteren abgebrochenen Ende beim Erkalten positiv elektrisch, und zwar übertrifft die Elektricität auf den Durchgangsflächen am unteren Ende an Intensität gewöhnlich sehr beträchtlich die auf den Rhomboederflächen des oberen Endes hervortretende. Im Gegensatze dazu zeigen sich die Seitenflächen negativ, und es scheint, als ob die Intensität der negativen Elektricität auf diesen Flächen nach unten, d. h. nach dem verbrochenen Ende hin, abnimmt. Jedenfalls hängt diese Abnahme, wenn sie in Wirklichkeit vorhanden ist, mit dem zuvor er-

*) Zirkel, *Die mikroskopische Beschaffenheit der Mineralien und Gesteine.* S. 220.

**) Vergl. die Untersuchungen über den Topas, Bd. XIV dieser Abhandlungen, S. 426.

wähnten Umstande zusammen, dass die positive Elektricität auf den Durchgangsflächen des unteren Endes beträchtlich stärker ist, als auf den Rhomboederflächen am oberen Ende.*)

Wird ein ringsum ausgebildeter Krystall dieser Gruppe parallel einer Fläche des Grundrhomboeders R zersprengt, so zeigt jede der beiden entstandenen Durchgangsflächen in Bezug auf das ihr zugehörige Axenende ein analoges Verhalten.

Stellen wir beide Stücke mit den Rhomboederflächen $-\frac{1}{2}R$ nach oben, so nimmt auf beiden jetzt am unteren Ende befindlichen Durchgangsflächen die positive Spannung in der Richtung von unten nach oben hin ab, und geht, je nach der Lage der betreffenden Durchgangsfläche in Bezug auf den ganzen Krystall, in den oberen Theilen selbst in die negative über. Bringen wir die beiden Stücke wieder in die Stellung gegeneinander, welche sie im unverletzten Krystalle inne hatten, so nimmt also auf der unteren Durchgangsfläche am oberen Stücke die positive Elektricität nach oben hin, und auf der

---

*) Ich muss hier noch eines eigenthümlichen Vorganges gedenken, den ich leider später nicht habe wieder hervorrufen können.

Als die im Folgenden unter No. 6, 7 und 8 aufgeführten (und ebenso noch zwei andere in dieser Abhandlung nicht abgebildete) Krystalle das erste Mal erhitzt wurden, geschah es, um die Polarität ihres oberen ausgebildeten Endes, also der Polecke und der Flächen des Rhomboeder $-\frac{1}{2}R$ zu ermitteln; die Temperatur hatte ungefähr 120° erreicht gehabt. Während ich nun beim Erkalten auf dem oberen ausgebildeten Ende mehrerer früher untersuchten Kalkspathkrystalle positive Elektricität beobachtet hatte, fand ich zu meinem Erstaunen bei den zuvor genannten Krystallen auf der Polecke und den Rhomboederflächen schwache negative Spannung, die am Rande der Flächen stärker war und nach der Polecke hin abnahm. Hieraus war ersichtlich, dass auf diesen Flächen die normale positive durch die negative von den Seitenflächen her verdrängt worden war. Die Krystalle wurden dann wiederholt erhitzt, um die Polarität auf dem unteren verbrochenen Ende und auf den einzelnen Seitenflächen zu bestimmen.

Als ich nun diese Krystalle zum zweiten Male auf gleiche Weise untersuchte, war merkwürdigerweise die schwache negative Spannung auf der Polecke und den Rhomboederflächen verschwunden, und an ihre Stelle eine, wie die in die betreffenden Abbildungen eingetragenen Zahlen darthun, nicht unbeträchtliche positive Polarität getreten. Dabei hatte zufällig die Temperatur mehrere Male die Höhe von 150° C. erreicht gehabt. Es ist mir, wie schon angedeutet, nicht gelungen, durch erneutes schwächeres Erhitzen oder längeres Einlegen in Wasser vor dem Versuche die negative Spannung auf dem ausgebildeten Ende dieser Krystalle wieder zu erhalten; auch nur bis 120° erhitzt gaben sie daselbst dieselbe positive Spannung, welche nach dem Erhitzen bis 150° beobachtet worden war.

oberen Durchgangsfläche am unteren Stücke in der Richtung nach unten hin ab, und geht zuletzt auf einer oder auf beiden auch wohl in die negative über. Man könnte, um dies Verhalten anschaulicher darzustellen, sagen, die Summe der beiden auf je zwei einander gegenüberliegenden Punkten dieser Durchgangsflächen befindlichen elektrischen Spannungen (mit Rücksicht auf ihr Vorzeichen) sei angenähert eine constante Grösse.

Die Kalkspathkrystalle erfordern zur Hervorrufung der thermoelektrischen Spannungen auf ihrer Oberfläche keine hohen Temperaturen; es scheint sogar bereits bei Temperaturen, welche noch nicht 130° C. erreichen, alle Elektricität wieder zu verschwinden.*)

Dieses Verschwinden der elektrischen Spannungen bei Temperaturen, welche kaum den gewöhnlichen Siedepunkt des Wassers überschreiten, kann nur in einem im Innern eintretenden eigenthümlichen Vorgange, der noch weitere genaue Untersuchung erfordert, begründet sein. Durch specielle Versuche habe ich mich nämlich überzeugt, dass der Kalkspath bei Temperaturen von 150° und darüber noch isolirt, wenn die Spitze des mit dem Goldblättchen des Elektrometers verbundenen Platindrahtes auf eine Fläche des Krystalles gesetzt, und dem Platindrahte nebst dem Goldblättchen Elektricität mitgetheilt wird, während unter gleichen Umständen z. B. durchsichtige Krystalle von Epidot, selbst wenn sie bis 50° oder noch höher erwärmt sind, das Elektrometer entladen.

Man könnte die Vermuthung hegen, dass vielleicht jenes Verschwinden der elektrischen Spannungen bei den zuvor angegebenen Temperaturen durch den Umstand bedingt werde, dass bei den Kalkspathkrystallen analog wie auf den Boraciten und Titaniten bei höheren Temperaturen eine Umkehrung der elektrischen Polarität eintritt, dass also jenes Verschwinden infolge eines allmähligen Ueberganges der einen Elektricität in die entgegengesetzte erzeugt werde; es ist mir indess nicht gelungen bei höheren Temperaturen selbst bis über 200° C. die umgekehrten Polaritäten auf den Flächen des Kalkspaths aufzufinden.

---

*) Sollte denn die Thatsache, dass bei allen Krystallen die elektrischen Erregungen bereits bei wenig hohen Temperaturgraden verschwinden, nicht endlich vermögen, den von Brewster eingeführten, aber aus dem oben angeführten Grunde ganz ungeeigneten Namen Pyroelektricität zu beseitigen!

Krystall No. 1. Taf. I, Fig. 1.

Der Krystall No. 1 wird an seinem oberen Ende von den Flächen des Rhomboeders $-\frac{1}{2}$R, an seinem unteren aber von den drei Durchgängen [R] begrenzt. Die Seitenflächen $\infty$R sind ziemlich eben. Während Fig. 1 a, Taf. I die Seitenflächen $\infty$R in ihrem Netze darstellt, erscheinen oberhalb und unterhalb des Netzes die Flächen der beiden Enden in ihrer verticalen Projection (Fig. 1 *b* und *c*).

Krystall No. 2. Taf. I, Fig. 2.

Auch bei diesem Krystalle sind die Seitenflächen im Netze, die Endflächen dagegen in ihren verticalen Projectionen abgebildet. Am unteren Ende ist der Krystall No. 2 vorzugsweise von dem unten auf die Prismenfläche 3 aufgesetzten Durchgange begrenzt; auf dieser Durchgangsfläche [R] nimmt die positive Elektricität in der Richtung nach oben, d. h. auf den nach der Fläche 3 und 4 hin gelegenen Theilen ab, und geht am obersten Rande zum Theil selbst in die negative über.

Krystall No. 3. Taf. I, Fig. 3.

Die Krystallgruppe No. 3 besteht, wie die Projection Taf. I, Fig. 3 *A* des oberen Endes zeigt, aus einem grösseren und zwei seitlich angewachsenen kleineren Krystallen. Fig. 3 *B* stellt eine seitliche Projection dreier Prismenflächen und Fig. 3 *C* die Projection des unteren theils von Bruchflächen, theils von Durchgängen begrenzten Endes dar. Identische Punkte in diesen Zeichnungen sind mit denselben Buchstaben *a*, *b*, *c*, *d* bezeichnet.

Krystall No. 4. Taf. I, Fig. 4.

Der Krystall No. 4 war beim Ablösen von seinem Muttergesteine nach einem Durchgange zersprungen. Taf. I, Fig. 4 zeigt die beiden etwas von einander getrennten Stücke in einer seitlichen Projection. In der Zeichnung ist nur die elektrische Vertheilung auf den beiden zuvor an einander gelegenen Durchgangsflächen angedeutet. Auf der Durchgangsfläche $\alpha\,\beta$ am oberen Stücke *A* findet sich positive Spannung, welche aber in der Richtung nach oben hin abnimmt und am obersten Rande selbst in eine schwache negative

übergeht. Umgekehrt verhält sich die Gegenfläche $\gamma\delta$, also die obere Durchgangsfläche am Stücke *B*; die positive Spannung ist in ihren oberen Theilen stärker, nimmt nach abwärts hin ab und geht zuletzt in die negative über. Bezieht man diese Fläche $\gamma\delta$ auf das untere Ende, so zeigt sie in Bezug auf dieses Ende gerade dieselbe elektrische Vertheilung, wie die Fläche $\alpha\beta$ in Bezug auf das obere Ende.

### Krystall No. 5. Taf. I, Fig. 5.

Fig. 5 stellt eine seitliche Projection des Krystalles No. 5 dar; die von punktirten Linien umgebene Fläche ist die Projection eines Durchganges [R].

Ebenso wie bei den vorhergehenden Krystallen No. 2 und No. 4 und den nächstfolgenden No. 6 und No. 7 ist auf den am weitesten nach unten gelegenen Theilen der Durchgangsfläche [R] die positive Spannung am grössten, und nimmt von da aus nach den weiter oben gelegenen Theilen ab.

### Krystall No. 6. Taf. I, Fig. 6.

Fig. 6 *A* stellt eine seitliche Projection dieses Krystalles und Fig. 6 *B* die Verticalprojection seines unteren Endes dar. An diesem sind sämmtliche drei Durchgänge sichtbar, jedoch der eine in grösserer Ausdehnung, als die beiden anderen, und auf dieser grösseren Durchgangsfläche tritt die Abnahme der positiven Spannung nach dem oberen Ende hin ebenfalls deutlich hervor.

### Krystall No. 7. Taf. I, Fig. 7.

Fig. 7 giebt eine seitliche Projection des Krystalles No. 7, der an seinem unteren Ende von einer grossen Durchgangsfläche [R] begrenzt wird. Da diese Durchgangsfläche sehr weit hinaufgeht, sodass von der in der Zeichnung vorderen Prismenfläche nur ein schmaler Streifen übrig bleibt, so tritt auf ihrem oberen Theile (wenigstens auf der linken Seite) bereits die negative Polarität hervor.

### Krystall No. 8. Taf. I, Fig. 8.

Der Krystall No. 8 zeigt auf seinen Seitenflächen infolge der mangelhaften Verwachsung der einzelnen Individuen sehr zahlreiche

Spalten und Furchen; an mehreren Stellen finden sich kleine Eisenkiesmassen eingewachsen. Am unteren Ende wird er theils von einer Durchgangsfläche, theils noch von kleinen Resten der Flächen $-\frac{1}{2}R$ begrenzt. Fig. 8 stellt das Netz seiner Seitenflächen nebst den Verticalprojectionen seiner beiden Enden dar.

### Krystall No. 9. Taf. I, Fig. 9.

Der Krystall No. 9 ist an seinem unteren Ende von drei ziemlich gleich grossen Durchgangsflächen begrenzt. Auf den Rhomboederflächen $-\frac{1}{2}R$ seines oberen Endes ist die positive Spannung nur in geringer Stärke auf der Polecke und den ihr nächstan liegenden Flächenstücken sichtbar, während nach dem Rande hin zum Theil schon negative Polarität hervortritt. Dagegen wurden auf den Durchgangsflächen am unteren Ende starke positive Spannungen beobachtet.

## *b. Graugefärbte Krystalle mit glatten Prismen-, aber stark gestreiften Rhomboederflächen.*

### Krystall No. 10. Taf. I, Fig. 10.

Von dieser Gruppe liegt mir nur ein einziger Krystall vor. Während seine Seitenflächen glatt sind, erscheinen die Flächen des Rhomboeders $-\frac{1}{2}R$ an seinem oberen völlig ausgebildeten Ende stark gestreift, und zwar steht die Richtung der Streifen senkrecht auf den von den Rhomboeder- und Prismenflächen gebildeten Kanten. Auf der Polecke sitzt eine kleine Eisenkiesmasse.

Der Krystall hatte sich, um es kurz zu bezeichnen, gewissermassen auf einem Stiele gebildet; oder ein Krystall von geringerem Querschnitte $\alpha\beta$ ist in seinen oberen Theilen von einer 2 bis $3^{mm}$ dicken Hülle umgeben. Der zuvor genannte Stiel ist abgebrochen; auf der äusseren Hülle finden sich auch am unteren Ende Ansätze der Flächen des Rhomboeders $-\frac{1}{2}R$.

Das ausgebildete obere und das verbrochene untere Ende dieses Krystalles zeigen positive, und die Seitenflächen negative Elektricität, jedoch ist dieselbe nicht so stark, wie auf den meisten der im Vorstehenden behandelten Krystalle.

*c. Farblose Krystalle mit glatten Rhomboederflächen und glatten Seitenflächen (bei den einfachen), oder unterbrochenen Seitenflächen (bei den zusammengesetzten).*

α. Einfache Krystalle.

Unter der Loupe erscheinen die Flächen des Prismas $\infty R$, obwohl sehr glänzend, doch etwas schuppig, zeigen jedoch niemals querliegende Furchen oder Streifen, wie die Krystalle der ersten Gruppe (unter *a*). Die Flächen des Rhomboeders $-\frac{1}{2}R$ sind äusserst fein senkrecht gegen die von ihnen mit den Prismenflächen gebildeten Kanten gestreift. Die Masse dieser Krystalle ist ziemlich farblos und durchsichtig; nur die Flächen des Rhomboeders $-\frac{1}{2}R$ sind besonders gegen die Polkanten hin weisslich gefärbt, während ebenso wie in der ersten Gruppe schwarze Strahlen von Eisenkies sich in der Richtung der geneigten Diagonalen der Rhomboederflächen herabziehen und von dem namentlich in der Umgebung der Polkanten weisslichen Grunde unterscheiden. Auf der Polecke selbst scheint ein kleiner Eisenkieskrystall, der mit einer seiner Ecken hervorragt, zu liegen; indess ist dies Gebilde kein solider Eisenkieskrystall, sondern vielmehr die Ecke eines sehr kleinen spitzeren Rhomboeders in der Stellung des Grundrhomboeders, dessen Flächen dicht mit Eisenkiespartikelchen bedeckt sind, und von dessen Polkanten die schwarzen Strahlen auslaufen. Andeutungen einer Endfläche $0R$ oder eines sehr stumpfen Rhomboeders habe ich bei den mir vorliegenden Krystallen nicht wahrzunehmen vermocht.

Obschon den unter *a* beschriebenen Krystallen an Form im Allgemeinen gleich, ist die Bildungsweise der dieser Gruppe angehörigen Individuen doch eine etwas abweichende gewesen; dies ergiebt sich namentlich aus der Beschaffenheit der prismatischen Seitenflächen, welche in der ersten Gruppe durch die zahlreichen querliegenden Furchen auf ein Zusammenwachsen zahlreicher niedriger Prismen hinweisen, während bei den jetzt vorliegenden Krystallen keine Spur solcher Furchen sichtbar ist.

Infolge dieser verschiedenen Bildungsweise finden wir nun eine etwas andere Vertheilung der beiden Elektricitäten auf ihren Oberflächen. Das ausgebildete Ende, also die Rhomboederflächen $-\frac{1}{2}R$ sind nicht mehr positiv, sondern vielmehr negativ; die Bruch- oder

Durchgangsfläche am unteren Ende dagegen verbleibt positiv, und zwar ist die hier auftretende positive Elektricität ziemlich stark, und verbreitet sich bei längeren Krystallen auch etwas über die unteren Theile der Prismenflächen. Die mittleren und oberen Theile der zuletzt genannten Flächen sind negativ und zwar im Allgemeinen schwächer als die Rhomboederflächen $-\frac{1}{2}R$.

Krystall No. 11. Taf. I, Fig. 11.

Im unteren Theile dieses Krystalles haben sich mehrere kleinere an ihn angelegt. Das untere Ende ist unregelmässig verbrochen.

Krystall No. 12. Taf. I, Fig. 12.

Das untere Ende dieses Krystalles wird von den drei Durchgängen [R] begrenzt. Seine Prismenflächen zeigen entweder noch eine sehr schwache negative Spannung oder sind fast unelektrisch.

Krystall No. 13. Taf. I, Fig. 13.

Die kleine Fig. 13, Taf. I in einer seitlichen Projection abgebildete Druse besteht vorzugsweise aus zwei grossen in paralleler Stellung verwachsenen Krystallen, an welche sich in den unteren Theilen zahlreiche kleinere anlegen. Die untere sehr unregelmässige (in Fig. 13 etwas sichtbare) Bruchfläche ist positiv.

Krystall No. 14. Taf. I, Fig. 14.

Der Krystall No. 14 wird am unteren Ende von einem sehr ebenen Durchgange [R] begrenzt; Fig. 14 stellt eine seitliche Projection des Krystalles dar. Ebenso wie bei den Krystallen der ersten Gruppe nimmt auf dieser Durchgangsfläche [R] die positive Spannung in der Richtung von unten nach oben hin ab.

Krystall No. 15. Taf. I, Fig. 15.

Fig. 15 $\alpha$ ist eine Seitenansicht des ursprünglichen Krystalles, welcher später in der Richtung $abd$ zersprengt wurde. Fig. 15 $\beta$ bildet die untere Durchgangsfläche am oberen Stücke $A$, und Fig. 15 $\gamma$ die an dieser angelegen habende obere Durchgangsfläche am unteren Stücke $B$ ab. Durch die gleichen Buchstaben $a$ $b$ ... werden in allen drei Figuren identische Punkte bezeichnet.

Die untere Durchgangsfläche Fig. 15 β am oberen Stücke ist positiv mit abnehmender Stärke nach den oberen Theilen *ab* hin; in gleicher Weise verhält sich die nicht gezeichnete Durchgangsfläche an dem unteren Stücke *B*. Dagegen erscheint die obere Durchgangsfläche dieses letzteren Stückes Fig. 15γ negativ, und zwar mit schwacher Zunahme nach oben hin; sie zeigt also ein entgegengesetztes Verhalten wie die entsprechende Fläche am Krystall No. 4. Auf den oberen Theilen der prismatischen Seitenflächen findet sich negative Elektricität, auf den untersten Theilen tritt aber schon positive Elektricität hervor.

### β. Zusammengesetzte Krystalle.

Die Krystalle dieser Gruppe bestehen aus einem Aggregate zahlreicher in paralleler Stellung verwachsener Individuen. Am unteren aufgewachsen gewesenen Ende sind diese Individuen kleiner, und werden nach dem oberen freien Ende hin grösser. Ihre Masse ist nicht so rein wie die der zunächst vorhergehenden, und kann höchstens durchscheinend genannt werden.

In Betreff der Vertheilung der Elektricität gleichen diese Krystalle den einfachen zuvor behandelten, unterscheiden sich aber von ihnen durch eine sehr erheblich grössere Intensität der elektrischen Spannungen.

Krystalle No. 16, 17, 18 und 19. Taf. I, Fig. 16, 17, 18 und 19.

Die Figuren 16, 17, 18 und 19 stellen eine Seitenansicht der vier Krystalle sowie die Projection des unteren, bei allen sehr unregelmässig verbrochenen Endes dar.

## B. Krystalle, welche von den Flächen des Prismas ∞R und den Flächen eines ausserordentlich stumpfen Rhomboeders begrenzt werden.

Die Krystalle dieser Gruppe besitzen meistens eine grössere Ausdehnung nach der Breite als nach der Höhe. Seitlich werden sie von den Flächen ∞R begrenzt, und tragen an den Enden der Hauptaxe die Flächen eines so ausserordentlich stumpfen Rhomboeders (in der Stellung von $-\frac{1}{2}$R), dass man beim ersten Anblick die Fläche 0R vor sich zu haben glaubt. Gewöhnlich sind die Krystalle mit

dem einen Ende verwachsen und das eben beschriebene, sehr stumpfe Rhomboeder findet sich dann nur auf dem freien Ende der Hauptaxe. Doch kommen auch öfter Krystalle vor, welche diese Flächen an beiden Enden der Hauptaxe tragen, und entweder seitlich oder nur mit einer kleinen Stelle des einen Endes angewachsen sind. Die Höhe oder Dicke dieser letzteren Krystalle ist aber nur gering und nimmt sehr oft so weit ab, dass von den Prismenflächen kaum noch kleine Reste zu erkennen sind, und die papierdünnen nach der Mitte hin sich etwas verdickenden Krystalle fast nur von den Flächen des oben beschriebenen flachen Rhomboeders begrenzt werden.

Auf den Randkanten zwischen der scheinbaren Endfläche und den Prismenflächen treten noch die schmalen Flächen zweier Rhomboeder auf, nämlich die Flächen des Rhomboeder $-\frac{1}{2}R$, welche glänzend sind und eine gegen die Randkanten senkrechte feine Streifung zeigen, und sodann die Flächen eines stumpfen Rhomboeders in der Stellung von R, welche aber ein so mattes Aussehen haben, dass ihre genaue Bestimmung nicht möglich ist.

Die Flächen des Prismas $\infty R$ sind zwar stark glänzend, aber nicht vollkommen eben; die Flächen des äusserst stumpfen Rhomboeders (die scheinbare Endfläche) dagegen sind matt und blätterig, wobei die Ränder der Blätter mit den Kanten von $-\frac{1}{2}R$ und $\infty R$ parallel laufen, und haben ein weissliches Aussehen; jedoch reicht dasselbe nicht ganz bis zum Rande, wo vielmehr ringsum eine 1 bis $2^{mm}$ breite, stark durchscheinende Schicht, welche der Hauptmasse des Krystalles gleicht, liegt. Uebrigens überzieht jene weissliche Schicht nicht nur die äussere scheinbare Endfläche, sondern dringt auch bis auf eine gewisse, jedoch meistens wenig beträchtliche Tiefe in den Krystall ein, der, wie bereits angedeutet, in seiner ganzen übrigen Masse stark durchscheinend ist.

Die mit den Flächen des Grundrhomboeders R parallelen Durchgänge scheinen bei diesen Krystallen etwas weniger entwickelt zu sein als bei den isländischen; dagegen tritt der Durchgang parallel mit 0 R wohl etwas deutlicher hervor als sonst.

Auf der Polecke des ausserordentlich stumpfen Rhomboeders (also ungefähr in der Mitte der Endfläche) sitzt ebenso wie bei den Krystallen einiger vorhergehenden Gruppen (S. 213) anscheinend ein kleiner Eisenkieskrystall, der mit einer dreikantigen Ecke aus der

Endfläche hervorragt, und in vollkommen bestimmter Weise gegen den Kalkspathkrystall gelagert ist. Beim Zerbrechen der kleinen hervorstehenden Ecke ergiebt sich aber, dass dieselbe keinem soliden Eisenkieskrystalle angehört, sondern nichts weiter ist, als die Ecke eines kleinen spitzeren Kalkspathrhomboeders (vergl. oben S. 213) in der Stellung des Grundrhomboeders, dessen Flächen mit kleinen Eisenkiespartikelchen bedeckt sind. Durch diese Bildung erklärt sich auch die feste Lage des scheinbaren Eisenkieskrystalles gegen den grossen Krystall.

Ausserdem sind die Flächen des ausserordentlich stumpfen Rhomboeders (die scheinbare Endfläche) ziemlich gleichförmig mit äusserst kleinen staubförmigen Eisenkieskrystallen bestreut, die sich also nicht wie bei den früher beschriebenen Krystallen (S. 213) in der Richtung der Kanten des Grundrhomboeders in stärkerer Weise anhäufen.

In elektrischer Beziehung ist die obere Endfläche und die Bruchfläche am unteren Ende positiv, und zwar letztere beträchtlich stärker als erstere, während auf der Prismenfläche negative Polarität, wenn auch oft nur in geringer Stärke beobachtet wird.

### Krystall No. 20. Taf. I, Fig. 20.

Das untere Ende dieses Krystalles wird von einem Durchgange begrenzt, welcher unten auf der (in der Zeichnung nicht sichtbaren, rechts neben 2 liegenden) Prismenfläche 3 aufsitzt und in mehreren Abstufungen sich wiederholt.

### Krystall No. 21. Taf. I, Fig. 21.

Das untere Ende dieses Krystalles ist von einem Durchgange begrenzt, welcher unten auf der in der Figur nicht gezeichneten (links neben 6 liegenden) Fläche 5 aufsitzt, und in mehreren Abstufungen verläuft.

### Krystall No. 22. Taf. I, Fig. 22.

Von der natürlichen seitlichen Begrenzung sind allein die zwei Prismenflächen 1 und 2 in einiger Ausdehnung vorhanden; von den Flächen 3 und 6 erscheinen nur kleine Ueberreste, und an die Stelle

der Flächen 4 und 5 ist ein unregelmässiger Bruch getreten. Das untere Ende wird von einem unten auf der Fläche 3 aufsitzenden Durchgange begrenzt.

Krystall No. 23. Taf. I, Fig. 23.

An diesem Krystalle sind nur die Prismenflächen 1, 6 und 5 sowie ein kleines Stück der Fläche 2 erhalten, während die Flächen 3 und 4 verbrochen sind. Auf der unteren Seite bildet der daselbst auf der Fläche 3 aufsitzende Durchgang die hauptsächlichste Begrenzung.

Krystalle No. 24 und 25. Taf. I, Fig. 24 und 25.

Die beiden Krystalle No. 24 und 25 hatten ursprünglich an einander gesessen; jedoch waren die Axen der beiden Krystalle nicht genau parallel. Der Krystall No. 24 wird unten vorzugsweise von dem daselbst auf der Fläche 5 aufsitzenden Durchgange begrenzt.

Auf der unteren Begrenzung der beiden Krystalle wächst die positive Elektricität nach der Seite hin, mit welcher sie an einander gesessen haben.

**C. Niedrige Prismen $\infty R$ mit der Endfläche 0R.**

Die Krystalle dieser Gruppe bilden niedrige Prismen $\infty R$ mit der geraden Endfläche 0R; und es erscheinen diese niedrigen Prismen wie Pfennige zu einer Säule dergestalt auf einander gelegt, dass ihre Hauptaxen parallel sind. Die Individuen einer solchen Säule lassen sich deutlich von einander unterscheiden, weil sie verschiedene Querdurchmesser besitzen und auch öfter etwas seitlich verschoben sind; jedes einzelne Individuum besteht aus einem weisslichen Kerne, der nur sehr wenig durchscheinend ist, und von einem graulichen, etwas durchsichtigen Mantel von ungefähr $1^{mm}$ Dicke umgeben wird. Diese grauliche Schicht scheint bei allen Krystallen des vorliegenden, der Freiberger Sammlung gehörigen Handstückes, mögen sie grösser oder kleiner sein, dieselbe Dicke zu besitzen.

Krystalle No. 26, 27 und 28. Taf. I, Fig. 26, 27 und 28.

Bei allen drei Krystallen, von denen jeder nur aus einem einzelnen der oben beschriebenen Individuen besteht, bildet auf der

oberen Seite die gerade Endfläche 0R die Begrenzung; auf der unteren aber, mit welcher die Krystalle aufgesessen haben, erscheinen neben Resten der Fläche 0R noch Bruchflächen.

Die Prismenflächen ∞R sind vorzugsweise negativ; die untere Seite erscheint entweder in ihrer ganzen Ausdehnung positiv, oder zeigt neben einer grösseren positiven Zone kleinere negative Stellen, während die obere Seite entweder überall negativ ist, oder gleichzeitig negative und positive Stellen enthält. Sehr wahrscheinlich ist der Grund für das Auftreten von negativer Elektricität auf den Flächen 0R in der sehr geringen Höhe der Prismenflächen zu suchen.

### D. Krystalle, deren Seitenflächen durch das sehr spitze Rhomboeder —16R, und deren Endflächen durch das Rhomboeder —½R gebildet werden.

Krystall No. 29. Taf. I, Fig. 29.

Der Krystall No. 29 von rauchgrauer Farbe gehört der Freiberger Sammlung; seine Form ist die von Hauy mit dem Namen *dilat* bezeichnete. Das untere Ende ist ziemlich eben abgebrochen und an seiner Oberfläche mit einer schwärzlichen Substanz imprägnirt. Eine zweite dünne schwärzliche, senkrecht gegen die Axe gerichtete Schicht findet sich ¼ vom unteren Ende und eine dritte eben solche in der Mitte des Krystalles.

Die elektrische Erregung ist nicht stark, aber dieselbe wie bei den Krystallen der ersten Gruppe unter A, a (S. 207).

### E. Krystalle, welche seitlich von einem spitzen Skalenoeder und Rhomboeder, und an den Enden von dem stumpfen Rhomboeder —½R begrenzt werden.

Die betreffenden Krystalle habe ich von einem älteren Handstücke abgebrochen, dessen Fundort als unbekannt bezeichnet war. Sie sind sämmtlich mit dem einen (unteren) Ende aufgewachsen gewesen, und werden am oberen Ende begrenzt von den Flächen des Rhomboeders —½R; an den Seiten liegen zunächst die Flächen eines spitzen Skalenoeders, dessen stumpfer Polkantenwinkel aber rundlich verläuft, sodass beide Flächen gewissermassen eine um die

geneigte Diagonale des entsprechenden Rhomboeders gekrümmte Fläche darstellen. Zwischen diesen Flächenpaaren des Skalenoeders liegen die Flächen eines spitzen Rhomboeders in der Stellung des Rhomboeders $-\frac{1}{2}R$. Die Ränder der Flächen dieses Rhomboeders zeigen schmale Säume, wie sie entstehen würden, wenn ein auf die Flächen des Skalenoeders geklebtes Papierblatt sich mit einem schmalen Streifen über die Kanten hinweg noch auf die Rhomboederflächen legte.

Im Innern der Krystalle erscheinen die drei Polkanten eines spitzen Rhomboeders in der Stellung des Grundrhomboeders in schwärzlichen Umrissen; die dunkle Farbe rührt von Eisenkiestheilchen her. Diese Polkanten steigen aufwärts bis zur Polecke des Rhomboeders $-\frac{1}{2}R$, und endigen daselbst in der oben bereits zwei Mal (S. 213 u. 217) beschriebenen dreikantigen Ecke, welche wie ein kleiner Eisenkieskrystall aus der Polecke hervorragt. Die Lage dieser Ecke gegen die Flächen des Rhomboeders $-\frac{1}{2}R$ ist dieselbe, wie oben bei der zweiten Gruppe (S. 213), sodass also das innere Rhomboeder, dessen Polkanten in die Kanten dieser Ecke auslaufen, wie bereits erwähnt, die Stellung des Grundrhomboeders besitzt.

Diese zuletzt angegebene Bildung weist wohl mit voller Bestimmtheit auf die Schneeberger Gruben als Fundort hin.

Krystalle No. 30 und 31. Taf. I, Fig. 30 und 31.

Beide Krystalle, No. 30 und 31, sind an dem unteren Ende unregelmässig verbrochen.

Die Flächen des Rhomboeders $-\frac{1}{2}R$ am oberen Ende und die Bruchfläche am unteren sind positiv elektrisch, letztere jedoch stärker als die ersteren. Die seitlichen Flächen des Skalenoeders und spitzen Rhomboeders zeigen dagegen negative Polarität.

## II. Krystalle aus Freiberg.

Die drei im Folgenden behandelten und auf der Tafel I abgebildeten Krystalle No. 32, 33 und 34 waren Combinationen des Rhomboeders $-\frac{1}{2}R$ mit sehr kleinen, oder doch nur wenig ausgedehnten Prismenflächen $\infty R$.

### Krystall No. 32. Taf. I, Fig. 32.

Der Fundort der Druse, von welcher ich den Krystall No. 32 abgelöst habe, ist nicht angegeben; dem Ansehen nach stammt sie aus den Freiberger Gruben. Der Krystall No. 32 trägt nicht blos auf seiner oberen Seite die Flächen des ersten stumpferen Rhomboeders, sondern auch auf der unteren zeigen sich noch Reste derselben; er war nämlich mit seiner unteren Polecke angewachsen gewesen, und beim Abbrechen daselbst eine von den drei Durchgängen begrenzte Vertiefung entstanden, um welche herum die Reste der drei Rhomboederflächen liegen. Die Rhomboederflächen am oberen Ende sind ziemlich eben, dagegen am unteren Ende stark treppenförmig gebildet. Die Prismenflächen sind nur kurz und dabei uneben; in Fig. 32 ist nur die Projection des oberen Endes abgebildet.

Sämmtliche Rhomboederflächen sowie die Durchgangsflächen am unteren Ende sind positiv, letztere in grösserer Stärke als erstere; die Prismenflächen zeigen negative Polarität, welche in Fig. 32 durch den an dem Umfange eingetragenen Farbensaum angedeutet ist.

### Krystall No. 33. Taf. I, Fig. 33.

Das dem hiesigen mineralogischen Museum gehörige Handstück, von welchem ich den Krystall No. 33 abgelöst habe, ist nach der Angabe eines beiliegenden Zettels 1811 aus der Freiberger Mineralienniederlage gekauft worden; sein Aussehen weist auf die Freiberger Gruben als Fundort hin.

Der Krystall No. 33 war seitlich mit der Fläche 5 angewachsen gewesen, und trägt an ihrer Stelle gegenwärtig eine Bruchfläche; dagegen finden sich an beiden Enden die Flächen des Rhomboeders $-\frac{1}{2}R$ ausgebildet.

Die elektrische Vertheilung gleicht der auf No. 32 beobachteten, jedoch ist die seitliche Bruchfläche 5 positiv.

### Krystall No. 34. Taf. I, Fig. 34.

Der Krystall No. 34 war mit Bestimmtheit als aus Freiberg stammend bezeichnet. Die Prismenflächen sind äusserst klein; es wird daher genügen nur die Projection des oberen Endes abzubilden. Die Rhomboederflächen, sowohl auf der oberen, als auch auf der

weniger vollkommen gebildeten unteren Seite, sind positiv, der Rand (die Prismenflächen) negativ; ich habe in der Zeichnung die letztere Polarität durch den farbigen Saum angedeutet.

### III. Krystalle unbekannten Fundortes.

Die nächstfolgenden beiden Krystalle No. 35 und 36 stammen von einem Handstücke, über dessen Fundort ich keine Vermuthung aufzustellen vermag.

Krystalle No. 35 und 36. Taf. I, Fig. 35 und 36.

Das obere Ende zeigt eine kleine rauhe Endfläche 0R; um diese liegen sehr kleine Rhomboederflächen, die wahrscheinlich dem Grundrhomboeder angehören, und an welche sich die Flächen eines spitzeren in gleicher Stellung befindlichen Rhomboeders anschliessen. Seitlich werden die Krystalle von den abwechselnd breiten und schmalen Flächen $\infty$R und kleinen Flächen $\infty$P2 begrenzt. Ausserdem finden sich noch schmale Abstumpfungen der von den Prismenflächen $\infty$R und den Flächen des spitzeren Rhomboeders gebildeten Kanten. Am unteren Ende sind die Krystalle verbrochen. Ihre Masse ist farblos und wasserhell.

Die obere Endfläche nebst den anliegenden Theilen der Prismenflächen, sowie die Bruchfläche am unteren Ende sind positiv, der übrige Theil der Prismenflächen negativ; nur an dem Krystall No. 35 zeigt eine (auf der in der Abbildung nicht gezeichneten Rückseite gelegene) Prismenfläche, welche durch Abbrechen eines kleinen daselbst angewachsenen Krystalles verletzt ist, positive Spannung.

### IV. Krystalle von Alston in Cumberland.

Die schönen farblosen, oft völlig durchsichtigen Krystalle von Alston in Cumberland stellen gewöhnlich eine Combination folgender Gestalten dar: $\infty$R, $\infty$P2, ein spitzes Skalenoeder —2R2 (dessen stumpfe Polkante also über der geneigten Diagonale des Rhomboeders —$\frac{1}{2}$R liegt), und die Endfläche 0R; zuweilen finden sich noch zwei Rhomboeder oberhalb der Flächen des Skalenoeders und ein Rhomboeder in der Stellung des Grundrhomboeders (vielleicht dieses selbst).

Die mir zur Verfügung stehenden Krystalle sind sämmtlich mit dem einen (unteren) Ende aufgewachsen gewesen; die Rhomboeder-

und Skalenoederflächen am ausgebildeten Ende verlaufen rundlich, oder erscheinen wie das Rhomboeder in der Stellung des Grundrhomboeders matt, sodass eine genaue Messung nicht ausgeführt werden konnte. Die Endfläche 0R sieht wie zerfressen oder hügelig aus, und wird durch mehr oder weniger zahlreiche in gleichem Niveau endigende Spitzen, zwischen denen der Raum nicht ganz ausgefüllt ist, gebildet.

Krystall No. 37. Taf. II, Fig. 37.

Der Krystall No. 37 gehört der Freiberger Sammlung; er ist vollkommen wasserhell, zeigt jedoch zahlreiche Sprünge nach den Blätterdurchgängen. Am unteren Ende ist er von einem auf der vorderen Prismenfläche 1 aufsitzenden Durchgange begrenzt; die Seitenflächen 1, 3 und 5 sind breit, dagegen 2, 4 und 6 schmal.

Die obere Hälfte des Krystalles sammt der Fläche 0R ist negativ; die untere sammt dem Durchgange positiv. Die grösste Intensität der negativen Elektricität liegt am oberen Rande der Prismenflächen; auf den schmalen Prismenflächen scheint die negative etwas weniger weit herabzugehen als auf den breiten. Die positive Elektricität besitzt ihre grösste Stärke auf dem unteren Durchgange, und nimmt auf dieser Fläche nach oben hin zu; der Durchgang zeigt also auf diesem Individuum in Bezug auf die Intensität seiner elektrischen Spannungen ein entgegengesetztes Verhalten, als die entsprechenden Durchgänge bei den Schneeberger Krystallen unter I, A, *a* (S. 208).

Krystall No. 38. Taf. II, Fig. 38.

Der Krystall No. 38 ist etwas weniger klar als der vorhergehende; unter seinen Prismenflächen sind die beiden gegenüberliegenden 1 und 4 breit, 2, 3, 5 und 6 aber schmal; die elektrische Vertheilung gleicht der zuvor angegebenen.*)

---

*) Bis zu Krystall No. 37 sind die Netze und Projectionen so gezeichnet, dass die Durchgänge [R] unten auf den Flächen 1, 3 und 5 aufsitzen. Von No. 38 an ist dagegen die Stellung so gewählt, dass der Ueberblick der Form am deutlichsten wird. So ist also z. B. in No. 38 der Krystall in einer gegen die früheren Abbildungen um 60° gedrehten Stellung gezeichnet, so dass jene Durchgänge hier unten auf die Flächen 2, 4 und 6 fallen. Es ergiebt sich stets sofort aus den Zeichnungen, welche Stellung für sie angenommen ist.

Der Krystall zersprang beim Erhitzen parallel mit dem unten auf der Fläche 6 aufsitzenden Durchgange; $\alpha\beta$ deutet die Richtung des Sprunges auf den Flächen 2, 1 und 6 an. Fig. 38 *b* stellt die untere Durchgangsfläche am oberen Stücke *A*, und Fig. 38 *c* die obere Durchgangsfläche am unteren Stücke *B*, und Fig. 38 *d* die Projection des von zwei Durchgangsflächen begrenzten unteren Endes eben dieses Stückes *B* dar. Die an den Seiten der Fig. 38 *b* und 38 *c* befindlichen Zahlen deuten die Seitenflächen an, deren Durchschnitt sie darstellen.

Die untere Durchgangsfläche am oberen Stücke zeigt positive Spannung; die Stärke derselben nimmt nach unten hin ab, jedoch weniger in der Nähe der Prismenfläche 1, als in der Nähe der Prismenfläche 4, so dass das Minimum in dem von den Flächen 4 und 5 gebildeten Winkel liegt, während das Maximum gegenüber ungefähr in dem von den Flächen 1 und 2 eingeschlossenen Winkel erscheint. Die obere Durchgangsfläche am unteren Stücke zeigt negative Elektricität und zwar nach unten hin an Stärke abnehmend. Das Maximum liegt oben in dem von den Flächen 2 und 3 gebildeten Winkel, während das Minimum unten am Rande der Fläche 6, oder in dem von den Flächen 5 und 6 gebildeten Winkel gefunden wird.

Betrachtet man die elektrische Vertheilung auf den Krystallen von Alston, und besonders auch das Verhalten der Fig. 38 *b* und *c* gezeichneten Durchgangsflächen ohne Beziehung zu den übrigen in dieser Abhandlung untersuchten Krystallen, so macht dieselbe den Eindruck, als ob man einen hemimorphen Krystall, wie den Turmalin vor sich habe. Indess kann beim Kalkspath von einem wahren Hemimorphismus, wie ihn der Turmalin, das Kieselzinkerz u. s. w. zeigen, nicht die Rede sein.*) Es sind dies Vorgänge, wie ich sie auch schon beim Topas beobachtet habe, und weiterhin beim Apo-

*) Wenn Naumann in seiner Mineralogie Kalkspathkrystalle aus dem Ahrnthal in Tyrol anführt, welche an dem einen Ende von Rhomboedern und Skalenoedern, am anderen aber nur von der basischen Endfläche begrenzt werden, so sind dies durch zufällige äussere Umstände veranlasste unsymmetrische Ausbildungen, wie solche auch nach der Hauptaxe beim Bergkrystall (Bd. XIII dieser Abh. S. 336), Topas (Bd. XIV, S. 372) und Beryll (s. später S. 233), und nach der Brachydiagonale beim Schwerspath (Bd. XV, S. 278) vorkommen; sie weisen durchaus nicht auf einen wahren Hemimorphismus hin.

phyllit und in einer folgenden Abhandlung beim Gyps wieder beschreiben werde.

Krystall No. 39. Taf. II, Fig. 39.

Der Krystall No. 39 ist in seiner Masse wieder klarer, in Betreff seiner elektrischen Vertheilung gleicht er den beiden vorhergehenden.

## V. Krystalle vom Andreasberg.

Krystall No. 40. Taf. II, Fig. 40.

Der sehr durchsichtige und klare Krystall No. 40 ist eine Combination von $\infty$R, einem spitzen Rhomboeder mit matten Flächen und einer matten weisslichen Endfläche 0R. Die unterhalb dieser Fläche 0R liegende undurchsichtige weissliche Schicht ist etwas dicker als $2^{mm}$ und geht unmittelbar in die klare durchsichtige Masse über. Am unteren Ende ist der Krystall unregelmässig verbrochen.

Die elektrische Erregung ist nur schwach; die Endfläche und die vordere grosse Fläche des spitzen Rhomboeders zeigen negative Spannung; die Prismenflächen sind in den oberen Theilen auch wohl noch sehr schwach negativ, in ihren unteren Theilen aber positiv.

Krystall No. 41. Taf. II, Fig. 41.

Der Krystall No. 41 stellt eine Combination von mehreren in einander übergehenden Skalenoedern (R3, R5, R7), einem spitzen Rhomboeder 4R und dem Prisma $\infty$P2 dar. Das untere Ende ist theils von einer senkrecht gegen die Hauptaxe angeschliffenen Fläche *acdef*, theils von einem Durchgange *abc* begrenzt. An der Kante *d* liegt eine schmale Fläche von $\infty$P2. Fig. 41 *A* und *B* stellen die vordere und hintere Ansicht in Projectionen dar, während Fig. 41 *C* die untere angeschliffene Endfläche nebst dem daselbst vorhandenen Durchgange [R] abbildet.

Die angeschliffene Fläche nebst dem Durchgange [R] am unteren Ende sind sehr stark positiv, die seitlichen Begrenzungsflächen dagegen negativ; jedoch erscheint auf der grössten Fläche des Rhomboeders 4R und etwas daneben (links nach oben und rechts nach unten) wieder positive Elektricität. Auf den meisten Skalenoederflächen ist die negative Elektricität oben stärker als unten, nur auf der linken Fläche der Projection *A* besitzt sie oben und unten eine grössere Intensität als in der Mitte.

## VI. Krystalle aus Derbyshire.

Die von mir untersuchten Krystalle sind in der Mehrzahl einfache; einige zeigen jedoch die gewöhnliche Zwillingsbildung. Sie sind meistens von dem Skalenoeder R3 begrenzt, zu welchem bisweilen noch das verticale Prisma $\infty$R, in einem Falle auch das Rhomboeder R, und in einem anderen sehr schmale Flächen des Rhomboeders —2R hinzutreten.

In elektrischer Beziehung zeigen die Kalkspäthe aus Derbyshire eine Vertheilung der beiden Polaritäten, welche der bei den unter I, A, *a* beschriebenen Schneeberger Krystallen beobachteten gerade entgegengesetzt ist. Während die eben genannten Krystalle an den Enden der Hauptaxe positive und auf den prismatischen Seitenflächen negative Polarität darbieten, erscheint gerade entgegengesetzt bei den Krystallen aus Derbyshire die negative Elektricität an den beiden Enden der Hauptaxe und nimmt gegen die Mitte des Krystalls hin ab. Sind die Flächen $\infty$R vorhanden, so tragen sie die positive Zone, die sich noch etwas über die benachbarten Theile der Skalenoederflächen ausbreitet. Fehlen diese Flächen, so tritt die positive Spannung auf den Randkanten und den anliegenden Streifen der Skalenoederflächen R3 auf; dabei hat es den Anschein, als ob die positive Zone nicht den schief auf- und niedersteigenden Skalenoederkanten folgt, sondern mehr eine horizontale (d. h. mit der Basis parallele) Lage besitzt, und also in ihrem Maximum die Skalenoederkanten kreuzt. Leider war das mir vorliegende und zu diesen Untersuchungen brauchbare Material an Krystallen so unvollkommen und zum Theil durch aufgewachsene kleine Krystalle in seiner Bildung so gestört, dass ich den eben in Betreff der horizontalen Lage der positiven Zonen ausgesprochenen Satz nicht streng nachzuweisen vermag.

Aber nicht blos in den elektrischen Vorgängen auf der Oberfläche der unverletzten Krystalle, sondern eben so sehr auch in dem Verhalten der Durchgangsflächen tritt der Gegensatz zwischen den Schneeberger und den Derbyshirer Kalkspäthen hervor.

Wird ein Derbyshirer Kalkspathskalenoeder parallel einem Durchgange zersprengt, und stellt man beide Stücke mit ihren Spitzen nach oben, so ändert sich auf den am unteren Ende befindlichen

Durchgangsflächen die Elektricität in der Weise, dass die positive Spannung von oben nach unten hin abnimmt und je nach der Lage dieser Flächen im ganzen Krystalle unten selbst ins Negative übergeht, oder dass wenn zufolge ihrer Lage die eine dieser Flächen überall negativ erscheint, auf ihr diese negative Spannung in der Richtung von oben nach unten hin zunimmt; die Aenderung erfolgt in der Richtung von oben nach unten also stets im Sinne vom Positiven zum Negativen, während sie bei den Schneeberger Krystallen in derselben Richtung im gerade umgekehrten Sinne (S. 208) beobachtet wurde. Bringt man beide Stücke wieder in die Stellung, welche sie im ganzen Krystalle einnahmen, so ändert sich also die elektrische Spannung in der Richtung von oben nach unten auf der unteren Durchgangsfläche am oberen Stücke im Sinne vom Positiven zum Negativen, und auf der oberen Durchgangsfläche am unteren Stücke im Sinne vom Negativen zum Positiven; sonach würde auch hier die Summe der auf gegenüberliegenden Punkten der beiden Flächen befindlichen elektrischen Spannungen (genommen mit Rücksicht auf ihr Vorzeichen) angenähert eine constante Grösse sein.

Diese Unterschiede zwischen den erwähnten Schneeberger und den Derbyshirer Krystallen sind nun, wie schon aus dem Vorhergehenden sich ergiebt, mit wesentlichen Verschiedenheiten in der äusseren Form verbunden. Vergleichen wir die unter I. A, *a* beschriebenen Schneeberger Kalkspäthe mit den vorliegenden Derbyshirern, so treten besonders drei Unterschiede hervor:

1. Bei den Schneeberger Krystallen (I. A, *a*) ist die Hauptaxe kürzer, bei denen aus Derbyshire verhältnissmässig länger;
2. Bei den ersteren bilden stumpfe Rhomboeder, bei den letzteren spitze Skalenoeder die Begrenzung an den Enden der Hauptaxe.
3. Bei den ersteren haben die Rhomboeder eine um 60° gegen das Grundrhomboeder gedrehte Stellung, während die an den Derbyshirer Krystallen auftretenden Skalenoeder in ihrer Stellung dem Grundrhomboeder entsprechen.

### Krystall No. 42. Taf. II, Fig. 42.

Der fast farblose, nur schwach gelbliche Krystall No. 42 gehört der Freiberger Sammlung. Fig. 42, Taf. II stellt zwei Projectionen

desselben dar. Er ist ein Zwillingskrystall von der Combination R 3, ∞R und —2R, dessen untere Hälfte sich in zwei Spitzen auflöst.

Krystall No. 43. Taf. II, Fig. 43.

Die dunkelrauchgrau gefärbten Krystalle No. 43 bis No. 47 sind von einem und demselben Handstücke abgebrochen worden, und werden allein von der Gestalt R 3 gebildet; soviel sichtbar ist, sind sie fast sämmtlich einfache Krystalle.

Einige Flächen des Krystalles No. 43 waren ziemlich vollkommen ausgebildet.

Krystall No. 44. Taf. II, Fig. 44.

Der Krystall No. 44 ist an den meisten Stellen sehr mangelhaft ausgebildet; namentlich stellen zahlreiche kleinere Individuen, welche aus seinen Flächen hervorgewachsen sind, der genauen Untersuchung grosse Hindernisse entgegen.

Krystall No. 45. Taf. II, Fig. 45.

Das untere Ende dieses Krystalles wird durch eine eigenthümlich matte gegen die Hauptaxe nahe senkrecht stehende Fläche begrenzt, welche durch Anliegen an andere Massen gebildet zu sein scheint. Auf der Rückseite findet sich eine starke Verletzung durch Bruch $\alpha\beta\gamma$. Diese Bruchfläche $\alpha\beta\gamma$ ist positiv; die matte Fläche am unteren Ende aber stark negativ, zeigt also bereits die Polarität des unteren Endes.

Krystall No. 46. Taf. II, Fig. 46.

Der Krystall No. 46 hatte sich nach oben in drei Spitzen (deren eine verbrochen) ausgebildet, nach unten hin war seine Bildung gehemmt worden. Da die eine Seitenkante des Skalenoeders gut ausgebildet ist, bilde ich ihn Fig. 46 in einer Projection ab.

Krystall No. 47. Taf. 2, Fig. 47.

Fig. 47 stellt eine seitliche Projection dieses Krystalles dar. Nach der Richtung $\alpha\beta\gamma$ ist er parallel mit einem Durchgange in die beiden Stücke *A* und *B* zersprengt worden. Fig. 47 *b* zeigt die untere Durchgangsfläche an dem oberen Stücke *A*; auf dieser Durchgangs-

fläche nimmt die positive Spannung nach oben hin zu. Fig. 47 *c* ist eine Abbildung der oberen Durchgangsfläche am Stücke *B*, welche an der Fig. 47 *b* gezeichneten Fläche angelegen hatte; die Fläche Fig. 47 *c* zeigt in ihren oberen Theilen negative Elektricität, welche weiter abwärts in die positive übergeht; es wächst also auf ihr die elektrische Spannung im negativen Sinne von unten nach oben. Die beiden Durchgangsflächen Fig. 47 *b* und *c* verhalten sich sonach analog, wie die entsprechenden Flächen an den Krystallen von Alston (No. 37 und 38), stehen also im Gegensatze zu der ersten Abtheilung der Schneeberger Krystalle (I, A, *a*).

### Krystall No. 48. Taf. II, Fig. 48.

Die bräunlichgelben Krystalle No. 48 bis No. 52 sind wieder sämmtlich einer von Matlock stammenden Druse entnommen; ein Theil derselben besteht aus Zwillingen.

Der Krystall No. 48 ist unten von zwei Durchgangsflächen begrenzt. Auf diesen Durchgängen erscheint positive Elektricität.

### Krystall No. 49. Taf. II, Fig. 49.

Der Krystall No. 49 wurde zunächst in der Form untersucht, wie sie Fig. 49 *a* darstellt, in welcher das untere Ende von drei Durchgangsflächen Fig. 49 *b* begrenzt war. Später wurde derselbe nach dem Durchgange $\alpha\varrho$ zersprengt. Fig. 49 *c* stellt die Durchgangsfläche am oberen Stücke *A*, und Fig. 49 *d* die an ihr angelegen habende Durchgangsfläche am unteren Stücke vor. Die erstere (Fig. 49 *c*) ist positiv, die letztere (Fig. 49 *b*) dagegen negativ. Auf beiden nimmt die Intensität der betreffenden Elektricität weniger gegen unten, als besonders nach der Seite *pq* hin ab.

### Krystall No. 50. Taf. II, Fig. 50.

Der Krystall ist ein Zwilling. Am unteren Ende wird er von Durchgängen begrenzt; die beiden Durchgänge $\beta$ und $\gamma$ gehören dem unteren, dagegen die kleine Durchgangsfläche $\alpha$ dem oberen Individuum an (Fig. 50 *b*). Die grösste Durchgangsfläche $\gamma$ ist links am oberen Rande positiv, und wird nach unten und rechts zu negativ.

Krystall No. 51. Taf. II, Fig. 51.

Auf der Durchgangsfläche am unteren Ende findet sich in den oberen Theilen positive Elektricität, die weiter abwärts sehr bald in die negative übergeht.

Krystall No. 52. Taf. II, Fig. 52.

Der kleine Krystall, dessen beide Enden ausgebildet sind, zersprang bei dem Versuche ihn abzulösen in die beiden Stücke *A* und *B*. Das Stück *A* blieb an dem Gestein,*) auf dem er aufgewachsen, sitzen. Fig. 52 *a* stellt eine Projection dar, in welcher $\alpha\beta$ die Richtung angiebt, nach welcher er in einem Durchgange zersprang. Fig. 52 *b* bildet die Durchgangsfläche am unteren Ende des oberen Stückes *A*, und Fig. 52 *c* die Durchgangsfläche auf der oberen Seite des unteren Stückes *B* ab. Auf der ersten findet sich in den oberen Theilen positive Elektricität, die weiter abwärts in die negative übergeht; auf der zweiten zeigt sich oben keine Elektricität, während weiter abwärts sich immer stärkere positive Elektricität entwickelt. Drehen wir dies untere Stück um, machen also den unteren Endpunkt seiner Hauptaxe zum oberen, so leuchtet ein, dass auf beiden Durchgangsflächen die elektrischen Spannungen sich in gleichem Sinne ändern.

---

*) Dasselbe ist in der Zeichnung fortgelassen.

## II. Beryll.

Bereits 1824 hat Brewster*) den gelben Beryll in seinem Verzeichnisse der thermoelektrischen Krystalle aufgeführt; er fügt aber dieser Aufzählung keine weiteren Bemerkungen über das specielle Verhalten dieses Minerales hinzu. Wenn später andere Physiker bei ihrer Prüfung der Brewster'schen Angabe ein negatives Resultat erhielten, so haben sie sich um so leichter dabei beruhigen zu können geglaubt, als eine hemimorphische Ausbildung, welche bis vor Kurzem als absolut nothwendige Bedingung für das Hervortreten der thermoelektrischen Erscheinungen angenommen wurde, an den Krystallen des Berylls nicht beobachtet worden war.

Als ich jedoch durch die Untersuchung der Topas-, Schwerspath- und Aragonitkrystalle**) die Ueberzeugung gewonnen hatte, dass der Hemimorphismus keinesweges als unerlässliche Bedingung für die thermoelektrische Erregung betrachtet werden kann, dass vielmehr schon eine solche Verschiedenheit der krystallographischen Axen, wie sie im rhombischen Systeme auftritt, zur Erzeugung elektrischer Differenzen genügt, so schien es mir nothwendig, dass auch eine Verschiedenheit, wie sie in den sogenannten einaxigen Systemen (dem tetragonalen und dem hexagonalen) zwischen der Hauptaxe und den Nebenaxen sich zeigt, hinreichend sein müsse, um nach diesen Richtungen entgegengesetzte elektrische Spannungen durch blosse Temperaturänderungen entstehen zu lassen. Und in der That gab gleich der erste Versuch an einem gelblichgrünen Beryll (dem später unter No. 8 aufgeführten) bei dem Erkalten desselben deutliche Zeichen von freier Elektricität.

---

*) *The Edinb. Journal of Science* conducted by David Brewster, Heft 2; übersetzt im Jahrbuch der Chemie und Physik von Schweigger 1825, Bd. 43, S. 94.

**) Diese Abhandlungen Bd. XIV, S. 357 ff.; Bd. XV, S. 271 ff. und S. 343 ff.

## I. Krystallisationsverhältnisse der Berylle.

### A. Krystallformen.

Die Krystalle des Berylls gehören dem hexagonalen Systeme an; der Winkel an den Polkanten der sechsseitigen Grundpyramide beträgt 151° 5′ 45″ und der Winkel an den Mittelkanten 59° 53′ 12″, woraus sich das Verhältniss der Hauptaxe zur Nebenaxe wie 1 : 0,49886 ergiebt.

Bisjetzt sind folgende Formen an den Krystallen des Berylls beobachtet worden:*)

1. Sechsseitige Pyramiden der ersten Art: P, $\frac{3}{2}$P, 2P und $\frac{15}{2}$P; ausserdem noch einige sehr stumpfe Pyramiden, deren Dimensionen sich aber nicht genau bestimmen liessen.
2. Sechsseitige Pyramiden zweiter Art: P2 und 2P2; ausserdem noch einige andere, deren Flächen wegen ihrer unebenen und drusigen Beschaffenheit eine genauere Messung nicht gestatteten.
3. Dihexagonale Pyramiden: 2P$\frac{3}{2}$, 3P$\frac{3}{2}$, 6P$\frac{3}{2}$, 8P$\frac{8}{7}$, 12P$\frac{12}{11}$ und 14P$\frac{14}{13}$.
4. Sechsseitiges Prisma erster Art: $\infty$P.
5. Sechsseitiges Prisma zweiter Art: $\infty$P2.
6. Dihexagonales Prisma: $\infty$P$\frac{3}{2}$.
7. Gerade Endfläche 0P.

### B. Hemimorphismus.

Bei der Beschreibung der Berylle von Mursinka hebt v. Kokscharow**) hervor, dass die Krystalle dieses Fundortes fast immer nur an dem einen Ende ausgebildet sind, dass aber doch auch Individuen vorkommen, welche an beiden Enden Zuspitzungsflächen tragen. In der Sammlung von P. A. Kotschubey fand er zwei solche Krystalle, welche auffallender Weise hemimorph ausgebildet waren. Er fügt hinzu: »Uebrigens scheint es, dass der Hemimorphismus nur an Krystallen von Mursinka vorkommt; denn an beiden Enden zugespitzte Krystalle aus den Bergketten vom Adun-Tschilon und Borscht-

---

*) v. Kokscharow, *Materialien zur Mineralogie Russlands.* I. Bd., S. 148.

**) Ebend. S. 157.

schowotschnoi, die ich zu untersuchen Gelegenheit hatte, sind vollkommen symmetrisch und nicht im Geringsten hemimorph.«

Die beiden oben erwähnten hemimorphen Krystalle *) beschreibt v. Kokscharow folgendermassen: »Der erste Krystall bildet ein hexagonales Prisma $\infty$P, dessen oberes Ende von Flächen der hexagonalen Hauptpyramide P und der hexagonalen Pyramide zweiter Art 2P2 zugespitzt ist und noch von der geraden Endfläche 0P begrenzt wird. An dem unteren Ende findet sich nur die gerade Endfläche 0P. Die Flächen des Prismas $\infty$P sind an diesem Krystalle ziemlich glänzend, doch finden sich auf denselben schmale verticale Vertiefungen. Die Fläche 0P ist vollkommen glänzend, während die Flächen P und 2P2 uneben und wie zerfressen sind.«

»Der zweite Krystall ist an dem oberen Ende von Flächen der hexagonalen Hauptpyramide P und der Pyramide zweiter Art 2P2 zugespitzt und durch eine ziemlich bedeutend entwickelte gerade Endfläche 0P begrenzt. An dem unteren Ende finden sich die gerade Endfläche 0P und nur drei abwechselnde Flächen der hexagonalen Pyramide zweiter Art 2P2 (d. h. die Flächen des Rhomboeders $\frac{2P2}{2}$). Sämmtliche Flächen dieses Krystalles sind ohne Ausnahme spiegelnd. Es ist beachtenswerth, dass die gerade Endfläche 0P des unteren Endes sehr unbedeutend, doch vollkommen regelmässig in vier Theile gebrochen erscheint. Die Brechung rührt ohne Zweifel von den drei Flächen einer sehr stumpfen hexagonalen Pyramide erster Art**) her, die sich an die gerade Endfläche 0P anlegen; die übrigen drei Flächen sind nicht entwickelt.«

An den zwei beschriebenen Krystallen sind allerdings die beiden Enden der Hauptaxe in verschiedener Weise ausgebildet; jedoch ist hieraus nicht sofort auf einen wahren Hemimorphismus, wie ihn Turmalin und Kieselzinkerz darbieten, zu schliessen. Die Verhältnisse sind vielmehr ähnliche, wie beim Topas, Schwerspath und Kalkspath, wo neben vollkommen symmetrischen Krystallen auch einzelne sich finden, an denen die beiden Enden einer Axe in ihrer Gestaltung

*) v. Kokscharow giebt ihre Abbildung in Fig. 32 und 33 der Tafel XVI.

**) Näherungsweise bestimmt v. Kokscharow diese sehr stumpfe Pyramide als $\frac{1}{14}$P, und setzt hinzu: »Solche sehr stumpfe hexagonale Pyramiden hatte ich Gelegenheit auch an Krystallen von anderen Localitäten zu beobachten.«

von einander abweichen.*) Die elektrischen Vorgänge an den zuletzt genannten Mineralien haben nun mit voller Sicherheit dargethan, dass die vorhandenen Verschiedenheiten in der Ausbildung nur zufälligen Umständen ihre Entstehung verdanken, und in gleicher Weise werden auch die im Folgenden mitzutheilenden Beobachtungen den Beweis liefern, dass die ungleiche Ausbildung der beiden Enden beim Beryll ebenfalls nicht in der Form des Moleculs begründet, sondern nur äusserlich durch Aenderungen der Temperatur, der Concentration der flüssigen Masse und der Contactverhältnisse hervorgerufen ist.

### C. Durchgänge.

Der Beryll ist ziemlich deutlich spaltbar parallel den Flächen 0P, dagegen nur sehr unvollkommen parallel den Flächen ∞P.

### D. Beschaffenheit der Flächen.

Die Flächen der Pyramiden zeigen öfter sehr beträchtliche Verschiedenheiten in ihrer Grösse, so dass das Ende der sechsseitigen Säule ein unsymmetrisches Ansehen erhält.

Auch finden sich bisweilen, selbst bei anscheinend sehr vollkommenen Krystallen kleine Abweichungen in den Neigungsverhältnissen der Flächen. So beobachtete v. Kokscharow,**) als er an einem Krystalle, dessen sämmtliche Flächen vollkommen spiegelten, die Winkel der Flächen P gegen die gerade Endfläche 0P mit grosser Genauigkeit mass, bei fünf Flächen P den Winkel gegen 0P sehr nahe gleich 150° 3′ 42″, während die sechste Fläche P mit 0P einen etwas grösseren Winkel von 150° 10′ 18″ bildete.

Die Fläche 0P ist gewöhnlich glatt und spiegelnd, bisweilen erscheint sie jedoch auch rauh oder mit zahlreichen Grübchen versehen. Wenn sie fehlt, so ist das Ende des Krystalles unregelmässig abgerundet. Die Flächen des Prismas ∞P sind meistens glatt und spiegelnd. Jedoch zeigen sie bei den russischen Beryllen mehr oder weniger eine verticale Streifung, die bei den vom Adun-Tschilon stammenden öfter so stark hervortritt, dass die einzelnen

*) S. diese Abhandlungen Bd. XIV, S. 370 und Bd. XV, S. 278.

**) v. Kokscharow, *Materialien zur Mineralogie Russlands*. 1. Bd., S. 187.

Flächen des Prismas $\infty P$ nicht mehr scharf von einander unterschieden werden können. Dagegen gewahrt man bei den Elbaer Krystallen unter der Loupe eine sehr feine mit den Combinationskanten von $\infty P$ und $2P2$ parallel gehende, sowie auch bisweilen eine horizontale Streifung.

Die Flächen der dihexagonalen Pyramiden sind gewöhnlich matt; und erscheinen sie glänzend, so sind sie oft so gekrümmt, dass eine genauere Bestimmung ihrer Lage nicht möglich ist. Die Flächen der hexagonalen Pyramiden zweiter Art sind häufig uneben und drusenartig oder matt.

## 2. Thermoelektrisches Verhalten der Beryllkrystalle.

Die elektrische Spannung, welche durch Temperaturänderungen auf der Oberfläche der Berylle hervorgerufen wird, ist im Allgemeinen wenig beträchtlich, ja sie wird bei manchen, gerade durch Klarheit und vollkommene Ausbildung ausgezeichneten Krystallen so schwach, dass man nur mit der grössten Aufmerksamkeit äusserst geringe Anzeichen derselben wahrzunehmen vermag. Uebrigens ist die Vertheilung der Elektricität, wie sie beim Erkalten erscheint, sehr einfach.

Bei den Smaragden sind die Endflächen positiv und die prismatischen Seitenflächen negativ. Bei den russischen Beryllen ist die Vertheilung im Allgemeinen dieselbe, nur tritt sehr gewöhnlich auf einer oder zwei Seitenflächen entweder in ihrer ganzen Ausdehnung oder auch nur auf einem mehr oder weniger grossen Theile derselben anstatt der negativen die positive Spannung auf.

Von den Elbaer Krystallen zeigt eine Varietät dieselbe Vertheilung wie die russischen Berylle, während bei einer anderen die elektrischen Polaritäten gerade die entgegengesetzten sind, die Endflächen $0P$ also negative und die Seitenflächen positive Spannungen zeigen; wobei jedoch bisweilen auf einzelnen Seitenflächen mehr oder weniger ausgedehnte negative Stellen erscheinen.

Die nahe senkrecht gegen die Hauptaxe gerichteten Bruchflächen besitzen bei längeren Krystallen dieselbe Elektricität, wie die ausgebildeten Krystallflächen $0P$; bei kurzen dagegen können sie, wie dies auch bei anderen nicht hemimorphen Krystallen, z. B. beim Topase, dem Apophyllite u. s. w. der Fall ist, die entgegengesetzte Polarität zeigen.

Ich habe diesen letzteren Vorgang bisjetzt nur an den kürzeren Prismen von Elba beobachtet, und zwar bei beiden Varietäten. Ist die Fläche 0 P positiv, so erscheint also bei solchen kurzen Individuen die Bruchfläche negativ; ist die Fläche 0 P aber negativ, so tritt dann auf der Bruchfläche positive Spannung hervor.

Auf einer Seitenfläche eines der ersten Varietät angehörigen Elbaer Krystalles (No. 18) habe ich ferner den von mir sonst auf keinem anderen Berylle wahrgenommenen Vorgang beobachtet, dass auf derselben (und zwar constant nach jeder Erhitzung bis ungefähr 130° C.) sofort beim Beginne des Erkaltens negative Spannung erschien, die beim weiteren Erkalten ein gewisses Maximum erreichte, dann abnahm und zuletzt in eine nicht unbeträchtliche positive überging.

Auf einer ungefähr mit einer Fläche von ∞ P parallel und fast durch die Mitte des Krystalles gehenden Bruchfläche eines Smaragdes (No. 3) wurde positive Spannung beobachtet.

Zum Beweise der vorstehenden allgemeinen Angaben mögen die nachfolgend mitgetheilten Beobachtungen dienen. Die Netze und Projectionen der betreffenden Krystalle, in welche jene auf Taf. II und III eingetragen, sind stets in natürlicher Grösse abgebildet.

## A. Smaragd aus Südamerika.

Es standen mir drei kleine Smaragde zu Gebote; als Fundort des einen war Neu-Granada, als Fundort der beiden andern schlechthin Peru angegeben.

### Krystall No. 1. Taf. II, Fig. 1.

Der aus Neu-Granada stammende Krystall No. 1 gehört dem Freiberger Museum; Fig. 1, Taf. II giebt eine Abbildung seines Netzes in natürlicher Grösse. Er ist, wie wohl alle Smaragde, nur an dem einen Ende ausgebildet und stellt eine Combination von ∞ P, 0 P, P, 2 P, 2 P 2, einer oder wahrscheinlich zwei dihexagonalen Pyramiden*) und ∞ P 2 dar; ausserdem zeigt sich noch eine sehr kleine Fläche einer spitzen hexagonalen Pyramide zweiter Art. Uebrigens sind die gegen die Hauptaxe geneigten Flächen, so wie die Flächen

*) Auf den Kanten von 2 P 2 und ∞ P.

$\infty P2$ in sehr ungleicher Grösse ausgebildet, und ein Theil derselben fehlt gänzlich. Das untere Ende ist unregelmässig verbrochen.

Die Fläche 0P ist in ihrer Ebene glänzend, aber mit kleinen Grübchen versehen, die sich auch über die eine Fläche von P verbreiten. Die Masse des Krystalles ist sehr klar und durchsichtig und von hellsmaragdgrüner Farbe.

Der Krystall ist für seine Grösse in Vergleich zu anderen Beryllen ziemlich stark elektrisch. Die auf seinen Flächen beim Erkalten beobachteten Spannungen sind in das Fig. 1, Taf. II abgebildete Netz eingetragen. Die Prismenflächen sind negativ elektrisch, jedoch erscheinen auf vier derselben die in der Nähe des oberen Endes gelegenen Theile nicht elektrisch; auf allen nimmt übrigens die negative Spannung in der Richtung nach unten hin zu. Das obere ausgebildete Ende zeigt eine etwas stärkere positive Elektricität als das untere verbrochene.

Krystall No. 2. Taf. II, Fig. 2.

Als Fundort der dem hiesigen mineralogischen Museum gehörigen Smaragde No. 2 und No. 3 ist Peru angegeben.

Der Krystall No. 2, dessen Netz Fig. 2, Taf. II darstellt, ist ein Aggregat von drei Krystallen (zwei grossen und einem kleinen), welche in parallelen Stellungen zu einem Ganzen verwachsen sind. Von Krystallformen finden sich an ihm $\infty P$, 0P, P, 2P2, eine dihexagonale Pyramide, und $\infty P2$; jedoch besitzen die gegen die Axe geneigten Flächen nur eine sehr geringe Ausdehnung. Die Fläche 0P am oberen Ende ist mit zahlreichen Grübchen versehen, die sich auch über einige der geneigten Flächen ausbreiten. Auf den Prismenflächen 4 und 5 ist ein anderer kleiner Smaragd mit seiner Hauptaxe senkrecht gegen die Fläche 4 hineingewachsen und ungefähr in der Ebene der Fläche 4 abgebrochen. Auf der Fläche 2 liegt eine kleine Säule von Quarz in etwas schiefer Richtung. Das untere Ende des Krystalles No. 2 ist unregelmässig verbrochen und erscheint auf dieser Bruchfläche zum Theil weisslich mit eingewachsenen kleinen Massen eines schwärzlichen Minerales, während der ganze übrige Krystall sonst tief smaragdgrün gefärbt ist.

In seinem elektrischen Verhalten gleicht der Krystall No. 2, wie die in das Netz Fig. 2 eingetragenen Beobachtungen nachweisen,

dem vorhergehenden; jedoch tritt auf den Prismenflächen kein Unterschied in der Stärke der negativen Spannungen zwischen den oberen und unteren Theilen hervor.

Krystall No. 3. Taf. II, Fig. 3.

Das Netz dieses Krystalles No. 3 ist Fig. 3, Taf. II gezeichnet. Derselbe bildet eine Combination von $\infty P$, $0P$, $P$ (sehr klein), $2P$ und einer dihexagonalen Pyramide. Fast eine ganze Hälfte ist durch eine mit den Prismenflächen 1 und 4 nahe parallele ziemlich ebene Bruchfläche abgesprengt. Die Endfläche $0P$ am oberen Ende zeigt zahlreiche Grübchen; das untere Ende ist unregelmässig verbrochen. Die Farbe des Krystalles ist tief smaragdgrün.

Die elektrische Vertheilung ist dieselbe, wie auf den beiden vorhergehenden Krystallen; nur erscheint die an Stelle der Fläche 4 vorhandene Bruchfläche in ihrer ganzen Ausdehnung positiv.

## B. Beryllkrystalle vom Ural aus der Umgegend von Katharinenburg.

Nach v. Kokscharow*) finden sich die Beryllkrystalle begleitet von Topas, schwarzem Schörl und anderen Mineralien in der Umgegend von Katharinenburg nahe beim Dorfe Mursinka in den Höhlungen eines grobkörnigen Granits, der hauptsächlich aus gelblichweissem oder graulichweissem Feldspathe, einer geringeren Menge von braunem Quarze und einer noch geringeren Menge von graulichweissem Glimmer besteht. Die Berylle sind wein- oder grünlichgelb, gelblichgrün, bläulichgrün und blassblau. Gewöhnlich erscheinen sie durchsichtig und stellen eine Combination der Gestalten $\infty P$, $0P$, $P$, und $P2$ dar.

Ueber zwei von dem zuvor genannten Fundorte stammende, an beiden Endpunkten der Hauptaxe unsymmetrisch ausgebildete Berylle ist schon oben S. 233 verhandelt worden.

Wenn auch die Mursinkaer Berylle in dem Auftreten der elektrischen Polaritäten im Allgemeinen den Smaragden gleichen, so zeigen sie doch andererseits fast sämmtlich in der Vertheilung der Elektricität die schon oben S. 235 erwähnte Eigenthümlichkeit. Es zieht

*) v. Kokscharow, *Materialien zur Mineralogie Russlands* I, S. 150.

sich nämlich gewöhnlich, und zwar besonders bei Krystallen, deren übrige Seitenflächen stark negativ sind, die positive Polarität von dem oberen Ende über eine oder selbst zwei seitliche Prismenflächen entweder nur eine Strecke weit herab, oder nimmt dieselben auch wohl ganz ein; bisweilen breitet sich diese positive Zone von einer Prismenfläche seitlich auf ein Stück der benachbarten aus.

Kein äusseres Merkmal unterscheidet übrigens die positiven Prismenflächen von den negativen.

Vielleicht hat man den Grund dieser eigenthümlichen Erscheinung zum Theil in dem Umstande zu suchen, dass bei den langgestreckten Krystallen die positive Elektricität auf den beiden wenig ausgedehnten Endflächen mit der über die sämmtlichen Seitenflächen ausgedehnten negativen nur dann im Gleichgewichte stehen kann, wenn die negative Elektricität auf diesen Seitenflächen eine geringe Spannung besitzt; dass dagegen, wenn die negative Polarität auf den Seitenflächen in grösserer Stärke auftritt, wie dies gerade bei den Mursinkaer Krystallen der Fall ist, zur Herstellung des elektrischen Gleichgewichts das Hervortreten der positiven Spannung noch auf einem mehr oder weniger grossen Theile der seitlichen Begrenzung gefordert wird. Damit würde auch übereinstimmen, dass bei dem Smaragd No. 1, der eine im Verhältniss zu seinem Querschnitte beträchtliche Länge besitzt und gleichfalls eine starke negative Polarität auf den Seitenflächen zeigt, die oberen Theile von vier Prismenflächen unelektrisch erscheinen.

Allerdings werden wir später bei einem kurzen Krystall von Elba (No. 18) denselben Vorgang wieder finden; man könnte also das Auftreten der positiven Spannung auf einer oder zwei Seitenflächen auch als Folge eines in den seitlichen Richtungen etwas verschiedenen Wachsthumes, infolge dessen verschiedene Spannungen in dem Gesammtkrystall eingetreten sind, betrachten.

Indess widerspricht gerade die Beobachtung an diesem Krystalle nicht der zuvor aufgestellten Ansicht, indem bei ihm nur die obere Endfläche 0 P positiv, die untere Bruchfläche aber, und zwar in nicht unbeträchtlicher Stärke, negativ ist, so dass also auch hier eine solche Compensation als nothwendig erscheinen kann. Dabei wird die Art des Wachsthums oder der Bildung des Gesammtkrystalles aber jedenfalls insoweit sich geltend machen, als durch sie

gerade gewisse Flächen für das Auftreten der positiven Elektricität bestimmt werden.

### *a. Gelbe Berylle.*

Wie bereits im Eingange erwähnt, hat schon Brewster an den gelben Beryllen thermoelektrische Erregungen wahrgenommen, jedoch keine nähere Angabe über die Vertheilung der beiden Elektricitäten gemacht.

Krystall No. 4. Taf. II, Fig. 4.

Der Krystall No. 4, dessen Netz Fig. 4, Taf. II abgebildet ist, gehört der Freiberger Sammlung; er stellt eine Combination der Gestalten $0P$, $\infty P$ und $\infty P\frac{3}{2}$ dar; jedoch erscheinen nicht alle Flächen des zuletzt genannten dihexagonalen Prismas. Die Flächen des Prismas $\infty P$ sind infolge oscillatorischer Combinationen von $\infty P$ und $\infty P\frac{3}{2}$ vertical gestreift und zeigen einzelne tiefere von spiegelnden Flächen der zuvor genannten Prismen gebildete verticale Furchen. Das untere Ende ist durch eine beinahe ebene, gegen die Hauptaxe senkrechte Fläche begrenzt.

Die dunkelweingelbe Masse des Krystalles ist ziemlich klar.

Krystall No. 5. Taf. II, Fig. 5.

Der Fig. 5, Taf. II in seinem Netze dargestellte dem hiesigen mineralogischen Museum gehörige Krystall No. 5 gleicht an Gestalt, Farbe und Durchsichtigkeit dem vorhergehenden. Die abwechselnden Seitenflächen sind breiter als die zwischen ihnen liegenden. Sein unteres Ende ist etwas schief verbrochen.

Krystall No. 6. Taf. II, Fig. 6.

Dieser Krystall gleicht den beiden vorhergehenden an Gestalt, Farbe und Durchsichtigkeit. Sein unteres Ende ist ziemlich eben und senkrecht gegen die Hauptaxe verbrochen.

Krystall No. 7. Taf. II, Fig. 7

Auch dieser Krystall gleicht den vorhergehenden, nur ist er sowohl oben als unten von zwei gegen die Hauptaxe senkrechten Bruchflächen begrenzt.

Bei ihm erscheinen sämmtliche seitliche Prismenflächen negativ, jedoch ist auf mehreren die negative Spannung sehr schwach.

### *b. Gelblich grüne Berylle.*

#### Krystall No. 8. Taf. II, Fig. 8.

Das Netz dieses Krystalles No. 8 ist Taf. II, Fig. 8 abgebildet, Seine Masse ist etwas rissig und nicht vollkommen rein. Da die Rand- und Seitenkanten durch Abreiben gerundet sind, so lässt sich nicht mehr mit Sicherheit erkennen, ob und welche kleinere gegen die Axe geneigten Flächen am oberen mit der Fläche $0P$ versehenen Ende ursprünglich vorhanden gewesen sind; auf den Kanten von $\infty P$ scheinen schmale Flächen des zwölfseitigen Prismas $\infty P\frac{3}{2}$ gelegen zu haben. Die Seitenflächen sind schwach vertical gestreift; das untere Ende ist ziemlich eben und senkrecht gegen die Hauptaxe verbrochen.

Die positive Elektricität beherrscht die beiden Endflächen, erstreckt sich aber auch über den grössten Theil der Seitenfläche 2 und dringt in der unteren Hälfte auf die Seitenfläche 1 vor. Auch auf dem anliegenden Rande der Fläche 3 zeigt sich in der oberen Hälfte noch keine negative Spannung. Ebenso scheint eine Einwirkung der positiven Elektricität sich in der unteren Hälfte der Fläche 6 geltend zu machen. Kein äusseres Merkmal unterscheidet, wie schon hervorgehoben, die positiven Seitenflächen von den negativen.

#### Krystall No. 9. Taf. II, Fig. 9.

Der Krystall No. 9 gleicht in der Beschaffenheit seiner Masse dem vorhergehenden. Seine (in der Zeichnung) untere Endfläche ist eine Krystallfläche $0P$, dagegen scheint die obere etwas stark abgeriebene Endfläche $0P$ eine Durchgangsfläche zu sein. Er ist gewissermassen ein Aggregat von zwei Individuen, welche auf der Fläche 4 eine tiefe Furche bilden. Der kleinere Krystall hat eine geringere Länge erhalten, indem seine Ausbildung am unteren Ende durch vorliegende Massen von Brauneisenstein gehindert worden ist.

*c. Blassblaue bis fast farblose Berylle.*

Krystall No. 10. Taf. II, Fig. 10.

Der schwach bläulich gefärbte, sehr kleine und durchsichtige, dem hiesigen mineralogischen Museum gehörige Krystall No. 10 ist eine Combination der Gestalten $\infty P$, $0P$, $P$ und $2P2$; doch verlaufen die Prismenflächen 3, 4 und 5 rundlich ineinander. Das untere Ende ist durch eine muschlige Bruchfläche begrenzt.

Krystall No. 11. Taf. II, Fig. 11.

Für diesen der Freiberger Sammlung gehörigen Krystall war im Allgemeinen Russland als Fundort angegeben; jedenfalls stammt er auch von Mursinka. Er ist farblos und wird vorzugsweise begrenzt von den Flächen $0P$ und $\infty P$. Jedoch nur das obere Ende trägt die Krystallfläche $0P$, während das untere von einer senkrecht gegen die Hauptaxe angeschliffenen Fläche gebildet wird. Auf den oberen Randkanten und Ecken finden sich sehr kleine Flächen von $P$ und $2P2$. Die Flächen des Prismas $\infty P$ sind vertical gestreift.

Krystall No. 12. Taf. II, Fig. 12.

Ein Fundort für diesen Krystall, dessen Netz Fig. 12, Taf. II darstellt, war nicht angegeben; wahrscheinlich ist er mit dem vorhergehenden einerlei Ursprungs, könnte jedoch auch von der Uralga (aus dem Borschtschowotschnoi Gebirgszuge) stammen. Seine Masse ist ziemlich rein und klar und von schwach grünlicher Färbung. Er bildet eine einfache Combination von $\infty P$ und $0P$; am oberen Ende ist er von der Krystallfläche $0P$, am unteren von einem ihr parallelen Durchgange begrenzt.

Seine elektrische Erregung ist ziemlich stark und seine Seitenflächen sind sämmtlich negativ; jedoch zeigt die Fläche 3 eine viel geringere Spannung als die übrigen.

## C. Berylle von Nertschinsk (vom Adun-Tschilon.)

Nach v. Kokscharow*) findet sich der Beryll im Nertschinsker Kreise an zwei Orten, nämlich in dem Gebirgsrücken Adun-Tschilon

*) v. Kokscharow, *Materialien zur Mineralogie Russlands*. Bd. I, S. 164.

(oder Tutchaltui) und in dem nördlichen Abhange des Borschtschowotschnoigebirgszuges. Am Adun-Tschilon tritt der Beryll in einer quarzhaltigen Felsart (von den Einwohnern Topasfels genannt) auf, welche nach der Angabe von Kulibin den Granit in Gängen durchsetzt. »Der Hauptbestandtheil dieser Gebirgsart ist graulichweisser feinkörniger und kleinkrystallinischer Quarz, welcher mit kleinen Topaskrystallen vermengt vorkommt. Der Topasfels enthält an vielen Stellen unregelmässige Höhlungen, deren Wandungen mit Krystallen von Rauchtopas, Topas und Beryll bekleidet sind.« Die prismatischen Seitenflächen der Berylle vom Adun-Tschilon sind fast immer mit tiefen verticalen Streifen bedeckt, und unterscheiden sich dadurch von den Beryllkrystallen aus dem Borschtschowotschnoigebirgszuge und vom Ural.

Krystall No. 13. Taf. II, Fig. 13.

Der Krystall No. 13, den Fig. 13, Taf. II nur in einer seitlichen Projection nebst den Endflächen darstellt, gehört dem hiesigen mineralogischen Museum; er misst in der Länge 72,2$^{mm}$. Seine Seitenflächen sind so stark gestreift, dass sich die einzelnen Flächen des Prismas $\infty P$ nicht wohl unterscheiden lassen. Die beiden glänzenden Flächen an den Enden scheinen Krystallflächen $0P$ zu sein, so dass dieser Krystall also ringsum von Krystallflächen begrenzt wäre. Seine Masse ist etwas bläulich gefärbt, ziemlich klar, aber rissig.

Wie bei allen vorhergehenden Beryllen sind die Endflächen positiv; die Seitenflächen zeigen fast sämmtlich negative Spannungen, nur auf einer in der Projection nicht sichtbaren Prismenfläche war in der oberen Hälfte keine Elektricität wahrzunehmen.

Krystall No. 14. Taf. III, Fig. 14.

Der Beryll No. 14 (Taf. III, Fig. 14) gleicht dem Krystall No. 13 in seiner Beschaffenheit und seinem elektrischen Verhalten. Am oberen Ende war er von der Krystallfläche $0P$, am unteren von einer etwas unregelmässigen Bruchfläche begrenzt.

## D. Berylle von Elba.

Die mir vorliegenden Krystalle von Elba sind entweder farblos oder schwach röthlich oder gelblich oder grünlich gefärbt. Sie sind

hauptsächlich eine Combination von $0P$ und $\infty P$, zu denen noch kleinere oder grössere Flächen von $P$, $2P2$, $P2$, $3P\frac{3}{2}$, und auch einer sehr stumpfen Pyramide $\frac{1}{14}P$ (?) (s. oben S. 233) hinzutreten. Die Pyramidenflächen erscheinen meistens durch zahlreiche kleine Grübchen matt; die Flächen $2P2$ sind bisweilen weniger matt als die Flächen $P$.

Auf den Seitenflächen zeigt sich keine von einer oscillatorischen Combination der Gestalten $\infty P$ und $\infty P\frac{3}{2}$ herrührende verticale Streifung, wie sie bei den Krystallen der vorhergehenden Abtheilungen meistens vorhanden war. Die Seitenflächen erscheinen entweder durchaus glatt, oder zeigen eine feine den Combinationskanten von $\infty P$ mit $2P2$ parallel gehende oder eine sehr schwache horizontale Streifung. Es weist dieser Umstand wohl auf eine andere Bildungsweise hin, als sie bei den russischen Beryllen stattgefunden hat.

Die Elbaer Berylle bieten ein ganz besonderes Interesse durch den Umstand dar, dass, wie S. 235 schon bemerkt, zwei Varietäten existiren, welche sich in elektrischer Beziehung gerade entgegengesetzt verhalten, wie wir einen solchen Gegensatz bereits unter den Krystallen des Kalkspathes kennen gelernt haben. Während jedoch bei diesem letzteren Minerale in den meisten Fällen die Art der elektrischen Vertheilung aus der äusseren Form der Krystalle erkennbar war, ist es mir bisher nicht gelungen, solche äussere Kennzeichen für die beiden entgegengesetzten Varietäten des Berylles zu entdecken.

### a) *Krystalle mit positiven End- und negativen Seitenflächen.*

Die Krystalle dieser Abtheilung gleichen in ihrer elektrischen Vertheilung den russischen Beryllen: ihre Endflächen sind positiv, die Seitenflächen im Allgemeinen negativ; jedoch erscheint beim Krystall No. 18 die eine Prismenfläche nur im Beginn des Erkaltens negativ, und geht nach und nach ins Positive über.*)

Bei sehr kurzen Krystallen zeigt die Bruchfläche am unteren

*) Ob dieser Wechsel nur eine Folge der geringen Ausdehnung dieses Krystalles nach der Richtung der Hauptaxe und der auf der unteren Bruchfläche auftretenden negativen Polarität ist, vermag ich beim Mangel ähnlicher Krystalle nicht zu ermitteln.

Ende (Krystall No. 18) negative Spannung, während die Krystallfläche 0P am oberen Ende positiv ist.

Krystall No. 15. Taf. III, Fig. 15.

Der Krystall No. 15 gehört der Freiberger Sammlung und ist eine Combination von $\infty$P, 0P, P und 2P2. Die Flächen $\infty$P und 0P besitzen sehr starken Glanz, während die Flächen P und 2P2 matt erscheinen und zahlreiche Grübchen zeigen. Seine obere Endfläche 0P ist am äusseren Rande ungefähr 1,5$^{mm}$ breit, ein wenig eingesunken, und hebt sich dann wieder etwas rundlich in dem mittleren Theile. Am unteren Ende ist er sehr unregelmässig verbrochen, und namentlich ist die Prismenfläche 5 fast ganz durch einen Bruch hinweggenommen.

Die elektrische Erregung ist ziemlich stark, besonders auf der oberen Fläche 0P.

Krystall No. 16. Taf. III, Fig. 16.

Der dem hiesigen mineralogischen Museum gehörige Krystall ist eine Combination von $\infty$P, 0P, P, 2P2 und 3P$\frac{3}{2}$. Die Flächen $\infty$P und 0P sind sehr glänzend und glatt; unter der Loupe erkennt man auf den Flächen $\infty$P eine mit den Combinationskanten von $\infty$P und 2P2 parallel gehende Streifung. Die Flächen P und 2P2 sind matt, die sehr schmalen Flächen 3P$\frac{3}{2}$, welche die Combinationskanten von $\infty$P und 2P2 abstumpfen, vielleicht etwas glänzender.

Fig. 16 stellt eine seitliche Projection sammt den Projectionen der Endflächen dar. Am unteren Ende ist er von einer gegen die Hauptaxe nahe senkrechten Bruchfläche begrenzt. Von den prismatischen Seitenflächen ist nur die Fläche 1 vollständig, die Fläche 2 und 6 zum Theil ausgebildet, während an Stelle der übrigen eine unregelmässige Bruchfläche die Begrenzung bildet. Die Masse des Krystalles hat eine schwach röthliche Färbung.

Die obere Fläche 0P und die Bruchfläche am unteren Ende sind positiv; dagegen liess sich die Polarität der Seitenflächen wegen ihrer geringen Intensität nicht mit Sicherheit bestimmen.

Krystall No. 17. Taf. III, Fig. 17.

Der Krystall No. 17 gehört der Freiberger Sammlung und ist merkwürdig durch die Bildung seines oberen Endes, an welchem

sich die mittlern Theile schwach treppenförmig erheben. Am oberen Rande, der jedoch etwas unvollkommen ausgebildet ist, finden sich nur sehr kleine Flächen von 2P2 und 3P$\frac{3}{2}$. Das untere Ende des Krystalles ist verbrochen.

Fig. 17 stellt eine seitliche Projection nebst der oberen Endfläche dar. Die elektrische Erregung ist nur schwach, namentlich auf mehreren Seitenflächen.

Krystall No. 18. Taf. III, Fig. 18.

Der Krystall No. 18, welchen ich der Güte der Herren Sella in Rom und Spezia in Turin verdanke, gehört der Sammlung des Ingenieur-Instituts in Turin. Fig. 18 stellt sein Netz dar.

Er bildet ein nur niedriges Prisma, und zeigt die Gestalten ∞P, 0P, P, P2 und 2P2. Während die Flächen P matt erscheinen, besitzen die Flächen P2 und 2P2 etwas Glanz. Auf den Prismenflächen ist unter der Loupe wieder eine mit den Combinationskanten von ∞P und 2P2 parallele Streifung zu erkennen. Das untere Ende wird von einer gegen die Hauptaxe senkrechten, etwas muschligen Bruchfläche begrenzt. Auch an Stelle des grösseren Theiles der Prismenflächen 2 und 3 ist ein Bruch getreten.

Der Krystall ist stark elektrisch: die obere Endfläche zeigt starke positive Spannung, besonders gegen die von den Flächen 4 und 5 gebildete Kante hin, dagegen erscheint in der Nähe der Flächen 2 und 3 eine sehr schwache negative Spannung. Die Bruchfläche am unteren Ende ist stark negativ. Es verhält sich dieses Krystallbruchstück also auf seinen Endflächen ebenso, wie eine gleich dicke von dem oberen ausgebildeten Ende eines sächsischen Topases abgesprengte Platte.*) Die prismatischen Seitenflächen 1, 2, 3 und 6 sind während des ganzen Verlaufes des Erkaltens negativ; dagegen erscheint, wie bereits oben S. 236 erwähnt, die Fläche 4, wenn der Krystall bis 130° erhitzt worden, zwar beim Beginn des Erkaltens negativ; diese negative Spannung wächst bis zu einem gewissen Maximum, nimmt aber dann wieder ab und geht zuletzt in eine nicht unbeträchtliche positive Spannung über. Ob die Fläche 5 sich ähnlich verhält, und ganz zu Ende des Erkaltens ebenfalls eine

*) Vrgl. Bd. XIV dieser Abhandlungen, S. 441.

schwache positive Spannung annimmt, vermag ich nicht mit voller Sicherheit zu entscheiden.

Wie bereits vorhin bemerkt, ist die positive Elektricität auf der oberen Endfläche 0P besonders am Rande nach der von der Fläche 4 und 5 gebildeten Kante hin stark. Es ist mir nicht unwahrscheinlich, dass die Umkehrung der Polarität auf der Fläche 4 gerade mit diesem Umstande zusammenhängt.

Mehrere andere Elbaer Berylle zeigten ebenso wie die im Vorstehenden beschriebenen vier Krystalle die Enden der Hauptaxe positiv, und die Seitenflächen negativ.

### b) *Krystalle mit negativen End- und positiven Seitenflächen.*

Wenn ich nach dem mir vorliegenden Materiale an Krystallen urtheilen darf, so zeigen die meisten Elbaer Berylle das im vorhergehenden Abschnitte beschriebene Verhalten; eine geringere Zahl gehört der folgenden zweiten Abtheilung an.

Bei den Krystallen dieser zweiten Abtheilung erscheint die Krystallfläche 0P am oberen Ende negativ; die das untere Ende begrenzende Bruchfläche ist entweder ebenfalls negativ oder auch zum Theil positiv. Die prismatischen Seitenflächen sind positiv, jedoch erscheinen auf einzelnen Flächen, namentlich an Stellen in der Nähe des unteren verbrochenen Endes mehr oder minder ausgedehnte negative Zonen.

#### Krystall No. 19. Taf. III, Fig. 19.

Der Fig. 19 in seinem Netze abgebildete Krystall ist im Wesentlichen eine Combination von $\infty$P und 0P; die Flächen P, 2P2 und einer sehr stumpfen Pyramide $\frac{1}{14}$P (?) treten nur in geringer Grösse auf. Die Prismenflächen $\infty$P sind stark glänzend und lassen keine Streifungen erkennen. Die Flächen P sind völlig matt, die Flächen 2P2 etwas weniger. Das untere Ende des Krystalles ist verbrochen. An drei Stellen sind kleine Glimmermassen aufgewachsen. Seine Masse ist farblos, und bei der hinreichenden Durchsichtigkeit der-

selben konnte festgestellt werden, dass im Innern keine fremden Kryställchen, wie etwa Turmalinnadeln, eingewachsen waren.*)

### Krystall No. 20. Taf. III, Fig. 20.

Fig. 20 stellt das Netz dieses Krystalles dar, der in seiner Gestalt dem vorhergehenden gleicht; auch er trägt schmale Flächen der stumpfen Pyramide $\frac{1}{14}$P (?). Von den Seitenflächen sind nur die Flächen 1 und 6 nebst einem kleinen Theile von 5 ausgebildet; sie zeigen die mit den Combinationskanten von ∞P und 2P2 parallel gehenden Streifungen. Das obere Ende wird von der Krystallfläche 0P gebildet; am unteren scheint das mit $\alpha\beta$ (Fig. 20) bezeichnete kleinere Stück einer natürlichen Endfläche anzugehören, während der grössere Theil $\gamma\delta$ aus einer schief aufsteigenden Bruchfläche besteht.

### Krystall No. 21. Taf. III, Fig. 21.

Dieser Fig. 21 in seinem Netze abgebildete kleine Krystall gehört der Sammlung des Ingenieur-Instituts in Turin. Er erscheint, soweit die Verletzungen der Ränder am oberen Ende eine genaue Beobachtung gestatten, nur von den Flächen 0P und ∞P, nebst einer Bruchfläche am unteren Ende begrenzt.**) Auf einigen der prismatischen Seitenflächen finden sich die mit den Combinationskanten von ∞P und 2P2 parallel laufenden Streifungen so angeordnet, dass eine Anzahl Rhomben entstehen, deren längere Diagonale horizontal liegt; diese längere Diagonale erscheint als horizontale Streifung.

Die obere Endfläche 0P ist negativ, die Bruchfläche am unteren Ende zeigt in der Nähe der Flächen 1, 6 und 5 schwache positive Spannungen, während auf ihrer Mitte und dem übrigen Theile des Randes keine Elektricität wahrzunehmen ist. Auf mehreren Seitenflächen erscheinen besonders in den unteren Theilen negative Stellen.

---

*) Bei einem anderen Elbaer Beryll, der dem obigen Krystalle No. 19 gleicht, ist an der einen Seite eine kleine stänglige gelbgrünlich gefärbte Turmalinmasse in paralleler Stellung mit dem Beryll angewachsen, welche durch ihre starke Polarität die Ermittelung der elektrischen Vertheilung auf dem Beryll unmöglich macht.

**) Andeutungen der Flächen der stumpfen Pyramide vermag ich nicht wahrzunehmen.

## III. Idokras (Vesuvian).

Ebenso wie den Kalkspath und den Beryll führt Brewster auch den Idokras in dem 1824 veröffentlichten Verzeichnisse*) thermoelektrischer Mineralien an, fügt jedoch auch bei ihm keine weitere Bemerkung über die Vertheilung der Elektricität auf seiner Oberfläche hinzu. Es ist mir aber auch in diesem Falle, gleich wie beim Kalkspath und Beryll, sehr wahrscheinlich, dass Brewster in der That die thermoelektrische Erregung am Idokrase beobachtet hat und nicht etwa durch Reibungselektricität getäuscht worden ist. Man darf nämlich wohl annehmen, dass Brewster zur bequemeren und vollkommeneren Ausführung seiner Beobachtungen möglichst grosse und vollständige Krystalle ausgewählt hat; in beiden Beziehungen zeichnen sich nun die Idokraskrystalle vom Flusse Wilui bei Jakutsk vor allen übrigen aus, und gerade sie sind es auch, welche, wie die Mittheilung der speciellen Beobachtungen zeigen wird, unter allen Idokrasen die stärksten elektrischen Spannungen darbieten, die also Brewster unter günstigen Umständen selbst mittelst seines sehr unvollkommenen Verfahrens wohl noch wahrzunehmen vermochte.

Die Krystalle des Idokrases gehören dem tetragonalen Systeme an; die einzelnen Gestalten, welche an denselben auftreten, sind von v. Zepharovich**) zusammengestellt worden. Dabei bleibt aber bis jetzt der eigenthümliche Umstand unerledigt, dass die Neigungs-

---

*) *The Edinb. Journ. of Science*, conducted by David Brewster, Heft 2; übersetzt im *Jahrbuch der Chemie und Physik* von Schweigger, 1825. Bd. 43. S. 94.

**) Sitzungsber. d. math.-naturw. Classe d. Wiener Akad. d. W. Bd. XLIX. 1864.

winkel in den Polkanten der Krystalle vom Wilui etwas von den entsprechenden Neigungswinkeln bei den übrigen Idrokrasen abweichen. Während nämlich der Neigungswinkel in den Polkanten der Grundpyramide bei den Krystallen von Ala in Piemont und vom Vesuv, sowie bei den Krystallen der meisten russischen Fundorte 129° 21′ beträgt, steigt derselbe bei den zuvor genannten Krystallen vom Flusse Wilui bis zu 130° 2′. Wenn auch die Bildung der Flächen der letzteren Krystalle nicht so vollkommen ist, dass dieselben eine absolut scharfe Messung gestatten, so erreicht der eben angegebene Unterschied in den Winkeln doch eine solche Grösse, dass er durch die Unvollkommenheiten der Flächen nicht erklärt werden kann.

Auch die chemische Constitution des Idokrases ist noch nicht festgestellt. Früher glaubte man, er habe dieselbe Zusammensetzung, wie der Granat, mit welchem er sehr häufig gemeinschaftlich vorkommt; indess den neueren Analysen zufolge sind die Bestandtheile beider Mineralien soweit verschieden, dass dieselben nicht als dimorph betrachtet werden können. Eine besondere Schwierigkeit bietet das in den meisten Idokrasen in einer Menge von 2 bis 3 p. C. vorhandene Wasser, welches erst bei einer dem Schmelzpunkte des Minerales nahen Temperatur entweicht.*) Scheerer**) glaubt das Wasser in den Idokrasen als eine der Magnesia polymer-isomorphe Base auffassen zu dürfen.

Magnus***) fand über 2 p. C. Wasser in den Krystallen von Slatoust, aus dem Banat, von Egg bei Christiansand, vom Vesuv und von Ala; dagegen verlor der Idokras vom Wilui beim Glühen nur 0,73 p. C., so dass er, was auch Hermann und Scheerer schon zuvor angegeben, als wasserfrei betrachtet werden kann.

Ich habe eine grosse Anzahl von Idokraskrystallen auf ihr thermoelektrisches Verhalten genauer geprüft; doch ist es mir bis jetzt nur gelungen, auf den Krystallen vom Wilui, von Ala und einer Varietät aus dem Fassathale (?) elektrische Erregungen, und zwar bei manchen Individuen in nicht unbeträchtlicher Stärke zu beobachten.

---

*) Bis zum Schmelzpunkte des Silbers erhitzt, zeigen die betreffenden Idokrase nach Magnus noch keinen Gewichtsverlust. Poggend. *Annal.* Bd. 96, S. 350.

**) Poggend. *Annal.* Bd. 95, S. 531.

***) Pogg. *Annal.* Bd. 96, S. 349.

## I. Idokrase aus der Jakutsker Oblast, von den Ufern des Wilui, im östlichen Sibirien (Wiluit).

Ueber das Vorkommen und die physikalische Beschaffenheit dieser Krystalle berichtet v. Kokscharow in seinen *Materialien zur Mineralogie Russlands* (Bd. I, S. 110) Folgendes:

»Der Vesuvian findet sich in dieser Localität in schönen, vollkommen ausgebildeten Krystallen in einer tuffartigen, halbverwitterten Felsart am Flusse Achtaragda, welcher sich in den Wilui ergiesst. Er wurde hier im Jahre 1790 von Lachsmann entdeckt, und ist allgemein unter dem Namen Wiluit bekannt. Mit dem Wiluit kommen in derselben Felsart Krystalle grünen Granates (Grossular) und ein besonderes verwittertes Mineral von der Form des Pyramidentetraeders eingewachsen vor. Das letztgenannte Mineral ist unter dem Namen Achtaragdit bekannt. Diese drei Mineralien kommen in grosser Menge in der Felsart zerstreut vor.«

»Die Wiluitkrystalle sind von verschiedener Grösse. Grösstentheils haben dieselben bis zwei Centimeter Länge und 1 Centimeter im Durchmesser; jedoch finden sich manches Mal Krystalle, die bei verhältnissmässigem Durchmesser eine Länge von 5 Cent. haben. An einigen derselben findet man aufgewachsene Trapezoeder und Rhombendodekaeder von Grossular. Grösstentheils haben die Krystalle an der Oberfläche eine schalige Zusammensetzung, welche von einer allmähligen Krystallisation der Masse und einem schichtenweisen Anlegen derselben parallel den Flächen des schon gebildeten Krystalles herrühren mag, wie man es manchmal auch an Epidotkrystallen aus Arendal in Norwegen, Wolfram und anderen Mineralien wahrnehmen kann. — Durch Absonderung dünner Schalen von der Oberfläche des Krystalles kann man bis zu den glänzenden Flächen im Innern des Krystalles gelangen. Die Dicke dieser Schichten ist aber verschieden und variirt von der des feinsten Postpapiers bis zur Stärke von zwei Millimeter, wobei die dicksten sich an der Oberfläche des Krystalles befinden. Im Innern sind die Krystalle ziemlich dicht. Ausserdem ist fast jeder Krystall mit einer Schicht eines sehr weichen gelblichen Körpers bedeckt. Auf der Oberfläche dieser Schicht sind alle Unebenheiten der Krystallflächen bemerkbar, und dabei ist die-

selbe vollkommen glänzend. Diese, die Krystalle bedeckende Schicht rührt wahrscheinlich von einer Verwitterung der äussersten oberen Schale der Vesuviankrystalle her.«

»Die Krystalle haben gewöhnlich die Form des tetragonalen Prismas erster Art $\infty P$, dessen Seitenkanten durch die Flächen des tetragonalen Prismas zweiter Art $\infty P \infty$ abgestumpft sind; auf den Endkanten von $\infty P$ liegen die Flächen der tetragonalen Hauptpyramide P, welche durch die gerade Endfläche $0P$ abgestumpft wird. Manchmal ist die gerade Endfläche gar nicht vorhanden, während sie an anderen Krystallen dagegen sehr entwickelt ist. In seltenen Fällen sind die Combinationskanten zwischen P und $\infty P \infty$ durch sehr schmale Flächen der ditetragonalen Pyramide $3P3$ abgestumpft; hin und wieder sind auch sehr schmale Flächen der tetragonalen Pyramide $3P$ und des ditetragonalen Prismas $\infty P2$ vorhanden.«

»Im Allgemeinen sind die Flächen ziemlich glänzend, doch fast immer so uneben, dass man an Krystallen des Wiluits keine genauen Messungen vornehmen kann. Die glänzendsten und ebensten Flächen sind die des tetragonalen Prismas zweiter Art $\infty P \infty$;*) die Flächen des tetragonalen Prismas erster Art $\infty P$ sind manchmal fein vertical gestreift. Kupffer bestimmt den Neigungswinkel in den Polkanten der Hauptpyramide P zu $130^{0}\ 2'$. Wenn man jedoch darauf Rücksicht nimmt, dass dieser Winkel, der auch nach meiner Bestimmung gegen $130^{0}$ beträgt, sehr bedeutend von demselben Winkel in anderen Varietäten des russischen Vesuvians abweicht, und dass die Krystalle selbst zu genauen Messungen nicht günstig sind, so denke ich, dass es am besten sei, diese Frage als noch nicht erledigt anzusehen. Jedoch verdient diese Anomalie jedenfalls eine Berücksichtigung. Die Flächen an den von mir zur Messung verwendeten Krystallen waren nicht hinlänglich glänzend, oder wenn sie glänzend waren, so erschienen dieselben sehr uneben, convex, fein gestreift und dergleichen. An solchen Krystallen fand ich viel Widersprechendes, und Unregelmässigkeiten, ähnlich denen, die von Breithaupt**)

---

*) Die Spaltbarkeit nach $\infty P \infty$ ist deutlicher als nach $\infty P$.

**) Breithaupt nahm an, dass die Flächen der Hauptpyramide P gegen die Hauptaxe nicht einerlei Neigung besässen. Die vier Flächen der oberen Hälfte der

beobachtet worden sind; doch glaube ich kaum, dass man alles Dieses für gesetzlich annehmen kann, wenn man nichts derartiges an gut ausgebildeten Krystallen aus anderen Localitäten beobachtet hat.«

»Der Vesuvian hat eine dunkle braungrüne Farbe und fein muschligen Bruch. In dünnen Blättchen ist er mit grünlichgelber Farbe durchscheinend.«

Die Dichtigkeit des Wiluits ist nach v. Kokscharow 3,395.

Unter allen Idokrasen oder Vesuvianen zeigen, wie bereits Eingangs erwähnt, die Wiluitkrystalle die stärksten elektrischen Spannungen. Es ist mir nicht unwahrscheinlich, dass diese starken elektrischen Erregungen mit der im Vorstehenden von v. Kokscharow beschriebenen schaligen Bildung zusammenhängen, und es würde dann diese schalige Zusammensetzung an den Idokrasen die thermoelektrische Erregung ebenso begünstigen, wie die stängligen und faserigen Bildungen beim Topas, Schwerspath und Aragonit, und die Verwachsung über einander gestellter Rhomboeder beim Kalkspath.

Ich habe neun Wiluitkrystalle von sehr verschiedener Grösse auf ihr elektrisches Verhalten genauer untersucht; alle zeigten ohne irgend welche Abweichung beim Erkalten folgende Vertheilung der Elektricität: Die geraden Endflächen $0P$, sowie die gegen die Axe geneigten Flächen (also $P$) sind positiv, dagegen die prismatischen Seitenflächen $\infty P$ und $\infty P \infty$ negativ.

Es wird genügen, die an vier der geprüften Krystalle gemachten Beobachtungen specieller mitzutheilen. Auf Taf. III sind von zweien die Netze und von zweien die Projectionen, sämmtlich in natürlicher Grösse abgebildet. Die Wiluite No. 1 und 2 gehören der Freiberger, die Krystalle No. 3 und 4 der hiesigen Universitätssammlung.

### Krystall No. 1. Taf. III, Fig. 1.

Der Krystall No. 1 ist auf der Fläche 3 unvollkommen ausgebildet und mit der früher beschriebenen gelblichen Substanz bedeckt. Auf der Fläche 1 findet sich ein durch Anlegen eines fremden Krystalles gebildeter Eindruck.

---

Hauptpyramide sollten bestehen aus einer vorderen stumpfer geneigten und einer hinteren spitzeren nebst zwei seitlichen Flächen von mittlerer Neigung.

Krystall No. 2. Taf. III, Fig. 2.

Bei diesem Krystalle war die Fläche 3 theilweise verbrochen.

Krystall No. 3. Taf. III, Fig. 3.

Bei dem Fig. 3, Taf. III nur in einer seitlichen Projection nebst den beiden Endflächen dargestellten Krystalle waren sämmtliche Flächen gut ausgebildet; nur in den unteren Theilen der Prismenflächen und auf den Pyramidenflächen am unteren Ende fand sich stellenweise die oben erwähnte gelbliche Substanz.

Krystall No. 4. Taf. III, Fig. 4.

Der kleine ringsum gut ausgebildete Krystall No. 4 ist Fig. 4, Taf. III ebenfalls nur in einer seitlichen Projection nebst den beiden Endflächen gezeichnet. Auf den meisten Flächen zeigt sich in kleinen Flecken die gelbliche Substanz.

Ein anderer, auf der Tafel nicht abgebildeter Wiluitkrystall war auf einer prismatischen Seitenfläche ziemlich stark verletzt, und es trat unten auf einem Theile dieser verletzten Stelle anstatt der negativen Spannung die positive auf.

Es ist mir sehr wahrscheinlich, dass, wenn man einen Wiluit parallel mit einer Prismenfläche $\infty P$ in zwei gleiche Hälften zerschnitte, jede der beiden Schnittflächen positiv erscheinen würde.

## II. Idokras aus dem Fassathale.

Krystall No. 5. Taf. III, Fig. 5.

Der Fig. 5, Taf. III in einer seitlichen Projection nebst den beiden Endflächen abgebildete Krystall war als vom Monzoniberge im Fassathale stammend bezeichnet; er besitzt aber weder eine wachsgelbe Farbe, noch auch die Farbe des Zirkons, sondern erscheint dunkel (schwärzlichgrün).

Seine Masse ist ziemlich undurchsichtig.

Der Krystall ist, wie auch zum Theil schon aus der Projection Fig. 5 zu ersehen, in seiner Ausbildung vielfach gehemmt gewesen; jedoch finden sich sowohl am oberen, als am unteren Ende Theile der Flächen P und 0P; er hat also eine ähnliche Bildungsweise gehabt, wie die Wiluite.

Mit diesen letzteren stimmt er auch in seiner elektrischen Vertheilung überein. Auf den verletzten Theilen der Seitenflächen tritt ebenso, wie bei dem auf der vorhergehenden Seite erwähnten Wiluit positive Spannung auf.

Auf einem noch im Gestein sitzenden honiggelben Idokrase vom Monzoniberge mit vorherrschenden Pyramiden-, und nicht hohen Prismenflächen habe ich elektrische Spannungen wahrzunehmen nicht vermocht.

## III. Idokrase von Ala.

Die Idokrase von Ala unterscheiden sich besonders dadurch von den Wiluiten, dass sie mit dem einen Ende ihrer Hauptaxe aufgewachsen sind; wenigstens habe ich unter den von mir untersuchten Krystallen kein an beiden Enden der Hauptaxe ausgebildetes Individuum gefunden. Ihre Farbe ist grasgrün oder bräunlichgrün und ihre Masse durchsichtig bis durchscheinend.

Wie schon oben bemerkt, beträgt der Neigungswinkel der Flächen der Grundpyramide in den Polkanten 129° 21′. Die Krystalle sind gewöhnlich eine Combination der Gestalten P, $\infty$P, $\infty$P$\infty$ und 0P, zu denen öfter noch kleine Flächen von P$\infty$ und von ditetragonalen Pyramiden hinzutreten.

Die Flächen 0P und P sind eben und sehr glänzend, während die Flächen beider Prismen $\infty$P und $\infty$P$\infty$ eine starke verticale Streifung zeigen, infolge deren bei längeren Krystallen von geringem Querschnitte die einzelnen Seitenflächen oft nicht mehr scharf von einander unterschieden werden können.

Während die meisten Individuen dieses Fundortes im Ganzen nur kurze Prismen darstellen, finden sich aber auch einzelne längere prismatische Krystalle von kleinerem Querschnitte. Ich vermag nicht anzugeben, ob diese beiden Formen demselben Fundorte oder verschiedenen Localitäten entstammen. Beide Varietäten verhalten sich in elektrischer Beziehung mehr oder weniger verschieden, so dass es zweckmässig erscheint sie im Folgenden besonders zu behandeln.

## A. Krystalle von geringer Länge.

Die Krystalle dieser Abtheilung zeigen meistens nur eine schwache elektrische Spannung, und zwar sind bei ihnen die Endflächen 0 P nebst den umliegenden Pyramidenflächen negativ, das untere verbrochene Ende aber positiv; häufig ist dabei die positive Spannung auf der unteren Bruchfläche stärker als die negative auf der oberen Endfläche 0 P. Auf den prismatischen Seitenflächen sind gewöhnlich die oberen Theile schwach negativ, die unteren schwach positiv; doch verlaufen die Grenzen zwischen beiden Elektricitäten sehr verschieden, so dass öfter die Flächen überall schwach positiv oder umgekehrt in ihrem grössten Theile schwach negativ erscheinen. Bisweilen ist die elektrische Spannung auf ihnen aber auch so gering, dass eine sichere Bestimmung derselben unmöglich wird.

Nach den zuvor gemachten Angaben unterscheiden sich also die Idokraskrystalle von Ala in ihrem elektrischen Verhalten von den Wiluiten; sie gleichen in elektrischer Beziehung den oben S. 213 unter I. A. c. angeführten Schneeberger Kalkspathkrystallen, während die Wiluite mit den S. 206 I. A. a. verzeichneten Schneeberger Kalkspäthen übereinstimmen. Die Verschiedenheit zwischen den Idokrasen von Ala und den Wiluiten tritt besonders in dem Verhalten der oberen Endfläche 0 P hervor, die bei den Idokrasen von Ala negative Spannung zeigt, bei den Wiluiten aber stark positiv erscheint.

Ich habe eine grosse Anzahl Idokrase dieser Gruppe untersucht; im Folgenden bilde ich nur fünf derselben ab.

### Krystall No. 6. Taf. III, Fig. 6.

Der Taf. III, Fig. 6 in einer seitlichen Projection abgebildete Krystall gehört dem Museum der Turiner Universität. Die drei in der Zeichnung nicht dargestellten Seitenflächen zeigen in ihren oberen Theilen schwache negative, in den unteren aber positive Spannung; die auf ihnen am oberen Ende aufsitzenden Pyramidenflächen sind beträchtlich kleiner als die vordere abgebildete. Durch die Grösse dieser letzteren, welche stark negativ ist, erklärt sich die Ausbreitung der positiven Elektricität über die ganze abgebildete Fläche $\infty$P.

Krystall No. 7. Taf. III, Fig. 7.

Der Taf. III, Fig. 7 in seinem Netze nebst den Projectionen des oberen und unteren Endes dargestellte Krystall gehört der hiesigen Universitätssammlung. Am unteren Ende ist er schief abgebrochen, und die Fläche 4 hat im unteren Theile an anderen Massen angelegen.

Krystall No. 8 und 9. Taf. III, Fig. 8 u. 9.

Die beiden Krystalle sind nur in einer seitlichen Projection sammt den beiden Enden gezeichnet; sie gehören der Freiberger Sammlung. Am unteren Ende sind sie beide durch eine gegen die Hauptaxe fast senkrecht stehende Bruchfläche begrenzt.

Krystall No. 10. Taf. III, Fig. 10.

Der Krystall No. 10, welcher ebenfalls in einer seitlichen Projection abgebildet ist, wird an seinem unteren Ende von einer schief liegenden Bruchfläche begrenzt.

### B. Krystalle von grösserer Länge.

Es liegen mir aus dem Museum der Turiner Universität zwei solche Krystalle vor, deren einer grasgrün, der andere mehr bräunlichgrün gefärbt erscheint. Beide zeigen in elektrischer Beziehung eine Art von Gegensatz: während bei dem ersteren die Endfläche 0 P negativ ist, besitzt sie bei dem zweiten positive Spannung. Auf den Seitenflächen werden ähnliche Vorgänge wie bei den Mursinkaer Beryllen beobachtet.

#### *a. Krystall mit negativer Fläche* 0 P.

Krystall No. 11. Taf. III, Fig. 11.

Der Krystall war beim Transport zerbrochen in die beiden Stücke A (oberes grösseres) und B (unteres kleineres).

Fig. 11 a stellt die obere Fläche 0 P vom Stücke A, Fig. 11 b das Netz der Seitenflächen, und c die Bruchfläche am unteren Ende eben dieses Stückes dar. Fig. 11 d bildet die Bruchfläche am oberen Ende des Stückes B ab, welche an der Fläche c angelegen hatte,

Fig. 11 e das Netz der Seitenflächen und f die Projection der sehr schief liegenden Bruchfläche am unteren Ende von B.

Der Krystall No. 11 zeigt oben eine grosse Endfläche 0P, an deren Rande kleine Flächen von P und der ditetragonalen Pyramide 2P2 liegen. Seitlich wird er von den Flächen ∞P und ∞P∞ begrenzt. Seine Farbe ist grasgrün.

Die obere Endfläche 0P, sowie die beiden Bruchflächen an den Enden des unteren Stückes sind negativ; die Bruchfläche c am unteren Ende von A ist theils unelektrisch, theils schwach positiv. Die Seitenflächen sind im Allgemeinen positiv mit Ausnahme der Fläche 2, die namentlich auf dem unteren Stücke B negativ erscheint.

Im Ganzen ist die elektrische Spannung auf diesem Krystalle stärker als auf den zuvor beschriebenen.

### *b. Krystall mit positiver Endfläche* 0P.

Krystall No. 12. Taf. III, Fig. 12.

Fig. 12, Taf. III stellt das Netz der Seitenflächen nebst den Projectionen der beiden Enden dar. Das obere Ende zeigt eine grosse Endfläche 0P, die nur oberhalb der Prismenfläche 1 je eine Fläche der Pyramide P und 3P, und oberhalb der neben der Fläche 1 liegenden Flächen des Prismas ∞P∞ je eine Fläche der ditetragonalen Pyramide 3P3 trägt. Seitlich wird der Krystall von den Flächen ∞P und ∞P∞ begrenzt, und zwar sind, soweit sich bei der starken verticalen Streifung urtheilen lässt, die Flächen ∞P∞ etwas breiter als die Flächen ∞P. Das untere Ende ist schief verbrochen. Die grüne Farbe des sehr durchsichtigen Krystalles spielt etwas ins Bräunliche. Die Flächen 3P und 3P3 sind fast matt; die Fläche P hat einen geringeren Glanz als die prismatischen Seitenflächen und die Endfläche 0P.

Wie bei den Wiluiten zeigt nun bei diesem Krystalle die obere Endfläche 0P wieder positive Spannung, weicht also von dem Verhalten der übrigen Alaer Krystalle ab; die Bruchfläche am unteren Ende ist theils negativ, theils unelektrisch. Die Seitenflächen sind zum grösseren Theile positiv; doch findet sich namentlich in den oberen Theilen der Flächen 3 und 4 (die Flächen ∞P und ∞P∞ lassen sich hier infolge der starken Streifung nicht trennen) eine

negative Zone, die sich auch noch etwas über die Mitte der Fläche 1 erstreckt.

Ebenso wie bei dem vorhergehenden Krystalle sind auch bei dem vorliegenden die elektrischen Spannungen grösser als bei den kurzen unter A beschriebenen von Ala.*)

---

*) Forbes führt in seiner Abhandlung (*Transact. of the roy. soc. of Edinburgh*, Bd. 13, S. 35) einen Turmalin an, der an beiden Enden positive, in der Mitte aber negative Elektricität besass. Sollte dieser Krystall vielleicht ein Idokras gewesen sein, der in der oben beschriebenen nadelförmigen Gestalt sehr leicht mit einem Turmalin verwechselt werden kann? Forbes sucht die Erscheinung zu erklären, indem er zwei Turmaline mit den gleichnamigen Polen verwachsen annimmt.

## IV. Apophyllit (Ichthyophthalm, Albin).

Der Apophyllit ist wahrscheinlich zuerst von Rinmann beobachtet und unter dem Namen des Zeoliths von Hällestad (in Schweden) analysirt worden; doch waren diese Angaben in Vergessenheit gerathen, als der portugisische Mineralog d'Andrada*) 1804 die Beschreibung mehrerer von ihm auf einer Reise in Schweden und Norwegen gesammelter Mineralien veröffentlichte, unter denen sich auch ein auf Utö vorkommendes und durch seinen blättrigen, perlmutterartig glänzenden Bruch ausgezeichnetes befand. Er legte demselben eben wegen der Beschaffenheit dieses Durchganges den Namen Ichthyophthalm bei. Da eine Varietät des Feldspaths einen ähnlichen Glanz zeigt und deshalb auch den Namen Ichthyophthalm erhalten hatte, so glaubte Hauy, um jede Zweideutigkeit in der Benennung zu beseitigen, den Namen Ichthyophthalm durch die Bezeichnung Apophyllit, hergenommen von der Eigenschaft des Minerals, sich vor dem Löthrohre aufzublättern (*ἀποφυλλίζειν*), ersetzen zu müssen.

Die Krystalle des Apophyllits gehören dem tetragonalen Systeme an; der Winkel an den Mittelkanten der Grundpyramide variirt nach Dauber**) von 121° 8′ bis 119° 43′. Die Gestalten, welche wohl niemals fehlen, sind P und ∞P∞, während merkwürdigerweise das Prisma ∞P niemals vorkommt. Ausserdem treten noch die Flächen des ditetragonalen Prismas ∞P2 und die beiden Endflächen 0P auf,

---

*) Scheerer's Journal IV, 32.

**) Poggend. *Annal* Bd. 107, S. 280.

letztere oft in solcher Ausdehnung, dass die Krystalle tafelartig erscheinen. In der Richtung senkrecht gegen die Hauptaxe findet sich eine sehr vollkommene Spaltbarkeit; nach den Flächen des Prismas $\infty P \infty$ existirt eine unvollkommene.

Die derben Apophyllite im Fassathale haben grosse Neigung zu blätterig schaligen Absonderungen und sind bisweilen durch Eisenoxyd röthlich gefärbt.

Die Intensität der durch Temperaturänderung auf den Apophyllitkrystallen erregten Elektricität ist im Allgemeinen nicht unbeträchtlich; bei einigen Varietäten erreicht sie selbst eine solche Grösse, dass das Goldblättchen des Elektrometers ganz aus dem Gesichtsfelde des Mikroskops hinausgetrieben wird.

Das optische Verhalten der auf ihre elektrischen Eigenschaften geprüften Krystalle konnte ich, da ein Zerspalten der mir geliehenen Krystalle nicht gestattet war, nicht speciell untersuchen.

## I. Krystalle von Andreasberg.

Der Apophyllit findet sich in Andreasberg auf den Erzgängen der Grube Samson und ist entweder farblos oder blass rosenroth (nach Suckow durch Fluorkobalt gefärbt). Die Krystalle bilden eine Combination von P, $\infty P \infty$ und 0 P. Die Flächen sind meistens nicht völlig eben; namentlich erscheinen die Flächen $\infty P \infty$ etwas gekrümmt, so dass man sie als die Flächen eines ditetragonalen Prismas mit sehr stumpfen Winkeln betrachten kann.

Die elektrische Vertheilung ist sehr einfach: Die beiden Enden der Hauptaxe, sowie der grösste Theil der Pyramidenflächen P zeigen beim Erkalten positive, die Mittelkanten nebst den anliegenden Streifen der Pyramidenfläche P und der Flächen $\infty P \infty$ negative Elektricität. Sind die Flächen $\infty P \infty$ sehr gross, so erstreckt sich die positive Polarität auch wohl noch über ihre oberen und unteren Theile.

Da die Krystalle senkrecht gegen die Hauptaxe vollkommen spaltbar sind, so eigneten sie sich, um den Einfluss einer Verletzung der Krystalle in der eben bezeichneten Richtung zu ermitteln, wobei nur die Kleinheit und unvollkommene Ausbildung derselben mehr oder weniger Schwierigkeiten darboten. Die zersprengten Apophyl-

litkrystalle verhalten sich ähnlich, wie die Topase und Kalkspäthe. Wird eine Spitze der Hauptaxe abgeschlagen, so zeigt die Basis der kleinen vierseitigen Pyramide negative, dagegen die Abstumpfung an dem grossen Stücke, an welchem jene Basis angelegen hatte, positive Spannung. Rückt der Durchgang näher nach der Mitte des Krystalles, so treten auf der Durchgangsfläche am grösseren Stücke neben den positiven Stellen auch negative Zonen auf, bis schliesslich bei weiterer Annäherung an die Mitte die ganze Fläche negativ erscheint.

Bei der mangelhaften Ausbildung der mir zur Verfügung stehenden Apophyllitkrystalle würde eine Darstellung des Netzes in vielen Fällen wenig verständlich sein; ich werde mich daher meistens begnügen, die Krystalle nur in einer Projection, und zwar in derjenigen, in welcher sie uns die am vollkommensten ausgebildete Seite zeigen, abzubilden.

Sämmtliche Abbildungen stellen, wie bereits im Vorworte erwähnt, die Krystalle in ihrer natürlichen Grösse dar. Die Kleinheit mancher Krystalle macht das Eintragen der einzelnen Beobachtungswerthe unmöglich; jedoch sind auch stets auf den kleineren Flächen die elektrischen Spannungen an so vielen Punkten von mir gemessen worden, dass durch sie eine vollständige Kenntniss ihres elektrischen Verhaltens gewonnen wurde.

### Krystall No. 1. Taf. III, Fig. 1.

Der mir freundlichst von Herrn Prof. Karsten geliehene Krystall No. 1 ist in seiner oberen Hälfte vollständig, dagegen in seiner unteren, mit welcher er aufgesessen hatte, nur theilweise ausgebildet. Fig. 1, Taf. III stellt das Netz desselben dar. Die mit 0P bezeichnete kleine Fläche ist die obere natürliche Endfläche. Die sehr schwach röthlich gefärbte Masse desselben ist im Allgemeinen ziemlich klar, erreicht jedoch in dem dem oberen Ende benachbarten Theile vollständige Klarheit.*)

*) Das Zeichen # in der Abbildung bedeutet eine so starke positive Spannung, dass das Goldblättchen ganz aus dem Gesichtsfelde des Mikroskops hinaus getrieben wurde.

### Krystall No. 2. Taf. III, Fig. 2.

Der ebenfalls Herrn Prof. Karsten gehörige Krystall No. 2 gleicht dem vorigen; er sitzt mit seinem unteren Ende und einem Theile seiner seitlichen Begrenzung noch an einem Stücke des Ganggesteines fest. Fig. 2, Taf. III stellt eine seitliche Projection desselben dar.

### Krystall No. 3. Taf. III, Fig. 3.

Den farblosen Krystall No. 3 hatte ich von seiner Gangmasse ohne Verletzung abgelöst; nur an einer Seite sind kleine Ueberreste derselben sitzen geblieben. Das obere Ende ist vollkommener ausgebildet als das untere, weshalb auch die positive Spannung am oberen Ende beträchtlich stärker ist als am unteren.

Fig. 3, Taf. III stellt eine seitliche Projection desselben dar.

### Krystall No. 4. Taf. III, Fig. 4.

Der dem hiesigen mineralogischen Museum gehörige farblose Krystall No. 4 ist nur in seiner oberen Hälfte vollkommen ausgebildet, an der unteren aber verbrochen. Fig. 4, Taf. III stellt das Netz nebst den Endflächen dar.

An dem unteren Ende bildet zu einem kleinen Theile ($\alpha\beta$) ein mit 0 P paralleler Durchgang, zum grössten Theile ($\gamma\delta$) aber ein unregelmässiger Bruch die Begrenzung; dabei liegt der Durchgang dem unteren Ende des Krystalles näher als die Bruchfläche. Infolge dessen zeigt die kleine Durchgangsfläche schon wieder positive Polarität, während die weiter nach der Mitte hin liegende Bruchfläche noch negativ erscheint, wie dies in Fig. 4 dargestellt ist.

### Krystall No. 5. Taf. III, Fig. 5.

Das Fig. 5, Taf. III in seitlicher Projection nebst den Endflächen abgebildete Bruchstück No. 5 ist oben und unten von Durchgangsflächen begrenzt; während die obere Durchgangsfläche *a* nahe unter der oberen Spitze liegt, geht die untere Durchgangsfläche *b* fast durch die Mitte des Krystalles. Entsprechend den zuvor S. 262 ge-

machten Angaben erscheint die obere Fläche positiv, die untere dagegen negativ.

Krystall No. 6. Taf. III, Fig. 6.

Das Fig. 6, Taf. III in einer seitlichen Projection abgebildete Krystallbruchstück war auf der hinteren (nicht gezeichneten) Seite verletzt, und am unteren Ende durch eine Durchgangsfläche 0P begrenzt. Da letztere ungefähr um ¼ der halben Hauptaxe unterhalb der durch die Mitte gehenden Basis liegt, so erscheint auf ihr (Fig. 6 *b*) am vorderen Rande (auf der gut ausgebildeten Seite des Krystalles) bereits eine kleine positive Zone, während der übrige Theil derselben noch negativ bleibt.

Krystall No. 7. Taf. III, Fig. 7.

Der Fig. 7, Taf. III in seitlicher Projection abgebildete Krystall zersprang beim Ablösen in dem mit *aβ* bezeichneten Durchgange in ein oberes grösseres und in ein kleineres unteres Stück. Die beiden Flächen, welche vor der Trennung aufeinander gelegen haben, sind Fig. 7 *b* (untere Durchgangsfläche am oberen grösseren Stück) und 7 *c* (obere Durchgangsfläche am unteren kleineren Stücke) abgebildet; die letztere ist etwas kleiner als die erstere, da von dem unteren Stücke ein Theil beim Zerspringen zerbröckelte. Die untere Durchgangsfläche am oberen Stücke ist positiv, die obere Durchgangsfläche am unteren Stücke aber negativ.

## II. Krystall (sogenannter Albin) von Aussig in Böhmen.

Die Albinkrystalle von Aussig besitzen dieselbe Gestalt wie die unter I beschriebenen Andreasberger Apophyllite; auch gleichen sie ihnen im Allgemeinen in der Ausbildung der Oberfläche. Dagegen entbehren, wenigstens die mir vorliegenden der Durchsichtigkeit, sie erscheinen vielmehr meist undurchsichtig; es ist dies wohl eine Folge ihrer theilweisen Umwandlung in kohlensauren Kalk.

Krystall No. 8. Taf. III, Fig. 8.

Der von einem Phonolithgesteine abgelöste Albinkrystall ist in Fig. 8, Taf. III abgebildet. Sein oberes ausgebildetes Ende zeigt eine sehr rauhe Endfläche, auf welcher jedoch die einzelnen kleinen abgestumpften Spitzen noch spiegeln. Die untere Endfläche ist nur zum Theil ausgebildet. Der untere hintere Theil wird durch Bruchflächen begrenzt.

Die elektrische Erregung dieses Krystalles ist ziemlich stark und stimmt mit der auf den Andreasberger Krystallen beobachteten überein. Die Polarität des unteren Endes liess sich nicht mit Sicherheit bestimmen.

## III. Krystall von Poonah in Ostindien.

Krystall No. 9. Taf. III, Fig. 9.

Die Apophyllite von Poonah in Ostindien schliessen sich in ihrer Form und Beschaffenheit an die Andreasberger an. Es stand mir nur ein schöner, dem Herrn Chemiker Sachsse gehöriger Krystall behufs der elektrischen Untersuchung zur Verfügung.

Der klare, sehr schwach bläulich gefärbte Krystall No. 9 besteht aus zwei in paralleler Stellung verwachsenen, und ist nur an dem oberen Ende vollkommen ausgebildet, am unteren aber durch die Durchgangsfläche $0P$ begrenzt. Aus den vorhandenen Stücken der Flächen $\infty P \infty$ erkennt man, dass der Krystall eine etwas längere Säule gebildet hat, als wie solche bei den in dem ersten Abschnitte beschriebenen Andreasberger Krystallen auftritt, indem die Flächen $\infty P \infty$ durch ihren Durchschnitt verticale Kanten und somit ein quadratisches Prisma erzeugen.

Die elektrische Vertheilung stimmt mit der auf den Andreasberger Krystallen beobachteten überein. Die obere Endfläche ist positiv, und eben diese Polarität zeigen die Pyramidenflächen P entweder in ihrer ganzen Ausdehnung oder doch in ihrem grössten *Theile*, während die Flächen des Prismas $\infty P \infty$ und die unteren Theile einzelner Pyramidenflächen P negativ erscheinen. Der Durchgang am unteren Ende besitzt an diesem Krystalle negative Span-

nung, weil er in der Nähe der Mitte des vollständigen Krystalles liegen würde.

## IV. Krystalle von der Seiser-Alp in Süd-Tyrol.

Die von einem dem hiesigen mineralogischen Museum gehörigen Handstücke abgelösten kleinen Krystalle gleichen an Gestalt dem vorhergehenden; sie bilden vierseitige Prismen $\infty P \infty$ mit den Pyramidenflächen P und der geraden Endfläche 0P. Ihre Oberfläche erscheint durch eine beginnende Umwandlung in Albin im Allgemeinen matt; am meisten Glanz zeigen noch die Pyramidenflächen P. Die drei untersuchten Krystalle waren nur am oberen Ende ausgebildet, am unteren aber von der Durchgangsfläche 0P begrenzt.

In ihrer elektrischen Vertheilung stimmen sie mit dem vorhergehenden überein.

Krystall No. 10, 11 und 12. Taf. III, Fig. 10, 11 und 12.

Die derselben Druse entnommenen drei Krystalle sind Fig. 10, 11 und 12 auf Taf. III in einer seitlichen Projection nebst der oberen und unteren Endfläche abgebildet.

## V. Krystalle aus dem Banat.

Von Apophyllitkrystallen aus dem Banat standen mir ein einzelner Krystall von Orawitza, sowie ein mit zahlreichen kleinen Krystallen besetztes Handstück desselben Fundortes und ein ebenfalls mit vielen kleinen Krystallen bedecktes Handstück von Dognazka zur Verfügung. Krystalle von Cziklowa, welche nach Descloizeaux optisch negativ sind, während die Apophyllite von Utö, von Poonah, aus dem Fassathale u. A. der positiven Abtheilung angehören, vermochte ich nicht zu erlangen.

Krystall No. 13. Taf. III, Fig. 13.

Den klaren Krystall No. 13 von Orawitza verdanke ich der Güte des Herrn Prof. Quenstedt.

Seine hauptsächlichsten Begrenzungen bilden die Flächen ∞P∞ und 0P, während die Flächen P nur in geringer Ausdehnung auftreten. Der Krystall hat mit einer Seitenfläche am Gestein gesessen, und ist daher auf dieser Stelle von einer Bruchfläche begrenzt. Die beiden Flächen 0P sind Krystallflächen. Fig. 13, Taf. III stellt das Netz dar.

Die beiden Endflächen 0P sind positiv, die Seitenflächen ∞P∞ aber negativ; die Bruchfläche zeigt keine elektrische Spannung.

Krystall No. 14. Taf. III, Fig. 14.

Den in einer Projection nebst den Endflächen abgebildeten Krystall No. 14 (Fig. 14, Taf. III) habe ich von dem oben erwähnten, dem hiesigen mineralogischen Museum gehörigen Handstücke, als dessen Fundort Dognazka bezeichnet ist, abgelöst. Er gleicht in seiner Gestalt und elektrischen Vertheilung dem vorhergehenden; nur wird sein unteres Ende von einem Durchgange gebildet und erscheint deshalb negativ.

## VI. Krystalle aus Nord-Amerika.

Krystall No. 15. Taf. III, Fig. 15.

Der Herrn Prof. Karsten gehörige und als von New-Jersey stammend bezeichnete Krystall No. 15 ist ebenso wie die beiden vorigen von den Flächen ∞P∞ und 0P begrenzt; die Flächen P erscheinen noch kleiner als bei No. 13 und 14. Fig. 15, Taf. III stellt das Netz desselben dar. Da beide Flächen 0P Krystallflächen sind, zeigen beide auch positive Elektricität, während die negative auf den Seitenflächen auftritt.

Krystall No. 16. Taf. III, Fig. 16.

Als Fundort des Herrn Sachsse gehörigen Krystalles No. 16 war einfach Nordamerika angegeben; er stammt jedenfalls von Bergenhill. Bei ihm erreichen die Pyramidenflächen wieder eine so grosse Ausdehnung, dass die Flächen P des oberen und unteren Endes in kurzen Mittelkanten sich schneiden. Ausser den Flächen P, ∞P∞ und 0P treten auch noch kleine Flächen des achtseitigen Prismas

$\infty P 2$ auf. Die Fläche $0 P$ am unteren Ende scheint auch eine Krystallfläche zu sein, oder hat wenigstens nahe unterhalb derselben gelegen. Die obere Fläche $0 P$ ist matt, und eben dieses matte Aussehen erstreckt sich auch auf die unter ihr liegende Schicht von $\frac{1}{3}$mm Dicke.

In Fig. 16, Taf. III ist eine seitliche Projection des Krystalles nebst den beiden Endflächen abgebildet. Die beiden Endflächen $0 P$ sind positiv, die Flächen $P$ und $\infty P \infty$ dagegen negativ.

Krystall No. 17. Taf. III, Fig. 17.

Der dem hiesigen mineralogischen Museum gehörige Krystall No. 17 stammt von Bergenhill in New-Jersey und bildet eine dicke Tafel. Er ist, ebenso wie No. 16, eine Combination der Gestalten $0P$, $\infty P \infty$, $P$ und $\infty P 2$. Auf der oberen und unteren Fläche $0 P$ finden sich zahlreiche andere kleine Apophyllitkrystalle auf- und eingewachsen; die Seiten sind zum Theil verbrochen.

Fig. 17, Taf. III stellt eine seitliche Projection desselben nebst den beiden Endflächen $0 P$ dar. Die beiden Flächen $0 P$ sind positiv, die seitlichen Begrenzungen negativ, jedoch ist die elektrische Spannung auf den (in der Projection nicht sichtbaren, auf der hinteren Seite liegenden) Bruchflächen sehr schwach oder selbst unmerklich.

## VII. Krystalle von Utö.

Die Apophyllitkrystalle von Utö scheinen in ihren Formen ziemlich verschieden zu sein; während ein Theil derselben vorzugsweise quadratische Prismen darstellt, bildet ein anderer niedrige Tafeln.

Krystall No. 18. Taf. III, Fig. 18.

Der Fig. 18, Taf. III in seinem Netze dargestellte, der Freiberger Sammlung gehörige Krystall No. 18 ist fast nur von den Gestalten $\infty P \infty$ und $0 P$ begrenzt. Am oberen Ende findet sich eine natürliche, wenn auch durch Ansatz einer schwärzlichen Substanz in ihrer Mitte bei ihrer Ausbildung gestörte Endfläche; am unteren bildet zum Theil eine glatte Durchgangsfläche, zum Theil eine etwas rundliche Kuppe die Begrenzung.

Die Seitenflächen sowie die untere Durchgangsfläche sind negativ, die obere Endfläche positiv.

Krystall No. 19. Taf. III, Fig. 19.

Das der Freiberger Sammlung gehörige Bruchstück No. 19 ist ringsum von künstlich angeschlagenen Durchgangsflächen (parallel mit 0 P und mit ∞P∞) begrenzt. Ueber seine Lage im ursprünglichen Krystalle giebt kein äusseres Anzeichen irgend wie Andeutung. Aus der in dem Netze Fig. 19, Taf. III dargestellten elektrischen Vertheilung folgt, dass die in dem Netze am oberen Ende gezeichnete Fläche [0 P] nahe einer natürlichen Fläche 0 P gelegen haben muss, während die untere weiter von derselben entfernt gewesen ist.

Krystall No. 20. Taf. III, Fig. 20.

Der Fig. 20, Taf. III in seinem Netze abgebildete Krystall No. 20 gehört dem hiesigen mineralogischen Museum. Ein Fundort ist für ihn nicht angegeben; jedoch ist es mir nach Beschaffenheit seiner Masse nicht unwahrscheinlich, dass er von Utö stammt. Er stellt eine niedrige von den Flächen 0 P, P und ∞P∞ gebildete Tafel dar. Abweichend von den früher beschriebenen Gestalten bilden bei ihm die Flächen P durch ihren Durchschnitt auf der vorderen Seite eine lange horizontale Kante; an den drei übrigen entsprechenden Stellen sind diese Kanten verbrochen oder in ihrer Ausbildung gehemmt gewesen.

Ob die obere und untere Endfläche natürliche Krystallflächen sind, wage ich nicht mit Bestimmtheit zu entscheiden; es könnten mehr oder weniger dünne Blättchen abgesprengt sein. Auf beiden Flächen 0 P zeigt sich eine deutliche, mit den Flächen des Prismas ∞P∞ parallel gehende Streifung.

Während die obere Fläche 0 P zum grössten Theile positive Spannung besitzt, erscheint die untere fast in ihrer ganzen Ausdehnung negativ. Dagegen tritt positive Elektricität ziemlich stark auf den vorderen Flächen P, und in geringer Intensität auf der Bruchfläche der hinteren Seite auf. Die Flächen ∞P∞ sind negativ.

## VIII. Krystalle und krystallinisch-blätterige Massen aus dem Fassathale.

Die von mir untersuchten Krystalle und krystallinisch blätterigen Massen aus dem Fassathale sind, selbst in dünnen Blättchen von wenigen Millimetern Dicke stark elektrisch; die Spannung erreicht oft eine solche Höhe, dass das Goldblättchen des Elektrometers ganz aus dem Gesichtskreise des Mikroskopes hinausgetrieben wird.

### Krystall No. 21. Taf. III, Fig. 21.

Der Fig. 21, Taf. III in seinem Netze abgebildete Krystall gehört der Tübinger Sammlung. Es sind an ihm nur die beiden grossen Endflächen 0P, sowie vorn die Flächen P zum Theil und rechts daneben die Fläche $\infty P\infty$ ausgebildet. An den übrigen Seiten des Umfanges ist er verbrochen. Die an sich klare Grundmasse erscheint durch weissliche Streifen getrübt.

Der Krystall zeigt die gewöhnliche Vertheilung der Elektricität; die Endflächen 0P sind positiv, die seitlichen Begrenzungen aber negativ, mit Ausnahme der einen hinteren Bruchfläche, welche positive Spannung besitzt.

### Krystall No. 22. Taf. III, Fig. 22.

Das kleine Bruchstück No. 22, das ich von seinem Gestein abgebrochen hatte, ist in seiner Masse nur durchscheinend und etwas graulich gefärbt. Natürliche Flächen sind an ihm die obere und untere Endfläche 0P, und die vorn gelegene mit *ab* bezeichnete Fläche $\infty P\infty$. Die übrigen seitlichen Begrenzungen *bc*, *cd* und *de* werden von unregelmässigen Bruchflächen gebildet. Der Krystall scheint nach der Linie $\alpha\beta$ aus zweien zusammengesetzt zu sein; es geht eine Art Naht nach der Linie $\alpha\beta$, und bei $\alpha$ finden sich an beiden Stücken kleine Flächen P. An dem grösseren Stücke liegt auf der oberen Kante *ab* eine sehr schmale Fläche einer stumpfen tetragonalen Pyramide zweiter Art.

Das elektrische Verhalten dieses Bruchstückes, dessen Netz Fig. 22, Taf. III darstellt, ist eigenthümlich: in seinem gegenwärtigen

Zustande sind die beiden Endflächen negativ, mit Ausnahme einer kleinen Stelle auf der unteren; die eine vorhandene mit *ab* bezeichnete Fläche $\infty P \infty$ und die daranstossende Bruchfläche *bc* sind positiv, dagegen die hinten und die links von $\infty P \infty$ gelegenen Bruchflächen *cd* und *de* wieder negativ, mit Ausnahme des Theiles von *de*, welcher an die Fläche *ab* des Prismas $\infty P \infty$ grenzt.

Die Endflächen 0P und ebenso die eine vorhandene Fläche $\infty P \infty$ zeigen also gerade das entgegengesetzte Verhalten, wie die bisher beschriebenen Krystalle.

### Krystallinisch-blätterige Massen.

Spaltet man aus den blätterigen weissen oder weissröthlichen Massen Blätter von 2 bis 4 mm Dicke heraus, so zeigt sich auf den ungefähr in der Richtung des Hauptdurchganges liegenden grossen Flächen sehr starke elektrische Polarität. Ob dieselbe positiv oder negativ sein wird, lässt sich im Voraus nicht bestimmen, da die Lage des Bruchstückes zum Krystall, dem es angehört hat, nicht zu ermitteln ist. Auch auf den schmalen, seitlichen, meist unregelmässig verlaufenden Rändern kann eine ziemlich starke elektrische Intensität beobachtet werden.

---

**Druckfehler:**

S. 219, Z. 16 v. oben lies **dilaté** anstatt **dilat.**

---

UEBER DIE

# STÖRUNGEN DER GROSSEN PLANETEN,

INSBESONDERE

# DES JUPITER.

VON


**P. A. HANSEN,**

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.






**Des XI. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften**

N° IV.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1875.

Im Manuscript übergeben den 26. November 1874.
Der Abdruck vollendet den 31. Juli 1875.

# ÜBER

# DIE

# STÖRUNGEN DER GROSSEN PLANETEN

# INSBESONDERE

# DES JUPITER.

NACHGELASSENE ABHANDLUNG

VON

P. A. HANSEN.

## §. 1. Entwickelung der Störungsfunction und der partiellen Differentialquotienten derselben, die hier gebraucht werden.

1.

Es sollen die Bezeichnungen angewandt werden, die ich in meinen früheren Arbeiten über die Störungstheorie, insbesondere über die Störungen der kleinen Planeten, gebraucht habe, nemlich:

| | | |
|---|---|---|
| $g$ | ... | die mittlere Anomalie, |
| $f$ | ... | die wahre Anomalie, |
| $r$ | ... | der Radius Vector, |
| $nz$ | ... | die gestörte mittlere Anomalie oder mittlere Länge, |
| $\bar{r}(1+\nu)$ | | der gestörte Werth des Radius Vector, |
| $au$ | ... | die Störungen der Coordinate $Z$, die senkrecht auf der Fundamentalebene steht, |
| $\Omega$ | ... | die Störungsfunction, |
| $m$ | ... | die Masse, |
| $n$ | ... | die mittlere siderische Bewegung, |
| $a$ | ... | die halbe grosse Achse, |
| $e$ | ... | die Excentricität, |
| $\pi$ | ... | die Länge des Perihels, |
| $i$ | ... | die Neigung, |
| $\theta$ | ... | die Länge des aufsteigenden Knotens |

des gestörten Planeten, von welchen die drei zuletzt genannten Elemente auf eine feste Ebene und eine feste Linie in derselben bezogen werden müssen.

In Bezug auf den störenden Planeten sollen alle diese Grössen rechts oben mit einem Strich versehen werden.

Bezeichnet man ferner die Bahnebene des gestörten Planeten mit $XY$, und die des störenden mit $X'Y'$, nennt $\Phi$ den Bogen der $XY$-Ebene, der sich von dem aufsteigenden Knoten dieser Ebene auf der festen Fundamentalebene, auf welche $\pi$, $i$, $\theta$, $\pi'$, $i'$, $\theta'$ bezogen sind, bis zum aufsteigenden Knoten der $XY$-Ebene auf der $X'Y'$-Ebene erstreckt, $\Psi$ den Bogen, welcher sich von dem aufsteigenden Knoten der $X'Y'$-Ebene auf derselben Fundamentalebene bis zu demselben gegenseitigen Knoten erstreckt, und $J$ die Neigung zwischen den beiden Bahnebenen, so sind vor Allem $J$, $\Phi$, $\Psi$ entweder aus den Formeln

$$\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}J\sin\tfrac{1}{2}(\Psi+\Phi) &= \sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\sin\tfrac{1}{2}(i+i')\\
\sin\tfrac{1}{2}J\cos\tfrac{1}{2}(\Psi+\Phi) &= \cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\sin\tfrac{1}{2}(i-i')\\
\cos\tfrac{1}{2}J\sin\tfrac{1}{2}(\Psi-\Phi) &= \sin\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\cos\tfrac{1}{2}(i+i')\\
\cos\tfrac{1}{2}J\cos\tfrac{1}{2}(\Psi-\Phi) &= \cos\tfrac{1}{2}(\theta-\theta')\cos\tfrac{1}{2}(i-i')
\end{aligned}$$

oder, nach Belieben, aus den folgenden Gleichungen zu berechnen:

$$\begin{aligned}
\cos p\sin q &= \sin i'\cos(\theta-\theta')\\
\cos p\cos q &= \cos i'\\
\cos p\sin r &= \cos i'\sin(\theta-\theta')\\
\cos p\cos r &= \cos(\theta-\theta')\\
\sin p &= \sin i'\sin(\theta-\theta')
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin J\sin\Phi &= \sin p\\
\sin J\cos\Phi &= \cos p\sin(i-q)\\
\sin J\sin(\Psi-r) &= \sin p\cos(i-q)\\
\sin J\cos(\Psi-r) &= \sin(i-q)\\
\cos J &= \cos p\cos(i-q)
\end{aligned}$$

Setzt man hierauf

$$\Pi = \pi-\theta-\Phi,\qquad \Pi' = \pi'-\theta'-\Psi$$

so werden die Argumente der Breite des gestörten und des störenden Planeten

$$f+\Pi \quad\text{und}\quad f'+\Pi'$$

## 2.

Man hat bei der Anwendung der obigen Gaussischen Formeln, namentlich wenn es sich um einen Kometen handelte, Schwierigkeiten in der richtigen Bestimmung des Quadranten gefunden, in welchem die Bögen $\frac{1}{2}(\Psi+\Phi)$ und $\frac{1}{2}(\Psi-\Phi)$ zu nehmen sind; durch Anwendung der folgenden einfachen Betrachtungen fallen diese Schwierigkeiten ganz weg. Man braucht nur die Dreiecksseite $\theta-\theta'$ etwas anders wie die Winkel $i$ und $i'$ zu behandeln. Letztere muss man unverändert so beibehalten, wie sie sind, und demgemäss ihre halbe Summe und ihren halben Unterschied bilden. Es kann sich hierbei ereignen, dass $\frac{1}{2}(i-i')$ durch einen negativen Bogen dargestellt wird; dieser muss unverändert in der Rechnung angewandt werden*). Den Bogen $\theta-\theta'$ darf man aber nie negativ nehmen, sondern muss, wenn $\theta<\theta'$ ist, $\frac{1}{2}(360^0+\theta-\theta')$ statt $\frac{1}{2}(\theta-\theta')$ in der Rechnung anwenden.

Durch den Gebrauch dieser Regeln, Berücksichtigung der algebraischen Vorzeichen der trigonometrischen Functionen, und mit Rücksicht darauf, dass ohne Ausnahme $\sin\frac{1}{2}J$ und $\cos\frac{1}{2}J$ positiv werden müssen, sind die Quadranten, in denen $\frac{1}{2}(\Psi+\Phi)$ und $\frac{1}{2}(\Psi-\Phi)$ zu nehmen sind, völlig bestimmt. Ich füge noch hinzu, dass dieselben Regeln bei jeder anderen Anwendung dieser Gaussischen Formeln Geltung haben.

Zur Anwendung des zweiten obigen Systems von Formeln bemerke ich, dass, wenn man die Logarithmen der trigonometrischen Functionen der bekannten Bögen in der folgenden Ordnung unter einander hinschreibt:

$$\left.\begin{matrix}\cos(\theta-\theta')\\ \sin i'\\ \sin(\theta-\theta')\\ \cos i'\end{matrix}\right\}\text{ und bez. }\left\{\begin{matrix}\sin p\\ \cos(i-q)\\ \cos p\\ \sin(i-q)\end{matrix}\right.$$

man zunächst nur über oder unter einander stehende Logarithmen zu addiren hat.

---

*) Es versteht sich von selbst, dass bei einem rückläufigen Kometen $i>90^0$ ist.

3.

Es ist noch Folgendes anzumerken:

1) Wenn nicht nur die Störungen des Planeten $m$ durch $m'$, sondern auch die des Planeten $m'$ durch $m$ zu berechnen sind, so braucht man dem ungeachtet die obigen Formeln nur Ein Mal zu berechnen. Wählt man im zweiten Falle die Bezeichnungen wieder so, dass die dem gestörten Planeten zukommenden Grössen ohne Strich, und die dem störenden zukommenden mit einem Strich bezeichnet werden, mit anderen Worten, wechselt man die Bezeichnungen um, welches das Bequemste ist, da sonst in allen folgenden Ausdrücken die Bezeichnungen umgewechselt werden müssten, so hat man

$$180^0 + \Phi \text{ statt } \Psi$$
$$180^0 + \Psi \text{ statt } \Phi$$

zu schreiben, während $J$ unverändert beizubehalten ist. Es folgt hieraus, dass

$$\begin{array}{rcl} \Pi & \text{statt} & 180^0 + \Pi' \\ \Pi' & - & 180^0 + \Pi \\ \Pi - \Pi' & - & -(\Pi - \Pi') \\ 2\Pi & - & 2\Pi' \\ \Pi + \Pi' & - & \Pi + \Pi' \\ 2\Pi' & - & 2\Pi \end{array}$$

zu setzen sind.

2) Vorausgesetzt, dass man eine gewisse feste Ecliptik zur Fundamentalebene annimmt, wie gewöhnlich geschieht, so bietet die Erde, wenn sie als gestörter oder störender Planet eintritt, besondere Fälle dar.

a) Wenn die Erde störender Planet ist, so werden

$$i' = 0, \quad \theta' \text{ unbestimmt},$$

und hiemit geben die Ausdrücke des Art. 1

$$\begin{aligned} J &= i \\ \Phi &= 0 \\ \Pi &= \pi - \theta \\ \Pi' &= \pi' - \theta \end{aligned}$$

und $\Psi = \theta - \theta'$ unbestimmt. Dieser Bogen kommt aber in den unten zu entwickelnden Formeln gar nicht vor, nur $\Psi + \theta'$ kann bei gewissen Veränderlichen vorkommen, und nimmt einen bestimmten Werth an, denn dem Vorstehenden zufolge wird

$$\Psi + \theta' = \theta$$

b) Wenn die Erde gestörter Planet ist, dann werden

$$i = 0, \quad \theta \text{ unbestimmt.}$$

Verbindet man nun die unter a) erhaltenen Gleichungen mit den unter 2) abgeleiteten Verwandelungsformeln, so ergeben sich

$$\begin{aligned} J &= i' \\ \Psi &= 180^0 \\ \Pi &= 180^0 + \pi - \theta' \\ \Pi' &= 180^0 + \pi' - \theta' \end{aligned}$$

und es wird ferner $\Phi = 180^0 - \theta + \theta' =$ unbestimmt. Aber jetzt kann dieser Bogen in den Ausdrücken für die Störungen nicht vorkommen, sondern höchstens $\Phi + \theta$, und dieser ist bestimmt, nemlich

$$\Phi + \theta = 180^0 + \theta'$$

3) Wenn die zu berechnenden Störungen sehr klein sind und man sich in Folge dessen mit der Aufnahme der Glieder der niedrigsten Ordnung begnügen kann, so braucht man in der Regel die Bögen $\Pi$ und $\Pi'$ selbst nicht zu kennen, sondern nur deren Unterschied nebst der gegenseitigen Neigung $J$. In diesen Fällen kann man immer setzen

$$\Pi - \Pi' = \pi - \pi'$$

und $J$ aus der folgenden Formel berechnen

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} J = \sin^2 \tfrac{1}{2}(i - i') + \sin i \sin i' \sin^2 \tfrac{1}{2}(\theta - \theta')$$

## 4.

Die Störungsfunction nimmt den folgenden Ausdruck an

$$\Omega = \frac{m'}{1+m}\left\{\frac{1}{(r^2 + r'^2 - 2rr'H)^{\frac{1}{2}}} - \frac{r}{r'^2}H\right\}$$

in welchem $H$ den Cosinus des Winkels zwischen den beiden Radien $r$ und $r'$ bezeichnet, und für unseren Zweck auf die folgende Form gebracht werden kann:

$$H = \cos(f-f'+\Pi-\Pi')$$
$$+\sin^2\tfrac{1}{2}J\{\cos(f+f'+\Pi+\Pi')-\cos(f-f'+\Pi-\Pi')\}$$

Entwickelt man nun vorläufig $\Omega$ nach den Potenzen von $\sin^2\frac{1}{2}J$, und bleibt bei der ersten derselben stehen, da diess für das hier zu erreichende Ziel hinreicht, so bekommt man leicht, wenn man zur Abkürzung den Nenner $1+m$ weglässt, der später leicht ergänzt werden kann, wenn es nothwendig sein sollte,

$$\frac{\Omega}{m'} = \frac{1}{(r^2+r'^2-2rr'\cos(f-f'+\Pi-\Pi'))^{\frac{1}{2}}} - \frac{r}{r'^2}\cos(f-f'+\Pi-\Pi')$$
$$+\sin^2\tfrac{1}{2}J\,rr'\frac{\cos(f+f'+\Pi+\Pi')-\cos(f-f'+\Pi-\Pi')}{(r^2+r'^2-2rr'\cos(f-f'+\Pi-\Pi'))^{\frac{3}{2}}}$$
$$-\sin^2\tfrac{1}{2}J\frac{r}{r'^2}\{\cos(f+f'+\Pi+\Pi')-\cos(f-f'+\Pi-\Pi')\}$$

welcher Ausdruck bis auf Grössen vierter Ordnung (excl.) in Bezug auf die Excentricitäten $e$ und $e'$ und die Neigung $J$ entwickelt werden soll.

## 5.

Setzt man zur Abkürzung

$$K = \Pi-\Pi', \qquad \Gamma = g-g', \qquad G = \Gamma+K$$

und bezeichnet mit $i$ irgend eine ganze positive oder negative Zahl, die Null eingeschlossen, und setzt man ferner

$$\frac{1}{(a^2+a'^2-2aa'\cos G)^{\frac{1}{2}}} - \frac{a}{a'^2}\cos G = \Sigma'^{+\infty}_{-\infty} D_i\cos iG$$
$$\Omega = \Omega_0+\Omega_1\sin^2\tfrac{1}{2}J$$

so wie

$$r = a(1+x), \qquad f = g+y$$
$$r' = a'(1+x'), \qquad f' = g'+y'$$

so giebt das auf mehrere Unbekannte ausgedehnte TAYLOR'sche Theorem, wenn der Kürze wegen die Summenzeichen $\Sigma'$ weggelassen, und

$$D_i = (0,0)\,D_i$$
$$a\left(\frac{\partial D_i}{\partial a}\right) = (1,0)\,D_i, \qquad a'\left(\frac{\partial D_i}{\partial a'}\right) = (0,1)\,D_i$$
$$a^2\left(\frac{\partial^2 D_i}{\partial a^2}\right) = (2,0)\,D_i, \qquad aa'\left(\frac{\partial^2 D_i}{\partial a\,\partial a'}\right) = (1,1)\,D_i, \qquad a'^2\left(\frac{\partial^2 D_i}{\partial a'^2}\right) = (0,2)\,D_i$$

etc.

gesetzt werden:

$$
\begin{array}{rl}
\dfrac{\Omega_0}{m'} = & \left\{\begin{array}{ll} & (0,0)\,D_i \\ + & (1,0)\,D_i x \\ + & (0,1)\,D_i x' \end{array}\right\} \cos iG \\
& -\; i\,(0,0)\,D_i\,(y-y') \sin iG \\
+ & \left\{\begin{array}{ll} + & \frac{1}{2}\,(2,0)\,D_i x^2 \\ + & (1,1)\,D_i x x' \end{array}\right\} \cos iG \\
& -\; i\,(1,0)\,D_i x\,(y-y') \sin iG \\
& +\; \frac{1}{2}\,(0,2)\,D_i x'^2 \cos iG \\
& -\; i\,(0,1)\,D_i x'\,(y-y') \sin iG \\
+ & \left\{\begin{array}{ll} - & \frac{1}{2} i^2\,(0,0)\,D_i\,(y-y')^2 \\ + & \frac{1}{6}\,(3,0)\,D_i x^3 \\ + & \frac{1}{2}\,(2,1)\,D_i x^2 x' \end{array}\right\} \cos iG \\
& -\; \frac{1}{2} i\,(2,0)\,D_i x^2\,(y-y') \sin iG \\
& +\; \frac{1}{2}\,(1,2)\,D_i x x'^2 \cos iG \\
& -\; i\,(1,1)\,D_i x x'\,(y-y') \sin iG \\
+ & \left\{\begin{array}{ll} - & \frac{1}{2} i^2\,(1,0)\,D_i x\,(y-y')^2 \\ + & \frac{1}{6}\,(0,3)\,D_i x'^3 \end{array}\right\} \cos iG \\
& -\; \frac{1}{2} i\,(0,2)\,D_i x'^2\,(y-y') \sin iG \\
& -\; \frac{1}{2} i^2\,(0,1)\,D_i x'\,(y-y')^2 \cos iG \\
& +\; \frac{1}{6} i^3\,(0,0)\,D_i\,(y-y')^3 \sin iG
\end{array}
$$

bis auf Grössen vierter Ordnung vollständig.

## 6.

Die Function $\Omega_1$, in welcher nur die ersten Potenzen der Excentricitäten berücksichtigt zu werden brauchen, wird auf dieselbe Art behandelt. Setzt man

$$\frac{aa'}{(a^2+a'^2-2aa'\cos G)^{\frac{3}{2}}} - \frac{a}{a'^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} E_i \cos iG$$

so bekommt man zuerst

$$\frac{rr'}{(r^2+r'^2-2rr'\cos(f-f'+\Pi-\Pi'))^{\frac{3}{2}}} - \frac{r}{r'^2} = \left\{\begin{array}{ll} & (0,0)\,E_i \\ + & (1,0)\,E_i x \\ + & (0,1)\,E_i x' \end{array}\right\} \cos iG$$
$$-\; i\,(0,0)\,E_i\,(y-y') \sin iG$$

und dieser Ausdruck ist mit

$$\cos(f+f'+\Pi+\Pi') - \cos(f-f'+\Pi-\Pi') =$$
$$\cos(2g-G+2\Pi) - (y+y')\sin(2g-G+2\Pi) - \cos G + (y-y')\sin G$$

zu multipliciren. Zu dem Ende ist zu bemerken, dass wenn $M_i$ überhaupt eine Function von $i$ bezeichnet, die die Eigenschaft besitzt, dass

$$M_{-i} = M_i$$

wie hier bei den $D_i$ und $E_i$ der Fall ist, und die Summen von $i = -\infty$ bis $i = +\infty$ genommen werden, die folgenden Gleichungen stattfinden:

$$\begin{aligned}
\Sigma' M_i \cos(lG+L)\cos iG &= \Sigma' M_{i-l}\cos(iG+L)\\
\Sigma' M_i \sin(lG+L)\cos iG &= \Sigma' M_{i-l}\sin(iG+L)\\
\Sigma' i M_i \cos(lG+L)\sin iG &= \Sigma'(i-l)M_{i-l}\sin(iG+L)\\
\Sigma' i M_i \sin(lG+L)\sin iG &= -\Sigma'(i-l)M_{i-l}\cos(iG+L)
\end{aligned}$$

Durch Zuziehung dieser Gleichungen giebt das Vorhergehende ohne Mühe

$$\begin{aligned}
\frac{\Omega_1}{m'} = &\left\{\begin{array}{ll} & (0,0)\,E_{i+1} \\ + & (1,0)\,E_{i+1}\,x \\ + & (0,1)\,E_{i+1}\,x' \end{array}\right\}\cos(2g+iG+2\Pi)\\
&+\left\{\begin{array}{ll} - & (i+1)(0,0)\,E_{i+1}(y-y') \\ - & (0,0)\,E_{i+1}(y+y') \end{array}\right\}\sin(2g+iG+2\Pi)\\
&+\left\{\begin{array}{ll} - & (0,0)\,E_{i-1} \\ - & (1,0)\,E_{i-1}\,x \\ - & (0,1)\,E_{i-1}\,x' \end{array}\right\}\cos iG\\
&\quad + \; i(0,0)\,E_{i-1}(y-y')\sin iG
\end{aligned}$$

## 7.

Die Theorie der elliptischen Bewegung giebt in der hier erforderlichen Ausdehnung

$$x = \tfrac{1}{2}e^2 - (e - \tfrac{3}{8}e^3)\cos g - \tfrac{1}{2}e^2\cos 2g - \tfrac{3}{8}e^3\cos 3g$$

$$x' = \tfrac{1}{2}e'^2 - (e' - \tfrac{3}{8}e'^3)\cos(g-\Gamma) - \tfrac{1}{2}e'^2\cos(2g-2\Gamma) - \tfrac{3}{8}e'^3\cos(3g-3\Gamma)$$

$$y = (2e - \tfrac{1}{4}e^3)\sin g + \tfrac{5}{4}e^2\sin 2g + \tfrac{13}{12}e^3\sin 3g$$

$$y' = (2e' - \tfrac{1}{4}e'^3)\sin(g-\Gamma) + \tfrac{5}{4}e'^2\sin(2g-2\Gamma) + \tfrac{13}{12}e'^3\sin(3g-3\Gamma)$$

$$\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^3\cos g + \frac{1}{4}e^2\cos 2g + \frac{1}{4}e^3\cos 3g$$

$$\begin{aligned} xx' = {} & \frac{1}{2}ee'\cos\Gamma \\ & -\frac{1}{2}ee'^2\cos g + \frac{1}{4}e^2e'\cos(g+\Gamma) - \frac{1}{2}e^2e'\cos(g-\Gamma) + \frac{1}{4}ee'^2\cos(g-2\Gamma) \\ & +\frac{1}{2}ee'\cos(2g-\Gamma) \\ & +\frac{1}{4}e^2e'\cos(3g-\Gamma) + \frac{1}{4}e^2e'\cos(3g-2\Gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(y-y') = {} & -ee'\sin\Gamma \\ & +\frac{7}{8}e^3\sin g - \frac{1}{2}e^2e'\sin(g+\Gamma) - e^2e'\sin(g-\Gamma) + \frac{5}{8}ee'^2\sin(g-2\Gamma) \\ & -e^2\sin 2g + ee'\sin(2g-\Gamma) \\ & -\frac{9}{8}e^3\sin 3g + \frac{1}{2}e^2e'\sin(3g-\Gamma) + \frac{5}{8}ee'^2\sin(3g-2\Gamma) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}x'^2 = \frac{1}{4}e'^2 - \frac{1}{4}e'^3\cos(g-\Gamma) + \frac{1}{4}e'^2\cos(2g-2\Gamma) + \frac{1}{4}e'^3\cos(3g-3\Gamma)$$

$$\begin{aligned} x'(y-y') = {} & -ee'\sin\Gamma \\ & +ee'^2\sin g - \frac{5}{8}e^2e'\sin(g+\Gamma) - \frac{7}{8}e'^3\sin(g-\Gamma) + \frac{1}{2}ee'^2\sin(g-2\Gamma) \\ & -ee'\sin(2g-\Gamma) + e'^2\sin(2g-2\Gamma) \\ & -\frac{5}{8}e^2e'\sin(3g-\Gamma) - \frac{1}{2}ee'^2\sin(3g-2\Gamma) + \frac{9}{8}e'^3\sin(3g-3\Gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(y-y')^2 = {} & e^2 + e'^2 - 2ee'\cos\Gamma \\ & +\frac{5}{4}e^3\cos g - \frac{5}{4}e^2e'\cos(g+\Gamma) + \frac{5}{4}e'^3\cos(g-\Gamma) - \frac{5}{4}ee'^2\cos(g-2\Gamma) \\ & -e^2\cos 2g + 2ee'\cos(2g-\Gamma) - e'^2\cos(2g-2\Gamma) \\ & -\frac{5}{4}e^3\cos 3g + \frac{5}{4}e^2e'\cos(3g-\Gamma) + \frac{5}{4}ee'^2\cos(3g-2\Gamma) - \frac{5}{4}e'^3\cos(3g-3\Gamma) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{6}x^3 = -\frac{1}{8}e^3\cos g - \frac{1}{24}e^3\cos 3g$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2x' = {} & -\frac{1}{8}e^2e'\cos(g+\Gamma) - \frac{1}{4}e^2e'\cos(g-\Gamma) \\ & -\frac{1}{8}e^2e'\cos(3g-\Gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2(y-y') = {} & \frac{1}{4}e^3\sin g + \frac{1}{4}e^2e'\sin(g+\Gamma) - \frac{1}{2}e^2e'\sin(g-\Gamma) \\ & +\frac{1}{4}e^3\sin 3g - \frac{1}{4}e^2e'\sin(3g-\Gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}xx'^2 = {} & -\frac{1}{4}ee'^2\cos g - \frac{1}{8}ee'^2\cos(g-2\Gamma) \\ & -\frac{1}{8}ee'^2\cos(3g-2\Gamma) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} xx'(y-y') = {} & -\frac{1}{2}e^2e'\sin(g+\Gamma) - \frac{1}{2}ee'^2\sin(g-2\Gamma) \\ & +\frac{1}{2}e^2e'\sin(3g-\Gamma) - \frac{1}{2}ee'^2\sin(3g-2\Gamma) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}x(y-y')^2 = -(\frac{1}{2}e^3+ee'^2)\cos g + e^2e'\cos(g+\Gamma)+\frac{1}{2}ee'^2\cos(g-2\Gamma)$$
$$+\frac{1}{2}e^3\cos 3g - e^2e'\cos(3g-\Gamma)+\frac{1}{2}ee'^2\cos(3g-2\Gamma)$$
$$\frac{1}{6}x'^3 = -\frac{1}{8}e'^3\cos(g-\Gamma)-\frac{1}{24}e'^3\cos(3g-3\Gamma)$$
$$\frac{1}{2}x'^2(y-y') = \frac{1}{2}ee'^2\sin g - \frac{1}{4}e'^3\sin(g-\Gamma)-\frac{1}{4}ee'^2\sin(g-2\Gamma)$$
$$+\frac{1}{4}ee'^2\sin(3g-2\Gamma)-\frac{1}{4}e'^3\sin(3g-3\Gamma)$$
$$\frac{1}{2}x'(y-y')^2 = \frac{1}{2}e^2e'\cos(g+\Gamma)-(e^2e'+\frac{1}{2}e'^3)\cos(g-\Gamma)+ee'^2\cos(g-2\Gamma)$$
$$+\frac{1}{2}e^2e'\cos(3g-\Gamma)-ee'^2\cos(3g-2\Gamma)+\frac{1}{2}e'^3\cos(3g-3\Gamma)$$
$$\frac{1}{6}(y-y')^3 = (e^3+2ee'^2)\sin g - e^2e'\sin(g+\Gamma)-(2e^2e'+e'^3)\sin(g-\Gamma)+ee'^2\sin(g-2\Gamma)$$
$$-\frac{1}{3}e^3\sin 3g + e^2e'\sin(3g-\Gamma)-ee'^2\sin(3g-2\Gamma)+\frac{1}{3}e'^3\sin(3g-3\Gamma)$$

## 8.

Durch die Substitution der vorstehenden Entwickelungen in die Ausdrücke der Störungsfunction der Artt. 5 und 6 nimmt diese die folgende Form an:

$$\begin{aligned} a\Omega = \; & \Sigma(1)\cos(i(g-g')+iK) \\ & +(2)\cos(i(g-g')+(i+1)K) \\ & +(3)\cos(g+i(g-g')+iK) \\ & +(4)\cos(g+i(g-g')+(i+1)K) \\ & +(5)\cos(g+i(g-g')+(i-1)K) \\ & +(6)\cos(g+i(g-g')+(i+2)K) \\ & +(7)\cos(g+i(g-g')+iK+2\Pi) \\ & +(8)\cos(g+i(g-g')+(i-1)K+2\Pi) \\ & +(9)\cos(2g+i(g-g')+iK) \\ & +(10)\cos(2g+i(g-g')+(i+1)K) \\ & +(11)\cos(2g+i(g-g')+(i+2)K) \\ & +(12)\cos(2g+i(g-g')+iK+2\Pi) \\ & +(13)\cos(3g+i(g-g')+iK) \\ & +(14)\cos(3g+i(g-g')+(i+1)K) \\ & +(15)\cos(3g+i(g-g')+(i+2)K) \\ & +(16)\cos(3g+i(g-g')+(i+3)K) \\ & +(17)\cos(3g+i(g-g')+iK+2\Pi) \\ & +(18)\cos(3g+i(g-g')+(i+1)K+2\Pi) \end{aligned}$$

und wenn man sich erlaubt, die Indices (0, 0), (1, 0), (0, 1), etc. getrennt von den $D_i$ und $E_i$ zu schreiben, so ergeben sich für die Coefficienten des vorstehenden Ausdrucks die folgenden Werthe:

$$(1) = m'a\,(0,0)\,D_i$$
$$+\frac{1}{4}e^2\,m'a\,\{(2,0)+2\,(1,0)-4i^2(0,0)\}\,D_i$$
$$+\frac{1}{4}e'^2 m'a\,\{(0,2)+2\,(0,1)-4i^2(0,0)\}\,D_i$$
$$-\frac{1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'a\,(0,0)\,\{E_{i-1}+E_{i+1}\}$$

$$(2) = \frac{1}{2}e\,e'm'a\{(1,1)+2\,(i+1)\,(1,0)+2\,(i+1)\,(0,1)+4\,(i+1)^2(0,0)\}\,D_{i+1}$$

$$(3) = -e\,m'a\{(1,0)-2i(0,0)\}\,D_i$$
$$-\frac{1}{8}e^3\,m'a\{(3,0)-(2i-2)\,(2,0)-(4i^2+7i+3)\,(1,0)+(8i^3+10i^2+2i)\,(0,0)\}\,D_i$$
$$-\frac{1}{4}e\,e'^2\,m'a\{(1,2)+2\,(1,1)-2i(0,2)-4i^2(1,0)-4i\,(0,1)+8i^3(0,0)\}\,D_i$$
$$+\frac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'a\{(1,0)-2i(0,0)\}\,\{E_{i-1}+E_{i+1}\}$$

$$(4) = -e'm'a\{(0,1)+2\,(i+1)\,(0,0)\}\,D_{i+1}$$
$$-\frac{1}{4}e^2\,e'm'a\,\{(2,1)+2\,(i+1)\,(2,0)+2\,(1,1)+4\,(i+1)\,(1,0)-4\,(i+1)^2\,(0,1)-$$
$$-8\,(i+1)^3(0,0)\}\,D_{i+1}$$
$$-\frac{1}{8}e'^3\,m'a\,\{(0,3)+(2i+4)\,(0,2)-(4i^2+i)\,(0,1)-(8i^3+14i^2+6i)\,(0,0)\}\,D_{i+1}$$
$$+\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'a\,\{(0,1)+2\,(i+1)\,(0,0)\}\,\{E_i+E_{i+2}\}$$

$$(5) = -\frac{1}{8}e^2\,e'm'a\,\{(2,1)-2\,(i-1)\,(2,0)-(4i-2)\,(1,1)+(8i^2-12i+4)\,(1,0)+$$
$$+(4i^2-3i-1)\,(0,1)-(8i^3-14i^2+4i+2)\,(0,0)\}\,D_{i-1}$$

$$(6) = -\frac{1}{8}e\,e'^2\,m'a\,\{(1,2)+(4i+6)\,(1,1)+(2i+4)\,(0,2)+(4i^2+11i+6)\,(1,0)+$$
$$+(8i^2+28i+24)\,(0,1)+(8i^3+38i^2+56i+24)\,(0,0)\}\,D_{i+2}$$

$$(7) = -\frac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'a\,\{(1,0)+(2i+4)\,(0,0)\}\,E_{i+1}$$

$$(8) = -\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'a\,\{(0,1)-(2i-2)\,(0,0)\}\,E_i$$

$$(9) = \frac{1}{4}e^2\,m'a\{(2,0)-(4i+2)\,(1,0)+(4i^2+5i)\,(0,0)\}\,D_i$$

$$(10) = \frac{1}{2}e\,e'\,m'a\{(1,1)+2\,(i+1)\,(1,0)-2\,(i+1)\,(0,1)-4\,(i+1)^2(0,0)\}\,D_{i+1}$$

$$(11) = \frac{1}{4}e'^2\,m'a\{(0,2)+(4i+6)\,(0,1)+(4i^2+11i+6)\,(0,0)\}\,D_{i+2}$$

$$(12) = \sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'a\,(0,0)\,E_{i+1}$$

$$(13) = -\frac{1}{24}e^3\,m'a\,\{(3,0)-(6i+6)\,(2,0)+(12i^2+27i+9)\,(1,0)-$$
$$-(8i^3+30i^2+26i)\,(0,0)\}\,D_i$$

$$(14) = -\frac{1}{8}e^2\,e'm'a\,\{(2,1)+2\,(i+1)\,(2,0)-(4i+6)\,(1,1)-(8i^2+20i+12)\,(1,0)+$$
$$+(4i^2+13i+9)\,(0,1)+(8i^3+34i^2+44i+18)\,(0,0)\}\,D_{i+1}$$

$$(15) = -\frac{1}{8}ee'^2m'a\{(1,2)+(4i+6)(1,1)-(2i+4)(0,2)+(4i^2+11i+6)(1,0)- \\ -(8i^2+28i+24)(0,1)-(8i^3+38i^2+56i+24)(0,0)\}D_{i+2}$$

$$(16) = -\frac{1}{24}e'^3m'a\{(0,3)+(6i+12)(0,2)+(12i^2+45i+36)(0,1)+ \\ +(8i^3+42i^2+62i+24)(0,0)\}D_{i+3}$$

$$(17) = -\frac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'a\{(1,0)-(2i+4)(0,0)\}E_{i+1}$$

$$(18) = -\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'a\{(0,1)+(2i+2)(0,0)\}E_{i+2}$$

## 9.

Um die im vorigen Artikel erhaltenen Ausdrücke zu vereinfachen, dienen die folgenden Betrachtungen. Sei

$$\alpha = \frac{a}{a'}$$

dann erhalten wir aus dem Art. 5

$$\frac{\alpha}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos G)^{\frac{1}{2}}} - \alpha^2\cos G = \alpha\sum_{-\infty}^{+\infty} D_i \cos iG$$

Setzt man aber

$$\frac{1}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos G)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_i \cos iG$$

so ergiebt sich die Gleichung

$$a\sum_{-\infty}^{+\infty} D_i \cos iG = \alpha\sum_{-\infty}^{+\infty} A_i \cos iG - \alpha^2\cos G$$

oder es wird allgemein

$$aD_i = \alpha A_i$$

mit der Ausnahme, dass

$$aD_1 = \alpha A_1 - \frac{1}{2}\alpha^2$$

wird. Wendet man nun die folgende, abgekürzte Bezeichnung an, die der schon oben eingeführten analog ist

$$A_i = (0)A_i$$

$$\alpha\left(\frac{\partial A_i}{\partial \alpha}\right) = (1)A_i$$

$$\alpha^2\left(\frac{\partial^2 A_i}{\partial \alpha^2}\right) = (2)A_i$$

etc.

so erhält man aus der vorstehenden allgemeinen Relation und deren Differentialen:

$$
\begin{aligned}
a\,(0,0)\,D_i &= \quad \alpha\,(0)\,A_i \\
a\,(1,0)\,D_i &= \quad \alpha\,(1)\,A_i \\
a\,(0,1)\,D_i &= -\alpha\,(1)\,A_i - \alpha\,(0)\,A_i \\
a\,(2,0)\,D_i &= \quad \alpha\,(2)\,A_i \\
a\,(1,1)\,D_i &= -\alpha\,(2)\,A_i - 2\,\alpha\,(0)\,A_i \\
a\,(0,2)\,D_i &= \quad \alpha\,(2)\,A_i + 4\,\alpha\,(1)\,A_i + 2\,\alpha\,(0)\,A_i \\
a\,(3,0)\,D_i &= \quad \alpha\,(3)\,A_i \\
a\,(2,1)\,D_i &= -\alpha\,(3)\,A_i - 3\,\alpha\,(2)\,A_i \\
a\,(1,2)\,D_i &= \quad \alpha\,(3)\,A_i + 6\,\alpha\,(2)\,A_i + 6\,\alpha\,(1)\,A_i \\
a\,(0,3)\,D_i &= -\alpha\,(3)\,A_i - 9\,\alpha\,(2)\,A_i - 18\,\alpha\,(1)\,A_i - 6\,\alpha\,(0)\,A_i
\end{aligned}
$$

Die Differentiation der obigen Ausnahmerelation giebt zu erkennen, dass dieselbe vollständig berücksichtigt wird, wenn man überall

$$
\begin{aligned}
&(0)\,A_1 - \tfrac{1}{2}\alpha \quad \text{statt} \quad (0)\,A_1 \\
&(1)\,A_1 - \tfrac{1}{2}\alpha \quad\quad \text{-} \quad\quad (1)\,A_1
\end{aligned}
$$

anwendet.

Ferner bekommt man aus dem Art. 5

$$\frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2-2\,\alpha\cos G)^{\frac{3}{2}}} - \alpha^2 = a \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' E_i \cos iG$$

und setzt man jetzt

$$\frac{1}{(1+\alpha^2-2\,\alpha\cos G)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' B_i \cos iG$$

so ergiebt sich allgemein

$$a\,E_i = \alpha^2 B_i$$

mit der Ausnahme, dass

$$a\,E_0 = \alpha^2 B_0 - \alpha^2$$

wird. Führt man ähnliche Abkürzungen in der Bezeichnung ein, wie oben, nemlich

$$
\begin{aligned}
\alpha\,B_i &= (0)\,B_i \\
\alpha^2\left(\frac{\partial B_i}{\partial \alpha}\right) &= (1)\,B_i
\end{aligned}
$$

so giebt die vorstehende allgemeine Relation:

$$
\begin{aligned}
a\,(0,0)\,E_i &= \quad \alpha\,(0)\,B_i \\
a\,(1,0)\,E_i &= \quad \alpha\,(1)\,B_i + \alpha\,(0)\,B_i \\
a\,(0,1)\,E_i &= -\alpha\,(1)\,B_i - 2\,\alpha\,(0)\,B_i
\end{aligned}
$$

und die Ausnahmerelation wird vollständig dadurch berücksichtigt, dass man allenthalben

$$(0)\,B_0 - \alpha \quad \text{statt} \quad (0)\,B_0$$

anwendet.

## 10.

Machen wir nun von den im vorigen Artikel entwickelten Umformungen Gebrauch, so gehen die Ausdrücke der Coefficienten von $a\Omega$ in die folgenden über:

$$(1) = m'\alpha(0)A_i + \frac{1}{4}(e^2+e'^2)m'\alpha\{(2)+2(1)-4i^2(0)\}A_i$$
$$-\frac{1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha(0)\{B_{i-1}+B_{i+1}\}$$

$$(2) = -\frac{1}{2}ee'm'\alpha\{(2)+2(1)-(4i^2+6i+2)(0)\}A_{i+1}$$

$$(3) = -e\,m'\alpha\{(1)-2i(0)\}A_i$$
$$-\frac{1}{8}e^3m'\alpha\{(3)-(2i-2)(2)-(4i^2+7i+3)(1)+(8i^3+10i^2+2i)(0)\}A_i$$
$$-\frac{1}{4}ee'^2m'\alpha\{(3)-(2i-4)(2)-(4i^2+4i-2)(1)+8i^3(0)\}A_i$$
$$+\frac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)-(2i-1)(0)\}\{B_{i-1}+B_{i+1}\}$$

$$(4) = e'm'\alpha\{(1)-(2i+1)(0)\}A_{i+1}$$
$$+\frac{1}{4}e^2e'm'\alpha\{(3)-(2i-3)(2)-(4i^2+12i+4)(1)+(8i^3+20i^2+16i+4)(0)\}A_{i+1}$$
$$+\frac{1}{8}e'^3m'\alpha\{(3)-(2i-5)(2)-(4i^2+9i-2)(1)+(8i^3+10i^2+i-2)(0)\}A_{i+1}$$
$$-\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)-2i(0)\}\{B_i+B_{i+2}\}$$

$$(5) = \frac{1}{8}e^2e'm'\alpha\{(3)-(2i-3)(2)-(4i^2-i+1)(1)+(8i^3-10i^2+i+1)(0)\}A_{i-1}$$

$$(6) = -\frac{1}{8}ee'^2m'\alpha\{(3)-(2i-4)(2)-(4i^2+17i+8)(1)+(8i^3+30i^2+32i+8)(0)\}A_{i+2}$$

$$(7) = -\frac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+(2i+5)(0)\}B_{i+1}$$

$$(8) = \frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+2i(0)\}B_i$$

$$(9) = \frac{1}{4}e^2m'\alpha\{(2)-(4i+2)(1)+(4i^2+5i)(0)\}A_i$$

$$(10) = -\frac{1}{2}ee'm'\alpha\{(2)-(4i+2)(1)+(4i^2+6i+2)(0)\}A_{i+1}$$

$$(11) = \frac{1}{4}e'^2m'\alpha\{(2)-(4i+2)(1)+(4i^2+7i+2)(0)\}A_{i+2}$$

$$(12) = \sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha(0)B_{i+1}$$

$$(13) = -\frac{1}{24}e^3 m'\alpha \{(3)-(6i+6)(2)+(12i^2+27i+9)(1)-(8i^3+30i^2+26i)(0)\} A_i$$

$$(14) = \frac{1}{8}e^2 e' m'\alpha \{(3)-(6i+5)(2)+(12i^2+25i+9)(1)-(8i^3+30i^2+31i+9)(0)\} A_{i+1}$$

$$(15) = -\frac{1}{8}ee'^2 m'\alpha \{(3)-(6i+4)(2)+(12i^2+23i+8)(1)-(8i^3+30i^2+32i+8)(0)\} A_{i+2}$$

$$(16) = \frac{1}{24}e'^3 m'\alpha \{(3)-(6i+3)(2)+(12i^2+21i+6)(1)-(8i^3+30i^2+29i+6)(0)\} A_{i+3}$$

$$(17) = -\frac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(1)-(2i+3)(0)\} B_{i+1}$$

$$(18) = \frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(1)-2i(0)\} B_{i+2}$$

## 11.

Ausser $\Omega$ selbst wird im Folgenden auch das mit $r$ multiplicirte Differential von $\Omega$ nach $r$ gebraucht werden, weshalb die Coefficienten dieses Differentials sogleich abgeleitet werden sollen. Man findet durch das Vorhergehende leicht, dass

$$r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) = a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial a}\right) = \alpha\left(\frac{\partial\Omega}{\partial \alpha}\right)$$

ist, wodurch die verlangten Coefficienten ohne Mühe erhalten werden können. Da aber $a\Omega$ statt $\Omega$ entwickelt worden ist, so ist zu bemerken, dass bei der Differentiation von $a\Omega$ das $\alpha$, welches in jedem Coefficienten als Factor von $m'\alpha$ vorkommt, constant gesetzt werden muss, indem dieses $\alpha$ dem Factor $a$ von $\Omega$ entspricht, der unter der Differentiation nicht einbegriffen werden darf. Setzt man nun

$$\begin{aligned} ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) = \; & \Sigma (1)'\cos(i(g-g')+iK) \\ & + (2)'\cos(i(g-g')+(i+1)K) \\ & + (3)'\cos(g+i(g-g')+iK) \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

wie oben im Ausdruck von $a\Omega$ des Art. 8, so bekommt man:

$$\begin{aligned}(1)' = \; & m'\alpha(1)A_i + \frac{1}{4}(e^2+e'^2)m'\alpha\{(3)+4(2)-(4i^2-2)(1)\}A_i \\ & -\frac{1}{2}\sin^2\frac{1}{2}Jm'\alpha\{(1)+(0)\}\{B_{i-1}+B_{i+1}\}\end{aligned}$$

$$(2)' = -\frac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)+4(2)-(4i^2+6i)(1)\}A_{i+1}$$

$$(3)' = -em'\alpha\{(2)-(2i-1)(1)\}A_i$$
$$-\frac{1}{8}e^3m'\alpha\{(4)-(2i-5)(3)-(4i^2+11i-1)(2)+(8i^3+6i^2-5i-3)(1)\}A_i$$
$$-\frac{1}{4}ee'^2m'\alpha\{(4)-(2i-7)(3)-(4i^2+8i-10)(2)+(8i^3-4i^2-4i+2)(1)\}A_i$$
$$+\frac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)-(2i-3)(1)-(2i-1)(0)\}\{B_{i-1}+B_{i+1}\}$$

$$(4)' = e'm'\alpha\{(2)-2i(1)\}A_{i+1}$$
$$+\frac{1}{4}e^2e'm'\alpha\{(4)-(2i-6)(3)-(4i^2+16i-2)(2)+(8i^3+16i^2+4i)(1)\}A_{i+1}$$
$$+\frac{1}{8}e'^3m'\alpha\{(4)-(2i-8)(3)-(4i^2+13i-12)(2)+(8i^3+6i^2-8i)(1)\}A_{i+1}$$
$$-\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)-(2i-2)(1)-2i(0)\}\{B_i+B_{i+2}\}$$

$$(5)' = \frac{1}{8}e^2e'm'\alpha\{(4)-(2i-6)(3)-(4i^2+3i-5)(2)+(8i^3-14i^2+2i)(1)\}A_{i-1}$$

$$(6)' = -\frac{1}{8}ee'^2m'\alpha\{(4)-(2i-7)(3)-(4i^2+21i)(2)+(8i^3+26i^2+15i)(1)\}A_{i+2}$$

$$(7)' = -\frac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)+(2i+7)(1)+(2i+5)(0)\}B_{i+1}$$

$$(8)' = \frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)+(2i+2)(1)+2i(0)\}B_i$$

$$(9)' = \frac{1}{4}e^2m'\alpha\{(3)-4i(2)+(4i^2+i-2)(1)\}A_i$$

$$(10)' = -\frac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)-4i(2)+(4i+2i)(1)\}A_{i+1}$$

$$(11)' = \frac{1}{4}e'^2m'\alpha\{(3)-4i(2)+(4i^2+3i)(1)\}A_{i+2}$$

$$(12)' = \sin^2\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(1)+(0)\}B_{i+1}$$

$$(13)' = -\frac{1}{24}e^3m'\alpha\{(4)-(6i+3)(3)+(12i^2+15i-3)(2)-(8i^3+18i^2-i-9)(1)\}A_i$$

$$(14)' = \frac{1}{8}e^2e'm'\alpha\{(4)-(6i+2)(3)+(12i^2+13i-1)(2)-(8i^3+18i^2+6i)(1)\}A_{i+1}$$

$$(15)' = -\frac{1}{8}ee'^2m'\alpha\{(4)-(6i+1)(3)+(12i^2+11i)(2)-(8i^3+18i^2+9i)(1)\}A_{i+2}$$

$$(16)' = \frac{1}{24}e'^3m'\alpha\{(4)-6i(3)+(12i^2+9i)(2)-(8i^3+18i^2+8i)(1)\}A_{i+3}$$

$$(17)' = -\frac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)-(2i+1)(1)-(2i+3)(0)\}B_{i+1}$$

$$(18)' = \frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)-(2i-2)(1)-2i(0)\}B_{i+2}$$

## 12.

Zur Entwickelung der Störungen der dritten Coordinate wird der Differentialquotient der Störungsfunction nach $Z$ erfordert. Man könnte denselben durch Differentiation von $\Omega$ nach $J$, $\Pi$, $\Pi'$ ableiten, aber um die Grössen dritter Ordnung auch hier zu er-

halten, müsste $\Omega$ um eine Ordnung weiter entwickelt werden. Ich werde indess hier weiter gehen und den genannten Differentialquotienten bis auf Grössen fünfter Ordnung vollständig entwickeln, wodurch man in den Stand gesetzt wird, die Breitenstörungen des Jupiters und am Ende auch die des Saturns vollständig erhalten zu können. Freilich hätten für diesen Zweck einige Glieder der vierten Ordnung ausgereicht, aber da diese Ordnung nicht ganz übergangen werden kann, so habe ich für dienlich erachtet, etwaiger anderer Anwendungen wegen, sie vollständig zu berücksichtigen.

## 13.

Den genannten Differentialquotienten habe ich in der ersten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten abgeleitet und den folgenden Ausdruck dafür erhalten

$$\left(\frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right) = -m'\left(\frac{1}{\Delta^3}-\frac{1}{r'^3}\right)\sin J r'\sin(f'+\Pi')$$

wo $\Delta$ den gegenseitigen Abstand des störenden und des gestörten Planeten bedeutet. Da dieser Ausdruck $\sin J$ zum allgemeinen Factor hat, so braucht man, um die Glieder vierter Ordnung zu erhalten, nur bis zu den Gliedern dritter Ordnung einschliesslich von $e$, $e'$, $\sin\frac{1}{2}J$ zu gehen. Die erste Entwickelung giebt

$$\frac{1}{m'\sin J}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right) = -\frac{r'\sin(f'+\Pi')}{(r^2+r'^2-2rr'\cos(f-f'+\Pi-\Pi'))^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{r'^2}\sin(f'+\Pi')$$
$$-\frac{3}{2}\sin^2\frac{1}{2}J\,r\,r'^2\frac{\sin(f+2f'+\Pi+2\Pi')-2\sin(f+\Pi)-\sin(-f+2f'-\Pi+2\Pi')}{(r^2+r'^2-2rr'\cos(f-f'+\Pi-\Pi'))^{\frac{5}{2}}}$$

und setzt man daher dem Art. 5 analog

$$\frac{a'}{(a^2+a'^2-2aa'\cos G)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{a'^2} = \sum_{-\infty}^{+\infty} E_i\cos iG$$
$$\frac{aa'^2}{(a^2+a'^2-2aa'\cos G)^{\frac{5}{2}}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} F_i\cos iG$$

so bekommt man zuerst bis auf die hier verlangte Genauigkeit:

$$\frac{r'}{(r^2+r'^2-2rr'\cos(f-f'+\Pi-\Pi'))^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{r'^2} =$$
$$\left\{\begin{array}{l} \quad (0,0)\,E_i \\ +\ (1,0)\,E_i x \\ +\ (0,1)\,E_i x' \end{array}\right\}\cos iG$$
$$-\,i\,(0,0)\,E_i'(y-y')\sin iG$$

$$+\left\{\begin{array}{l}+\frac{1}{2}(2,0)\,E_i x^2\\ +\quad(1,1)\,E_i x x'\end{array}\right\}\cos iG$$
$$-i(1,0)\,E_i x\,(y-y')\sin iG$$
$$+\frac{1}{2}(0,2)\,E_i x'^2\cos iG$$
$$-i(0,1)\,E_i x'(y-y')\sin iG$$
$$+\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{2}i^2(0,0)\,E_i(y-y')^2\\ +\frac{1}{6}(3,0)\,E_i x^3\\ +\frac{1}{2}(2,1)\,E_i x^2 x'\end{array}\right\}\cos iG$$
$$-\frac{1}{2}i\,(2,0)\,E_i x^2(y-y')\sin iG$$
$$+\frac{1}{2}(1,2)\,E_i x x'^2\cos iG$$
$$-i(1,1)\,E_i x x'(y-y')\sin iG$$
$$+\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{2}i^2(1,0)\,E_i x\,(y-y')^2\\ +\frac{1}{6}(0,3)\,E_i x'^3\end{array}\right\}\cos iG$$
$$-\frac{1}{2}i\,(0,2)\,E_i x'^2(y-y')\sin iG$$
$$-\frac{1}{2}i^2(0,1)\,E_i x'(y-y')^2\cos iG$$
$$+\frac{1}{6}i^3(0,0)\,E_i(y-y')^3\sin iG$$

$$\frac{a a'^2}{(r^2+r'^2-2rr'\cos(f-f'+\Pi-\Pi'))^{\frac{3}{2}}}=$$
$$\left\{\begin{array}{l}\quad(0,0)\,F_i\\ +(1,0)\,F_i x\\ +(0,1)\,F_i x'\end{array}\right\}\cos iG$$
$$-i(0,0)\,F_i(y-y')\sin iG$$

## 14.

Da ferner

$$\begin{aligned}\sin(f'+\Pi') &= \sin(g-G+\Pi)\\ &\quad+y'\cos(g-G+\Pi)\\ &\quad-\frac{1}{2}y'^2\sin(g-G+\Pi)\\ &\quad-\frac{1}{6}y'^3\cos(g-G+\Pi)\\ -\sin(f+\Pi) &= -\sin(g+\Pi)\\ &\quad-y\cos(g+\Pi)\\ -\sin(-f+2f'-\Pi+2\Pi') &= -\sin(g-2G+\Pi)\\ &\quad+(y-2y')\cos(g-2G+\Pi)\\ \sin(f+2f'+\Pi+2\Pi') &= \sin(3g-2G+3\Pi)\\ &\quad+(y+2y')\cos(3g-2G+3\Pi)\end{aligned}$$

so giebt die Multiplication mit Rücksicht auf die Sätze des Art. 4:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{m'\sin J}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right) = & \left\{\begin{array}{l} (0,0)\,E_{i+1} \\ +(1,0)\,E_{i+1}x \\ +(0,1)\,E_{i+1}x' \end{array}\right\}\sin(g+iG+\Pi) \\
& +(i+1)(0,0)\,E_{i+1}(y-y')\cos(g+iG+\Pi) \\
& +\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{2}(2,0)\,E_{i+1}x^2 \\ +\phantom{\frac{1}{2}}(1,1)\,E_{i+1}xx' \end{array}\right\}\sin(g+iG+\Pi) \\
& +(i+1)(1,0)\,E_{i+1}x(y-y')\cos(g+iG+\Pi) \\
& +\frac{1}{2}(0,2)\,E_{i+1}x'^2\sin(g+iG+\Pi) \\
& +(i+1)(0,1)\,E_{i+1}x'(y-y')\cos(g+iG+\Pi) \\
& +\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}(i+1)^2(0,0)\,E_{i+1}(y-y')^2 \\ +\frac{1}{6}(3,0)\,E_{i+1}x^3 \\ +\frac{1}{2}(2,1)\,E_{i+1}x^2x' \end{array}\right\}\sin(g+iG+\Pi) \\
& +\frac{1}{2}(i+1)(2,0)\,E_{i+1}x^2(y-y')\cos(g+iG+\Pi) \\
& +\frac{1}{2}(1,2)\,E_{i+1}xx'^2\sin(g+iG+\Pi) \\
& -(i+1)(1,1)\,E_{i+1}xx'(y-y')\cos(g+iG+\Pi) \\
& +\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}(i+1)^2(1,0)\,E_{i+1}x(y-y')^2 \\ +\frac{1}{6}(0,3)\,E_{i+1}x'^3 \end{array}\right\}\sin(g+iG+\Pi) \\
& +\frac{1}{2}(i+1)(0,2)\,E_{i+1}x'^2(y-y')\cos(g+iG+\Pi) \\
& -\frac{1}{2}(i+1)^2(0,1)\,E_{i+1}x'(y-y')^2\sin(g+iG+\Pi) \\
& -\frac{1}{6}(i+1)^3(0,0)\,E_{i+1}(y-y')^3\cos(g+iG+\Pi) \\
& +\left\{\begin{array}{l} +(0,0)\,E_{i+1}y' \\ +(1,0)\,E_{i+1}xy' \\ +(0,1)\,E_{i+1}x'y' \end{array}\right\}\cos(g+iG+\Pi) \\
& -(i+1)(0,0)\,E_{i+1}(y-y')\,y'\sin(g+iG+\Pi) \\
& +\left\{\begin{array}{l} +\frac{1}{2}(2,0)\,E_{i+1}x^2y' \\ +\phantom{\frac{1}{2}}(1,1)\,E_{i+1}xx'y' \end{array}\right\}\cos(g+iG+\Pi) \\
& -(i+1)(1,0)\,E_{i+1}x(y-y')\,y'\sin(g+iG+\Pi) \\
& +\frac{1}{2}(0,2)\,E_{i+1}x'^2y'\cos(g+iG+\Pi) \\
& -(i+1)(0,1)\,E_{i+1}x'(y-y')\,y'\sin(g+iG+\Pi) \\
& -\frac{1}{2}(i+1)^2(0,0)\,E_{i+1}(y-y')^2y'\cos(g+iG+\Pi)
\end{aligned}
$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{2}(0,0)\,E_{i+1}y'^2\\ -\frac{1}{2}(1,0)\,E_{i+1}xy'^2\\ -\frac{1}{2}(0,1)\,E_{i+1}x'y'^2\end{array}\right\}\sin(g+iG+\Pi)$$

$$-\frac{1}{2}(i+1)(0,0)\,E_{i+1}(y-y')\,y'^2\cos(g+iG+\Pi)$$

$$-\frac{1}{6}(0,0)\,E_{i+1}y'^3\cos(g+iG+\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-3\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(0,0)\,F_i\\ -3\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(1,0)\,F_ix\\ -3\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(0,1)\,F_ix'\end{array}\right\}\sin(g+iG+\Pi)$$

$$-3\sin^2\tfrac{1}{2}J\,i\,(0,0)\,F_i(y-y')\cos(g+iG+\Pi)$$

$$-3\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(0,0)\,F_iy\cos(g+iG+\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-\frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(0,0)\,F_{i+2}\\ -\frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(1,0)\,F_{i+2}x\\ -\frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(0,1)\,F_{i+2}x'\end{array}\right\}\sin(g+iG+\Pi)$$

$$-\frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(i+2)(0,0)\,F_{i+2}(y-y')\cos(g+iG+\Pi)$$

$$+\frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(0,0)\,F_{i+2}(y-2y')\cos(g+iG+\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{l}+\frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(0,0)\,F_{i+2}\\ +\frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(1,0)\,F_{i+2}x\\ +\frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(0,1)\,F_{i+2}x'\end{array}\right\}\sin(3g+iG+3\Pi)$$

$$+\frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(i+2)(0,0)\,F_{i+2}(y-y')\cos(3g+iG+3\Pi)$$

$$+\frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(0,0)\,F_{i+2}(y+2y')\cos(3g+iG+3\Pi)$$

## 15.

Durch die Substitution der im Art. 7 gegebenen Werthe von $x$, $x'$, $y$, $y'$ und deren Potenzen, welchen die folgenden hinzuzufügen sind:

$$\begin{aligned}xy' = {} & ee'\sin\Gamma\\ & +\tfrac{1}{2}e^2e'\sin(g+\Gamma)+e^2e'\sin(g-\Gamma)-\tfrac{5}{8}ee'^2\sin(g-2\Gamma)\\ & -ee'\sin(2g-\Gamma)\\ & -\tfrac{1}{2}e^2e'\sin(3g-\Gamma)-\tfrac{5}{8}ee'^2\sin(3g-2\Gamma)\end{aligned}$$

$$x'y' = \frac{7}{8}e'^3 \sin(g-\Gamma) - e'^2 \sin(2g-2\Gamma) - \frac{9}{8}e'^3 \sin(3g-3\Gamma)$$

$$(y-y')y' = -2e'^2 + 2ee'\cos\Gamma$$
$$+\frac{5}{4}e^2e'\cos(g+\Gamma) - \frac{5}{2}e'^3\cos(g-\Gamma) + \frac{5}{4}ee'^2\cos(g-2\Gamma)$$
$$-2ee'\cos(2g-\Gamma) + 2e'^2\cos(2g-2\Gamma)$$
$$-\frac{5}{4}e^2e'\cos(3g-\Gamma) - \frac{5}{4}ee'^2\cos(3g-2\Gamma) + \frac{5}{2}e'^3\cos(3g-3\Gamma)$$

$$\frac{1}{2}x^2y' = -\frac{1}{4}e^2e'\sin(g+\Gamma) + \frac{1}{2}e^2e'\sin(g-\Gamma)$$
$$+\frac{1}{4}e^2e'\sin(3g-\Gamma)$$

$$xx'y' = \frac{1}{2}ee'^2\sin(g-2\Gamma) + \frac{1}{2}ee'^2\sin(3g-2\Gamma)$$

$$x(y-y')y' = 2ee'^2\cos g - e^2e'\cos(g+\Gamma) - ee'^2\cos(g-2\Gamma)$$
$$+e^2e'\cos(3g-\Gamma) - ee'^2\cos(3g-2\Gamma)$$

$$\frac{1}{2}x'^2y' = \frac{1}{4}e'^3\sin(g-\Gamma) + \frac{1}{4}e'^3\sin(3g-3\Gamma)$$

$$x'(y-y')y' = e'^3\cos(g-\Gamma) - ee'^2\cos(g-2\Gamma)$$
$$+ee'^2\cos(3g-2\Gamma) - e'^3\cos(3g-3\Gamma)$$

$$\frac{1}{2}(y-y')^2y' = -4ee'^2\sin g + e^2e'\sin(g+\Gamma) + (2e^2e' + 3e'^3)\sin(g-\Gamma) - 2ee'^2\sin(g-2\Gamma)$$
$$-e^2e'\sin(3g-\Gamma) + 2ee'^2\sin(3g-2\Gamma) - e'^3\sin(3g-3\Gamma)$$

$$\frac{1}{2}y'^2 = e'^2 + \frac{5}{4}e'^3\cos(g-\Gamma) - e'^2\cos(2g-2\Gamma) - \frac{5}{4}e'^3\cos(3g-3\Gamma)$$

$$\frac{1}{2}xy'^2 = -ee'^2\cos g + \frac{1}{2}ee'^2\cos(g-2\Gamma)$$
$$+\frac{1}{2}ee'^2\cos(3g-2\Gamma)$$

$$\frac{1}{2}x'y'^2 = -\frac{1}{2}e'^3\cos(g-\Gamma) + \frac{1}{2}e'^3\cos(3g-3\Gamma)$$

$$\frac{1}{2}(y-y')y'^2 = 2ee'^2\sin g - 3e'^3\sin(g-\Gamma) + ee'^2\sin(g-2\Gamma)$$
$$-ee'^2\sin(3g-2\Gamma) + e'^3\sin(3g-3\Gamma)$$

$$\frac{1}{6}y'^3 = e'^3\sin(g-\Gamma) - \frac{1}{3}e'^3\sin(3g-3\Gamma)$$

$$y-2y' = 2e\sin g - 4e'\sin(g-\Gamma)$$

$$y+2y' = 2e\sin g + 4e'\sin(g-\Gamma)$$

ergiebt sich aus den Entwickelungen des vorigen Artikels:

$$
\begin{aligned}
a^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right) = \; & \Sigma\,(1)\sin(i(g-g')+iK+\Pi)\\
&+(2)\sin(i(g-g')+(i-1)K+\Pi)\\
&+(3)\sin(i(g-g')+(i+1)K+\Pi)\\
&+(4)\sin(i(g-g')+(i-2)K+\Pi)\\
&+(5)\sin(g+i(g-g')+iK+\Pi)\\
&+(6)\sin(g+i(g-g')+(i+1)K+\Pi)\\
&+(7)\sin(g+i(g-g')+(i-1)K+\Pi)\\
&+(8)\sin(g+i(g-g')+iK-\Pi)\\
&+(9)\sin(g+i(g-g')+(i+1)K-\Pi)\\
&+(10)\sin(g+i(g-g')+(i+2)K-\Pi)\\
&+(11)\sin(2g+i(g-g')+iK+\Pi)\\
&+(12)\sin(2g+i(g-g')+(i+1)K+\Pi)\\
&+(13)\sin(2g+i(g-g')+(i-1)K+\Pi)\\
&+(14)\sin(2g+i(g-g')+(i+2)K+\Pi)\\
&+(15)\sin(2g+i(g-g')+iK+3\Pi)\\
&+(16)\sin(2g+i(g-g')+(i-1)K+3\Pi)\\
&+(17)\sin(2g+i(g-g')+iK-\Pi)\\
&+(18)\sin(2g+i(g-g')+(i+1)K-\Pi)\\
&+(19)\sin(2g+i(g-g')+(i+2)K-\Pi)\\
&+(20)\sin(2g+i(g-g')+(i+3)K-\Pi)\\
&+(21)\sin(3g+i(g-g')+iK+\Pi)\\
&+(22)\sin(3g+i(g-g')+(i+1)K+\Pi)\\
&+(23)\sin(3g+i(g-g')+(i+2)K+\Pi)\\
&+(24)\sin(3g+i(g-g')+iK+3\Pi)\\
&+(25)\sin(4g+i(g-g')+iK+\Pi)\\
&+(26)\sin(4g+i(g-g')+(i+1)K+\Pi)\\
&+(27)\sin(4g+i(g-g')+(i+2)K+\Pi)\\
&+(28)\sin(4g+i(g-g')+(i+3)K+\Pi)\\
&+(29)\sin(4g+i(g-g')+iK+3\Pi)\\
&+(30)\sin(4g+i(g-g')+(i+1)K+3\Pi)
\end{aligned}
$$

## 16.

Die Coefficienten des vorstehenden Ausdrucks sind die folgenden:

$$
\begin{aligned}
(1) = \; & \tfrac{1}{2}em'a^2\sin J\{(1,0)+2(i+1)(0,0)\}E_{i+1}\\
&+\tfrac{1}{16}e^3m'a^2\sin J\{(3,0)+(2i+4)(2,0)-(4(i+1)^2-7i-4)(1,0)-\\
&\qquad -(8(i+1)^3-10(i+1)^2+2(i+1))(0,0)\}E_{i+1}\\
&+\tfrac{1}{8}ee'^2m'a^2\sin J\{(1,2)+2(1,1)+2(i+1)(0,2)-(4(i+1)^2-8i-4)(1,0)+\\
&\qquad +4(i+1)(0,1)-(8(i+1)^3-16(i+1)^2+8(i+1))(0,0)\}E_{i+1}\\
&-\tfrac{3}{4}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'a^2\sin J\{(1,0)+2(i+1)(0,0)\}\{2F_i+F_{i+2}\}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}(2) = {} & \tfrac{1}{2} e'm'a^2 \sin J\{(0,1) - (2i-2)(0,0)\} E_i \\ & + \tfrac{1}{8} e^2 e'm'a^2 \sin J\{(2,1) - (2i-2)(2,0) + 2(1,1) - (4i-4)(1,0) - 4i^2(0,1) + \\ & \qquad + (8i^3-8i^2)(0,0)\} E_i \\ & + \tfrac{1}{16} e'^3 m'a^2 \sin J\{(0,3) - (2i-4)(0,2) - (4i^2-i)(0,1) + (8i^3-14i^2+6i)(0,0)\} E_i \\ & - \tfrac{3}{4} e' \sin^2 \tfrac{1}{2}J\, m'a^2 \sin J\{(0,1) - (2i-2)(0,0)\}\{2F_{i-1}+F_{i+1}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) = {} & \tfrac{1}{16} e^2 e'm'a^2 \sin J\{(2,1) + (2i+2)(2,0) + (4i+6)(1,1) + (8(i+2)^2 - 12(i+2) + 4)(1,0) + \\ & + (4(i+2)^2 - 5(i+2))(0,1) + (8(i+2)^3 - 18(i+2)^2 + 10(i+2))(0,0)\} E_{i+2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(4) = {} & \tfrac{1}{16} e e'^2 m'a^2 \sin J\{(1,2) - (4i-6)(1,1) - 2(i-1)(0,2) + (4(i-1)^2 - 3(i-1) - 1)(1,0) + \\ & + (8(i-1)^2 - 4(i-1))(0,1) - (8(i-1)^3 - 6(i-1)^2 - 2(i-1))(0,0)\} E_{i-1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(5) = {} & - m'a^2 \sin J\,(0,0)\, E_{i+1} \\ & - \tfrac{1}{4} e^2 m'a^2 \sin J\{(2,0) + 2(1,0) - 4(i+1)^2(0,0)\} E_{i+1} \\ & - \tfrac{1}{4} e'^2 m'a^2 \sin J\{(0,2) + 2(0,1) - 4i^2(0,0)\} E_{i+1} \\ & + \tfrac{3}{2} \sin^2 \tfrac{1}{2}J\, m'a^2 \sin J\,(0,0)\,\{2F_i + F_{i+2}\}\end{aligned}$$

$$(6) = -\tfrac{1}{4} e e' m'a^2 \sin J\{(1,1) + (2i+2)(1,0) + (2i+4)(0,1) + (4(i+2)^2 - 4(i+2))(0,0)\} E_{i+2}$$

$$(7) = -\tfrac{1}{4} e e' m'a^2 \sin J\{(1,1) - (2i-2)(1,0) - 2i(0,1) + (4i^2-4i)(0,0)\} E_i$$

$$(8) = \tfrac{1}{8} e^2 m'a^2 \sin J\{(2,0) - (4i-2)(1,0) + (4i^2-3i-1)(0,0)\} E_{i-1}$$

$$(9) = \tfrac{1}{4} e e' m'a^2 \sin J\{(1,1) + (2i+2)(1,0) - 2i(0,1) - (4i^2+4i)(0,0)\} E_i$$

$$(10) = \tfrac{1}{8} e'^2 m'a^2 \sin J\{(0,2) + (4i+6)(0,1) + (4i^2+11i+6)(0,0)\} E_{i+1}$$

$$\begin{aligned}(11) = {} & \tfrac{1}{2} e m'a^2 \sin J\{(1,0) - (2i+2)(0,0)\} E_{i+1} \\ & + \tfrac{1}{16} e^3 m'a^2 \sin J\{(3,0) - 2i(2,0) - (4(i+1)^2 + 7(i+1) + 3)(1,0) + \\ & \qquad + (8(i+1)^3 + 10(i+1)^2 + 2(i+1))(0,0)\} E_{i+1} \\ & + \tfrac{1}{8} e e'^2 m'a^2 \sin J\{(1,2) + 2(1,1) - 2(i+1)(0,2) - (4(i+1)^2 - 8(i+1) + 4)(1,0) - \\ & \qquad - 4(i+1)(0,1) + (8(i+1)^3 - 16(i+1)^2 + 8(i+1))(0,0)\} E_{i+1} \\ & - \tfrac{3}{4} e \sin^2 \tfrac{1}{2}J\, m'a^2 \sin J\{(1,0) - 2(i+1)(0,0)\}\{2F_i + F_{i+2}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(12) = {} & \tfrac{1}{2} e'm'a^2 \sin J\{(0,1) + 2(i+1)(0,0)\} E_{i+2} \\ & + \tfrac{1}{8} e^2 e'm'a^2 \sin J\{(2,1) + (2i+2)(2,0) + 2(1,1) + (4i+4)(1,0) - \\ & \qquad - 4(i+2)^2(0,1) - (8(i+2)^3 - 8(i+2)^2)(0,0)\} E_{i+2} \\ & + \tfrac{1}{16} e'^3 m'a^2 \sin J\{(0,3) + 2(i+2)(0,2) - (4(i+2)^2 - 15(i+2) + 14)(0,1) - \\ & \qquad - (8(i+2)^3 - 34(i+2)^2 + 46(i+2) - 20)(0,0)\} E_{i+2} \\ & - \tfrac{3}{4} e' \sin^2 \tfrac{1}{2}J\, m'a^2 \sin J\{(0,1) + 2(i+1)(0,0)\}\{2F_{i+1} + F_{i+3}\}\end{aligned}$$

$$(13) = \frac{1}{16} e^2 e' m' a^2 \sin J \{(2,1) - (2i-2)(2,0) - (4i+2)(1,1) + (8i^2 - 4i - 4)(1,0) + $$
$$+ (4i^2+5i)(0,1) - (8i^3+2i^2-10i)(0,0)\} E_i$$

$$(14) = \frac{1}{16} e e'^2 m' a^2 \sin J \{(1,2) + (4i+6)(1,1) + 2(i+3)(0,2) + (4(i+3)^2 - 13(i+3) + 7)(1,0) +$$
$$+ (8(i+3)^2 - 12(i+3))(0,1) + (8(i+3)^3 - 26(i+3)^2 + 18(i+3))(0,0)\} E_{i+3}$$

$$(15) = \frac{3}{4} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' a^2 \sin J \{(1,0) + (2i+6)(0,0)\} F_{i+2}$$

$$(16) = \frac{3}{4} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' a^2 \sin J \{(0,1) - (2i-2)(0,0)\} F_{i+1}$$

$$(17) = -\frac{1}{48} e^3 m' a^2 \sin J \{(3,0) - 6i(2,0) + (12(i-1)^2 + 27(i-1) + 9)(1,0) -$$
$$- (8(i-1)^3 + 30(i-1)^2 + 26(i-1))(0,0)\} E_{i-1}$$

$$(18) = -\frac{1}{16} e^2 e' m' a^2 \sin J \{(2,1) + (2i+2)(2,0) - (4i+2)(1,1) - (8i^2+12i+4)(1,0) +$$
$$+ (4i^2+5i)(0,1) + (8i^3+18i^2+10i)(0,0)\} E_i$$

$$(19) = -\frac{1}{16} e e'^2 m' a^2 \sin J \{(1,2) + (4i+6)(1,1) - 2(i+1)(0,2) + (4(i+1)^2 + 3(i+1) - 1)(1,0) -$$
$$- (8(i+1)^2 + 4(i+1))(0,1) - (8(i+1)^3 + 6(i+1)^2 - 2(i+1))(0,0)\} E_{i+1}$$

$$(20) = -\frac{1}{48} e'^3 m' a \sin J \{(0,3) + 6(i+2)(0,2) + (12(i+2)^2 - 3(i+2) - 6)(0,1) +$$
$$+ (8(i+2)^3 - 6(i+2)^2 - 10(i+2) + 4)(0,0)\} E_{i+2}$$

$$(21) = -\frac{1}{8} e^2 m' a^2 \sin J \{(2,0) - (4i+6)(1,0) + (4(i+1)^2 + 5(i+1))(0,0)\} E_{i+1}$$

$$(22) = -\frac{1}{4} e e' m' a^2 \sin J \{(1,1) + (2i+2)(1,0) - (2i+4)(0,1) - (4(i+2)^2 - 4(i+2))(0,0)\} E_{i+2}$$

$$(23) = -\frac{1}{8} e'^2 m' a^2 \sin J \{(0,2) + (4i+6)(0,1) + (4(i+3)^2 - 13(i+3) + 9)(0,0)\} E_{i+3}$$

$$(24) = -\frac{3}{2} \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' a^2 \sin J (0,0) F_{i+2}$$

$$(25) = \frac{1}{48} e^3 m' a^2 \sin J \{(3,0) - (6i+12)(2,0) + (12(i+1)^2 + 27(i+1) + 9)(1,0) -$$
$$- (8(i+1)^3 + 30(i+1)^2 + 26(i+1))(0,0)\} E_{i+1}$$

$$(26) = \frac{1}{16} e^2 e' m' a^2 \sin J \{(2,1) + (2i+2)(2,0) - (4i+10)(1,1) - (8(i+2)^2 - 4(i+2) - 4)(1,0) +$$
$$+ (4(i+2)^2 + 5(i+2))(0,1) + (8(i+2)^3 + 2(i+2)^2 - 10(i+2))(0,0)\} E_{i+2}$$

$$(27) = \frac{1}{16} e e'^2 m' a^2 \sin J \{(1,2) + (4i+6)(1,1) - 2(i+3)(0,2) + (4(i+3)^2 - 13(i+3) + 9)(1,0) -$$
$$- (8(i+3)^2 - 12(i+3))(0,1) - (8(i+3)^3 - 26(i+3)^2 + 18(i+3))(0,0)\} E_{i+3}$$

$$(28) = \frac{1}{48} e'^3 m' a^2 \sin J \{(0,3) + (6i+12)(0,2) + (12(i+4)^2 - 51(i+4) + 48)(0,1) +$$
$$+ (8(i+4)^3 - 54(i+4)^2 + 110(i+4) - 64)(0,0)\} E_{i+4}$$

$$(29) = \frac{3}{4} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' a^2 \sin J \{(1,0) - (2i+6)(0,0)\} F_{i+2}$$

$$(30) = \frac{3}{4} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' a^2 \sin J \{(0,1) + (2i+2)(0,0)\} F_{i+3}$$

17.

Es ist dem Vorhergehenden zufolge, wenn wie oben

$$\alpha = \frac{a}{a'}$$

gesetzt wird,

$$\frac{\alpha^2}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos G)^{\frac{3}{2}}} - \alpha^2 = a^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} E_i \cos iG$$

Setzt man also wieder

$$\frac{1}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos G)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} B_i \cos iG$$

so bekommt man im Allgemeinen

$$a^2 E_i = \alpha^2 B_i$$

mit der Ausnahme, dass

$$a^2 E_0 = \alpha^2 B_0 - \alpha^2$$

wird. Mit Anwendung der im Vorhergehenden eingeführten abgekürzten Bezeichnungen ergiebt sich daher allgemein

$$\begin{aligned}
a^2(0,0)E_i &= \alpha(0)B_i\\
a^2(1,0)E_i &= \alpha(1)B_i\\
a^2(0,1)E_i &= -\alpha(1)B_i - 2\alpha(0)B_i\\
a^2(2,0)E_i &= \alpha(2)B_i\\
a^2(1,1)E_i &= -\alpha(2)B_i - 3\alpha(1)B_i\\
a^2(0,2)E_i &= \alpha(2)B_i + 6\alpha(1)B_i + 6\alpha(0)B_i\\
a^2(3,0)E_i &= \alpha(3)B_i\\
a^2(2,1)E_i &= -\alpha(3)B_i - 4\alpha(2)B_i\\
a^2(1,2)E_i &= \alpha(3)B_i + 8\alpha(2)B_i + 12\alpha(1)B_i\\
a^2(0,3)E_i &= -\alpha(3)B_i - 12\alpha(2)B_i - 36\alpha(1)B_i - 24\alpha(0)B_i
\end{aligned}$$

und der Ausnahmefall wird eben so berücksichtigt wie oben, nemlich indem man allenthalben

$$(0)B_0 - \alpha \quad \text{statt} \quad (0)B_0$$

anwendet.

Es wird ferner

$$\frac{\alpha^3}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos G)^{\frac{5}{2}}} = a^2 \sum_{-\infty}^{+\infty} F_i \cos iG$$

und wenn man hierauf

$$\frac{1}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos G)^{\frac{5}{2}}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_i \cos iG$$

setzt, so erhält man ohne Ausnahme

$$a^2 F_i = \alpha^3 C_i$$

Sei nun dem Vorhergehenden analog

$$(0)\, C_i = \alpha^2 C_i$$
$$(1)\, C_i = \alpha^3 \left(\frac{\partial C_i}{\partial \alpha}\right)$$

dann giebt die vorstehende Relation

$$a^2 (0,0)\, F_i = \alpha (0)\, C_i$$
$$a^2 (1,0)\, F_i = \alpha (1)\, C_i + \alpha (0)\, C_i$$
$$a^2 (0,1)\, F_i = -\alpha (1)\, C_i - 3\alpha (0)\, C_i$$

welche Werthe in den Ausdrücken der Coefficienten des vorigen Artikels anzuwenden sind.

18.

Diese Coefficienten werden somit

$$(1) = \frac{1}{2} e\, m'\alpha \sin J \{(1) + (2i+2)(0)\} B_{i+1}$$
$$+ \frac{1}{16} e^3 m'\alpha \sin J \{(3) + (2i+4)(2) - (4i^2+i)(1) - (8i^3+14i^2+6i)(0)\} B_{i+1}$$
$$+ \frac{1}{8} e e'^2 m'\alpha \sin J \{(3) + (2i+8)(2) - (4i^2-8i-14)(1) - (8i^3+8i^2-4i-4)(0)\} B_{i+1}$$
$$- \frac{3}{4} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m'\alpha \sin J \{(1) + (2i+3)(0)\} \{2C_i + C_{i+2}\}$$

$$(2) = -\frac{1}{2} e' m'\alpha \sin J \{(1) + 2i(0)\} B_i$$
$$- \frac{1}{8} e^2 e' m'\alpha \sin J \{(3) + (2i+4)(2) - (4i^2-4i-2)(1) - 8i^3(0)\} B_i$$
$$- \frac{1}{16} e'^3 m'\alpha \sin J \{(3) + (2i+8)(2) - (4i^2-13i-12)(1) - (8i^3-6i^2-8i)(0)\} B_i$$
$$+ \frac{3}{4} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m'\alpha \sin J \{(1) + (2i+1)(0)\} \{2C_{i-1} + C_{i+1}\}$$

$$(3) = -\frac{1}{16} e^2 e' m'\alpha \sin J \{(3) + (2i+8)(2) - (4i^2-3i-12)(1) - (8i^3+22i^2+12i)(0)\} B_{i+2}$$

$$(4) = \frac{1}{16} e e'^2 m'\alpha \sin J \{(3) + (2i+4)(2) - (4i^2-9i)(1) - (8i^3-14i^2+6i)(0)\} B_{i-1}$$

$$(5) = -m'\alpha \sin J (0) B_{i+1}$$
$$- \frac{1}{4} e^2 m'\alpha \sin J \{(2) + 2(1) - (4i^2+8i+4)(0)\} B_{i+1}$$
$$- \frac{1}{4} e'^2 m'\alpha \sin J \{(2) + 4(1) - (4i^2-2)(0)\} B_{i+1}$$
$$+ \frac{3}{2} \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m'\alpha \sin J (0) \{2C_i + C_{i+2}\}$$

$$(6) = \frac{1}{4} e e' m' \alpha \sin J \{ (2) + 5(1) - (4i^2 + 8i)(0) \} B_{i+2}$$

$$(7) = \frac{1}{4} e e' m' \alpha \sin J \{ (2) + (1) - 4i^2 (0) \} B_i$$

$$(8) = \frac{1}{8} e^2 m' \alpha \sin J \{ (2) - (4i-2)(1) + (4i^2 - 3i - 1)(0) \} B_{i-1}$$

$$(9) = -\frac{1}{4} e e' m' \alpha \sin J \{ (2) - (4i-1)(1) + 4i^2 (0) \} B_i$$

$$(10) = \frac{1}{8} e'^2 m' \alpha \sin J \{ (2) - 4i(1) + (4i^2 + 3i)(0) \} B_{i+1}$$

$$\begin{aligned}(11) = {} & \frac{1}{2} e m' \alpha \sin J \{ (1) - (2i+2)(0) \} B_{i+1} \\ & + \frac{1}{16} e^3 m' \alpha \sin J \{ (3) - 2i(2) - (4i^2 + 15i + 14)(1) + (8i^3 + 34i^2 + 46i + 20)(0) \} B_{i+1} \\ & + \frac{1}{8} e e'^2 m' \alpha \sin J \{ (3) - (2i-4)(2) - (4i^2 + 8i + 2)(1) + (8i^3 + 8i^2 - 4i - 4)(0) \} B_{i+1} \\ & + \frac{3}{4} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m' \alpha \sin J \{ (1) - (2i+1)(0) \} \{ 2C_i + C_{i+2} \}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(12) = {} & -\frac{1}{2} e' m' \alpha \sin J \{ (1) - 2i(0) \} B_{i+2} \\ & - \frac{1}{8} e^2 e' m' \alpha \sin J \{ (3) - (2i-4)(2) - (4i^2 + 20i + 14)(1) + (8i^3 + 32i^2 + 32i)(0) \} B_{i+2} \\ & - \frac{1}{16} e'^3 m' \alpha \sin J \{ (3) - (2i-8)(2) - (4i^2 + 13i - 12)(1) + (8i^3 + 6i^2 - 8i)(0) \} B_{i+2} \\ & + \frac{3}{4} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m' \alpha \sin J \{ (1) - (2i-1)(0) \} \{ 2C_{i+1} + C_{i+3} \}\end{aligned}$$

$$(13) = -\frac{1}{16} e^2 e' m' \alpha \sin J \{ (3) - 2i(2) - (4i^2 + 3i + 2)(1) + (8i^3 + 10i^2)(0) \} B_i$$

$$(14) = \frac{1}{16} e e'^2 m' \alpha \sin J \{ (3) - (2i-8)(2) - (4i^2 + 25i)(1) + (8i^3 + 30i^2 + 18i)(0) \} B_{i+3}$$

$$(15) = \frac{3}{4} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m' \alpha \sin J \{ (1) + (2i+7)(0) \} C_{i+2}$$

$$(16) = -\frac{3}{4} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m' \alpha \sin J \{ (1) + (2i+1)(0) \} C_{i+1}$$

$$(17) = -\frac{1}{48} e^3 m' \alpha \sin J \{ (3) - 6i(2) + (12i^2 + 3i - 6)(1) - (8i^3 + 6i^2 - 10i - 4)(0) \} B_{i-1}$$

$$(18) = \frac{1}{16} e^2 e' m' \alpha \sin J \{ (3) - 6i(2) + (12i^2 + 5i - 2)(1) - (8i^3 + 10i^2)(0) \} B_i$$

$$(19) = -\frac{1}{16} e e'^2 m' \alpha \sin J \{ (3) - 6i(2) + (12i^2 + 7i)(1) - (8i^3 + 14i^2 + 6i)(0) \} B_{i+1}$$

$$(20) = \frac{1}{48} e'^3 m' \alpha \sin J \{ (3) - 6i(2) + (12i^2 + 9i)(1) - (8i^3 + 18i^2 + 8i)(0) \} B_{i+2}$$

$$(21) = -\frac{1}{8} e^2 m' \alpha \sin J \{ (2) - (4i+6)(1) + (4i^2 + 13i + 9)(0) \} B_{i+1}$$

$$(22) = \frac{1}{4} e e' m' \alpha \sin J \{ (2) - (4i+3)(1) + (4i^2 + 8i)(0) \} B_{i+2}$$

$$(23) = -\frac{1}{8} e'^2 m' \alpha \sin J \{ (2) - 4i(1) + (4i^2 + 3i)(0) \} B_{i+3}$$

$$(24) = -\frac{3}{2} \sin^2 \tfrac{1}{2} J\, m' \alpha \sin J (0)\, C_{i+2}$$

$$(25) = \frac{1}{48} e^3 m'\alpha \sin J\{(3)-(6i+12)(2)+(12i^2+51i+48)(1)-(8i^3+54i^2+110i+64)(0)\}B_{i+1}$$

$$(26) = -\frac{1}{16} e^2 e' m'\alpha \sin J\{(3)-(6i+8)(2)+(12i^2+37i+16)(1)-(8i^3+42i^2+52i)(0)\}B_{i+2}$$

$$(27) = \frac{1}{16} e e'^2 m'\alpha \sin J\{(3)-(6i+4)(2)+(12i^2+23i)(1)-(8i^3+30i^2+18i)(0)\}B_{i+3}$$

$$(28) = -\frac{1}{48} e'^3 m'\alpha \sin J\{(3)-6i(2)+(12i^2+9i)(1)-(8i^3+18i^2+8i)(0)\}B_{i+4}$$

$$(29) = \frac{3}{4} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \sin J\{(1)-(2i+5)(0)\}C_{i+2}$$

$$(30) = -\frac{3}{4} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \sin J\{(1)-(2i-1)(0)\}C_{i+3}$$

## 19.

Im Vorhergehenden ist stillschweigend angenommen worden, dass der störende Planet ein oberer sei, denn um die Entwickelung der Wurzelgrössen der Störungsfunction ausführen zu können, muss $\alpha < 1$ sein, und diese Bedingung setzt $a' > a$ voraus. Betrachten wir jetzt den entgegengesetzten Fall, und nehmen $a' < a$ an. Setzen wir demzufolge

$$\alpha' = \frac{a'}{a}$$

und

$$(1+\alpha'^2-2\alpha'\cos G)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} A'_i \cos iG$$
$$(1+\alpha'^2-2\alpha'\cos G)^{-\frac{3}{2}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} B'_i \cos iG$$
$$(1+\alpha'^2-2\alpha'\cos G)^{-\frac{5}{2}} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C'_i \cos iG.$$

Da hieraus in Verbindung mit dem Vorhergehenden die folgenden Gleichungen entstehen:

$$(1+\alpha^2-2\alpha\cos G)^{-\frac{1}{2}} = \alpha'\,(1+\alpha'^2-2\alpha'\cos G)^{-\frac{1}{2}}$$
$$(1+\alpha^2-2\alpha\cos G)^{-\frac{3}{2}} = \alpha'^3(1+\alpha'^2-2\alpha'\cos G)^{-\frac{3}{2}}$$
$$(1+\alpha^2-2\alpha\cos G)^{-\frac{5}{2}} = \alpha'^5(1+\alpha'^2-2\alpha'\cos G)^{-\frac{5}{2}}$$

so ergeben sich sogleich die Relationen

$$\alpha A_i = A'_i$$
$$\alpha^2 B_i = \alpha' B'_i$$
$$\alpha^3 C_i = \alpha'^2 C'_i$$

Führt man nun, dem Vorhergehenden analog, die abgekürzten Bezeichnungen

$$(0)A_i' = A_i', \qquad (0)B_i' = \alpha' B_i'$$
$$(1)A_i' = \alpha'\left(\frac{\partial A_i'}{\partial \alpha'}\right), \qquad (1)B_i' = \alpha'^2\left(\frac{\partial B_i'}{\partial \alpha'}\right)$$
$$(2)A_i' = \alpha'^2\left(\frac{\partial^2 A_i'}{\partial \alpha'^2}\right), \qquad (2)B_i' = \alpha'^3\left(\frac{\partial^2 B_i'}{\partial \alpha'^2}\right), \qquad (0)C_i' = \alpha'^2 C_i'$$

etc.

ein, so erhält man durch wiederholte Differentiationen, und mit Berücksichtigung der Gleichung $\alpha\alpha' = 1$, die folgenden Gleichungen:

$$\alpha(0)A_i = (0)A_i'$$
$$\alpha(1)A_i = -(1)A_i' - (0)A_i'$$
$$\alpha(2)A_i = (2)A_i' + 4(1)A_i' + 2(0)A_i'$$
$$\alpha(3)A_i = -(3)A_i' - 9(2)A_i' - 18(1)A_i' - 6(0)A_i'$$
$$\alpha(4)A_i = (4)A_i' + 16(3)A_i' + 72(2)A_i' + 96(1)A_i' + 24(0)A_i'$$
$$\alpha(0)B_i = (0)B_i'$$
$$\alpha(1)B_i = -(1)B_i' - 3(0)B_i'$$
$$\alpha(2)B_i = (2)B_i' + 8(1)B_i' + 12(0)B_i'$$
$$\alpha(0)C_i = (0)C_i'$$

## 20.

Die Ausdrücke des vorigen Artikels können auf zweierlei Arten angewandt werden. Man kann durch dieselben in den Ausdrücken der Coefficienten der Störungsfunction (1) bis (18), der Coefficienten des Differentials derselben nach $r$, (1)′ bis (18)′, und der Coefficienten des Differentials derselben nach $Z$, (1) bis (30), die $A_i$, $B_i$, $C_i$ eliminiren und durch die $A_i'$, $B_i'$, $C_i'$ ersetzen, wodurch alle diese Coefficienten zu Functionen der zuletzt genannten Grössen gemacht werden. Man kann aber auch, nachdem man die $A_i'$, $B_i'$, $C_i'$ durch die bekannten Formeln gerechnet hat, die Gleichungen des vorigen Artikels anwenden, um aus ihnen die numerischen Werthe der $A_i$, $B_i$, $C_i$ zu berechnen, und diese dann in die unveränderten Ausdrücke der oben genannten Coefficienten substituiren.

Das zweite Glied der Störungsfunction wird hierauf eben so berücksichtigt wie oben, nemlich dadurch, dass man allenthalben

$$\alpha(0)A_1 - \frac{1}{2\alpha'^2} \quad \text{statt} \quad \alpha(0)A_1$$
$$\alpha(1)A_1 - \frac{1}{2\alpha'^2} \quad - \quad \alpha(1)A_1$$
$$\alpha(0)B_0 - \frac{1}{\alpha'^2} \quad - \quad \alpha(0)B_0$$

schreibt. Will man statt dessen die Wirkung des zweiten Gliedes der Störungsfunction an den $A'_i$, $B'_i$ anbringen, so geben die obigen Gleichungen durch Differentiation leicht zu erkennen, dass man allenthalben

$$(0)A'_1 - \frac{1}{2\alpha'^2} \quad \text{statt} \quad (0)A'_1$$
$$(1)A'_1 + \frac{1}{\alpha'^2} \quad - \quad (1)A'_1$$
$$(2)A'_1 - \frac{3}{\alpha'^2} \quad - \quad (2)A'_1$$
$$(3)A'_1 + \frac{12}{\alpha'^2} \quad - \quad (3)A'_1$$
$$(4)A'_1 - \frac{60}{\alpha'^2} \quad - \quad (4)A'_1$$

und

$$(0)B'_0 - \frac{1}{\alpha'^2} \quad - \quad (0)B'_0$$
$$(1)B'_0 + \frac{3}{\alpha'^2} \quad - \quad (1)B'_0$$
$$(2)B'_0 - \frac{12}{\alpha'^2} \quad - \quad (2)B'_0$$

u. s. w. setzen muss.

## 21.

Man kann den Fall, in welchem der störende Planet ein unterer ist, auch etwas anders behandeln. Im §. 3 der zweiten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten habe ich gezeigt, dass wenn man statt des vollständigen Werthes der Störungsfunction

$$\Omega = m'\left\{\frac{1}{r} + \left(\frac{r'}{r^2} - \frac{r}{r'^2}\right)H\right\}$$

in die Gleichungen der Bewegung eines Planeten oder Kometen setzt, diese durch endliche Ausdrücke integrabel werden. Die Integrale, die man durch diese Substitution erhält, sind die folgenden:

$$n\delta z = -\frac{m'}{a^2\sqrt{1-e^2}}rr'\{\cos^2\tfrac{1}{2}J\sin(f-f'+\Pi-\Pi')+\sin^2\tfrac{1}{2}J\sin(f+f'+\Pi+\Pi')\}$$

$$\nu = \frac{1}{8}m' + \frac{m'}{a(1-e^2)}r'\{\cos^2\tfrac{1}{2}J\cos(f-f'+\Pi-\Pi')+\sin^2\tfrac{1}{2}J\cos(f+f'+\Pi+\Pi')\}$$

$$+\frac{m'e}{a(1-e^2)}r'\{\cos^2\tfrac{1}{2}J\cos(f'-\Pi+\Pi')+\sin^2\tfrac{1}{2}J\cos(f'+\Pi+\Pi')\}$$

$$u = -m'\sin J\frac{r'}{a}\sin(f'+\Pi')\cos i$$

Benutzt man diese Integrale, so muss man, um die übrigen Störungsglieder zu erhalten, von dem vollständigen Ausdruck der Störungsfunction den oben angeführten Theil derselben abziehen. Es wird also hierauf

$$\Omega = m'\left\{\frac{1}{\Delta}-\frac{1}{r}-\frac{r'}{r^2}H\right\}$$

welcher Ausdruck den Reihenentwickelungen zu Grunde zu legen ist.

## 22.

Man sieht ohne Weiteres, dass die Entwickelung der aus $\Delta$ entstehenden Glieder dieselbe bleibt wie vorher, und dass nur die Berücksichtigung des zweiten und dritten Gliedes der Störungsfunction anders ausfällt wie vorher. Die $A'_i$, $B'_i$, $C'_i$ ergeben sich wieder unmittelbar und sind in die Gleichungen des vorvorigen Artikels zu substituiren, um die $A_i$, $B_i$, $C_i$ zu erhalten, wenn man nicht vorgezogen hat, die dort angedeutete Elimination auszuführen.

Die Berücksichtigung des zweiten und dritten Gliedes der Störungsfunction wird nun, wie sich leicht ergiebt, dadurch erlangt, dass man allenthalben

| | | |
|---|---|---|
| $(0)\,A'_0 - 1$ | statt | $(0)\,A'_0$ |
| $(0)\,A'_1 - \frac{1}{2}\alpha'$ | - | $(0)\,A'_1$ |
| $(1)\,A'_1 - \frac{1}{2}\alpha'$ | - | $(1)\,A'_1$ |
| $(0)\,B'_0 - \alpha'$ | - | $(0)\,B'_0$ |

schreibt.

## §. 2. Entwickelung der allgemeinen Störungsglieder der mittleren Länge und des Radius Vectors.

### 23.

Nachdem die Entwickelung der Störungsfunction und ihres Differentialquotienten nach $r$ im Vorhergehenden ausgeführt worden ist, können wir zur Entwickelung der Störungen der mittleren Länge und des Radius Vectors schreiten. Nehmen wir fürerst nur auf die erste Potenz der störenden Kraft Rücksicht, so sind die geeignetsten Formeln die folgenden, die wohl gegenwärtig keiner besonderen Erklärung bedürfen:

$$n\delta z = n\int \overline{W} dt$$

$$\nu = -\tfrac{1}{2} n \int \left(\frac{\delta \overline{W}}{\delta \gamma}\right) dt$$

für welche das Differential von $W$ sich zuerst unter der folgenden Form darstellt

$$\frac{dW}{dt} = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ 2\frac{\varrho}{r}\cos(f-\varphi) - 1 + \frac{2\varrho}{a(1-e^2)}[\cos(f-\varphi)-1] \right\} \left(\frac{\delta\Omega}{\delta f}\right)$$
$$+ 2\frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\varrho}{r} \sin(f-\varphi)\, r\left(\frac{\delta\Omega}{\delta r}\right)$$

und $\varphi$, $\varrho$, $\gamma$ Functionen bedeuten, die aus der unbestimmten Grösse $\tau$ eben so zusammengesetzt sind, wie $f$, $r$, $g$ aus der Zeit $t$. Der Strich über den Functionen bedeutet, dass man in denselben $\tau$ in $t$, oder $\gamma$ in $g$ verwandeln soll. Zur Controle der Entwickelungen kann man die Gleichung

$$\frac{d\delta z}{dt} + 2\nu = \frac{an}{\sqrt{1-e^2}} \int \left(\frac{\delta\Omega}{\delta f}\right) dt$$

anwenden.

### 24.

Dieser Ausdruck für $dW$ kann zwei andere, wesentlich von einander verschiedene, Formen annehmen. Erwägt man, dass

$$\frac{\varrho}{a(1-e^2)} = 1 - e\frac{\varrho\cos\varphi}{a(1-e^2)}$$

ist, so lehrt der Anblick sogleich, dass $dW$ aus drei verschiedenen Theilen besteht, von welchen der eine von $\tau$ unabhängig, der andere

mit $\varrho\cos\varphi$, und der dritte mit $\varrho\sin\varphi$ multiplicirt ist. Diese Umformung ist so einfach auszuführen, dass ich gleich das Resultat derselben hinschreiben kann. Setzt man

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d\Xi}{dt} + \frac{dY}{dt}\left(\frac{\varrho}{a}\cos\varphi + \frac{3}{2}e\right) + \frac{d\Psi'}{dt}\frac{\varrho}{a}\sin\varphi$$

so ergeben sich

$$\frac{d\Xi}{n\,dt} = -3\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left[\frac{ae\cos f}{r} + \frac{e\cos f}{1-e^2} + \frac{1}{1-e^2}\right]\left(\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right) + \frac{ae\sin f}{r}r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

$$\frac{dY}{n\,dt} = 2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left[\frac{a\cos f}{r} + \frac{\cos f + e}{1-e^2}\right]\left(\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right) + \frac{a\sin f}{r}r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

$$\frac{d\Psi'}{n\,dt} = 2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left[\frac{a\sin f}{r} + \frac{\sin f}{1-e^2}\right]\left(\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right) - \frac{a\cos f}{r}r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

Es ist aber

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right) = \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2} = \frac{ae\cos f}{r\sqrt{1-e^2}} + \frac{e\cos f}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial g}\right) = \frac{ae\sin f}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial e}\right) = \left\{\frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2}\right\}\sin f$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial e}\right) = -a\cos f$$

womit sogleich

$$\frac{d\Xi}{n\,dt} = -3a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right)$$

$$\frac{dY}{n\,dt} = \frac{2}{e}\left\{a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right)\right\}$$

$$\frac{d\Psi'}{n\,dt} = \frac{2}{\sqrt{1-e^2}}a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial e}\right)$$

hervorgehen. Diese sehr einfachen Ausdrücke leiden indess an dem Uebelstande, dass sie die Entwickelung der Störungsfunction um eine Ordnung mehr verlangen, als schliesslich beibehalten werden soll.

## 25.

Um die zweite Umformung von $dW$ zu erhalten, bemerke ich, dass aus der Gleichung

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right) = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right) + \left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial g}\right)$$

in Folge der im vorigen Artikel angeführten Ausdrücke der Differentiale von $f$ und $r$ nach $g$

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right) = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right)\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}} - r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\frac{re\sin f}{a(1-e^2)}$$

folgt. Eliminirt man hiermit aus dem vorstehenden Ausdruck für $dY$ das Differential von $\Omega$ nach $f$, so wird

$$\frac{dY}{ndt} = \frac{2}{1-e^2}\left\{\frac{a^2(1-e^2)-r^2}{a^2 e} a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right) + \frac{r\sin f}{a\sqrt{1-e^2}} ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

Dieselbe Elimination verwandelt den Ausdruck für $d\Psi$ zunächst in den folgenden

$$\frac{d\Psi'}{ndt} = \frac{2}{1-e^2}\left\{\left[\frac{r}{a}\sin f + \frac{r^2\sin f}{a^2(1-e^2)}\right] a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right) - \left[\frac{a\cos f}{r}\sqrt{1-e^2} + \frac{e\sin^2 f}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{re\sin^2 f}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\right] ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

Es ist aber

$$1 = \frac{r}{a(1-e^2)} + \frac{re\cos f}{a(1-e^2)}$$

und macht man hiemit im Gliede $\frac{a\cos f}{r}\sqrt{1-e^2}$ des vorstehenden Ausdruckes $r$ zum Factor, so wird dieses ganze Glied

$$-\left[\frac{r\cos f}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{e}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{re}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\right] ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)$$

Nun hat man identisch

$$0 = -re\cos f - r + a(1-e^2)$$

multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{e}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)$ und addirt das Product zum vorstehenden Ausdruck, so wird dieser

$$-\left[\frac{r\cos f}{a\sqrt{1-e^2}} + 2\frac{e}{\sqrt{1-e^2}}\right] ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)$$

Es ist ferner

$$\frac{\partial\left[\frac{r}{a}\sin f + \frac{r^2\sin f}{a^2(1-e^2)}\right]}{\partial g} = \frac{a}{r}\cos f\sqrt{1-e^2} + \frac{\cos f}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{e\sin^2 f}{\sqrt{1-e^2}} + 2\frac{re\sin^2 f}{a(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{2r\cos f + 3ae}{a\sqrt{1-e^2}}$$

nach Anwendung derselben Reductionen wie vorher. Hiermit ergiebt sich also

$$\frac{d\Psi}{ndt} = \frac{2}{1-e^2}\left\{\int\frac{2r\cos f + 3ae}{a\sqrt{1-e^2}} dg - a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right) - \frac{r\cos f + 2ae}{a\sqrt{1-e^2}} ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

wo das Integral des ersten Gliedes so genommen werden muss, dass es mit $g$ zugleich verschwindet.

## 26.

Substituirt man nun die im vorigen und vorvorigen Artikel erhaltenen Werthe von $d\Upsilon$, $d\Psi$ und $d\Xi$ in den Ausdruck für $dW$, so ergiebt sich, wenn man

$$\frac{dW}{n\,dt} = Aa\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right) + Bar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)$$

setzt,

$$A = -3$$
$$+ \frac{1}{1-e^2}\left\{\left(2\frac{\varrho}{a}\cos\varphi + 3e\right)\frac{a^2(1-e^2)-r^2}{a^2 e} + 2\frac{\varrho\sin\varphi}{a\sqrt{1-e^2}}\int\left(2\frac{r}{a}\cos f + 3e\right)dg\right\}$$
$$B = \frac{1}{1-e^2}\left\{\left(2\frac{\varrho}{a}\cos\varphi + 3e\right)\frac{r\sin f}{a\sqrt{1-e^2}} - 2\frac{\varrho\sin\varphi}{a\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\cos f + 2e\right)\right\}$$

Die Entwickelung dieser beiden Functionen ist sehr einfach, da alle Glieder derselben sich auf $r^2$ oder $\varrho^2$ und die Differentiale dieser Grössen hinführen lassen. Denn da

$$\left(\frac{\partial\,.\,r^2}{a^2 e\,\partial g}\right) = 2\frac{r\sin f}{a\sqrt{1-e^2}}, \qquad \left(\frac{\partial\,.\,r^2}{a^2\partial e}\right) = -2\frac{r}{a}\cos f$$

sind, so werden

$$A = -3$$
$$+ \frac{1}{1-e^2}\left\{\left[\left(\frac{\partial\,.\,\varrho^2}{a^2\partial e}\right) - 3e\right]\frac{r^2-a^2(1-e^2)}{a^2 e} - \left(\frac{\partial\,.\,\varrho^2}{a^2 e\,\partial\gamma}\right)\int\left[\left(\frac{\partial\,.\,r^2}{a^2\partial e}\right) - 3e\right]dg\right\}$$
$$B = \frac{1}{2(1-e^2)}\left\{\left(\frac{\partial\,.\,\varrho^2}{a^2 e\,\partial\gamma}\right)\left[\left(\frac{\partial\,.\,r^2}{a^2\partial e}\right) - 4e\right] - \left[\left(\frac{\partial\,.\,\varrho^2}{a^2\partial e}\right) - 3e\right]\left(\frac{\partial\,.\,r^2}{a^2 e\,\partial g}\right)\right\}$$

## 27.

Die Entwickelung der $A$ und $B$ braucht sich, wie ich längst bewiesen habe, in Bezug auf $g$ nur auf die Glieder zu erstrecken, in deren Argumenten $+\gamma$ oder $-\gamma$ vorkommen, indem sich nach der ersten Integration die Glieder, deren Argumente die Vielfachen von $\pm\gamma$ enthalten, aus jenen auf die einfachste Weise berechnen lassen. Um die hier festgesetzte Grenze der Genauigkeit zu erreichen, ist nun

$$\frac{r^2}{a^2} = 1 + \frac{3}{2}e^2 - \left(2e - \frac{1}{4}e^3\right)\cos g - \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}e^4\right)\cos 2g - \frac{1}{4}e^3\cos 3g - \frac{1}{6}e^4\cos 4g$$

und in Folge der vorstehenden Bemerkung braucht man, wie weit man auch die Genauigkeit treiben will, nur zu setzen

$$\frac{\varrho^2}{a^2} = 1 + \frac{3}{2}e^2 - \left(2e - \frac{1}{4}e^3 \pm \ldots\right)\cos\gamma$$

Man erhält hieraus für unseren Zweck

$$\left(\frac{\partial \,.\, \varrho^2}{a^2 e\, \partial \gamma}\right) = (2 - \tfrac{1}{4} e^2) \sin\gamma$$

$$\left(\frac{\partial \,.\, \varrho^2}{a^2\, \partial e}\right) - 3e = -(2 - \tfrac{3}{4} e^2) \cos\gamma$$

$$\left(\frac{\partial \,.\, r^2}{a^2 e\, \partial g}\right) = (2 - \tfrac{1}{4} e^2) \sin g + (e - \tfrac{1}{3} e^3) \sin 2g + \tfrac{3}{4} e^2 \sin 3g + \tfrac{2}{3} e^3 \sin 4g$$

$$\int\left[\left(\frac{\partial \,.\, r^2}{a^2\, \partial e}\right) - 3e\right] dg = -(2 - \tfrac{3}{4} e^2) \sin g - (\tfrac{1}{2} e - \tfrac{1}{3} e^3) \sin 2g - \tfrac{1}{4} e^2 \sin 3g - \tfrac{1}{6} e^3 \sin 4g$$

$$\frac{r^2 - a^2(1 - e^2)}{a^2 e} = \tfrac{5}{2} e - (2 - \tfrac{1}{4} e^2) \cos g - (\tfrac{1}{2} e - \tfrac{1}{6} e^3) \cos 2g - \tfrac{1}{4} e^2 \cos 3g - \tfrac{1}{6} e^3 \cos 4g$$

$$\left(\frac{\partial \,.\, r^2}{a^2\, \partial e}\right) - 4e = -e - (2 - \tfrac{3}{4} e^2) \cos g - (e - \tfrac{2}{3} e^3) \cos 2g - \tfrac{3}{4} e^2 \cos 3g - \tfrac{2}{3} e^3 \cos 4g$$

und hieraus mit wenig Mühe

$$\begin{aligned} A = & -3 + (4 + 2e^2) \cos(\gamma - g), \\ & + (e + \tfrac{1}{4} e^3) \cos(\gamma - 2g) \\ & - (5e + \tfrac{25}{8} e^3) \cos\gamma \\ & + \tfrac{1}{2} e^2 \cos(\gamma - 3g) \\ & + \tfrac{1}{3} e^3 \cos(\gamma - 4g) \\ & + \tfrac{1}{24} e^3 \cos(\gamma + 2g) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B = & -(2 + e^2) \sin(\gamma - g) \\ & - (e + \tfrac{1}{4} e^3) \sin(\gamma - 2g) \\ & - (e + \tfrac{7}{8} e^3) \sin\gamma \\ & - \tfrac{3}{4} e^2 \sin(\gamma - 3g) \\ & - \tfrac{2}{3} e^3 \sin(\gamma - 4g) \\ & + \tfrac{1}{24} e^3 \sin(\gamma + 2g) \end{aligned}$$

Bei der Anwendung dieses Verfahrens braucht man die Störungsfunction nur bis auf Grössen derselben Ordnung zu entwickeln, die man schliesslich beibehalten will.

## 28.

Um zu zeigen, wie man die im vorigen Artikel weggelassenen Glieder erhält, stelle ich die verschiedenen, in den Argumenten des Ausdrucks von $W$ enthaltenen, von den mittleren Anomalieen $g$ und $g'$ abhängigen Glieder unter dem allgemeinen Zeichen $\beta t$ dar, und kann demzufolge dem Ausdruck von $W$ die folgende Form geben

$$W = \Sigma \alpha^{(\varkappa)} \begin{smallmatrix}\sin\\ \cos\end{smallmatrix} (\varkappa\gamma + \beta t)$$

Setzt man hierauf

$$\frac{r^2}{a^2} = \Sigma R^{(\varkappa)} \cos \varkappa g$$

und

$$\eta^{(\varkappa)} = \frac{\left(\frac{\partial R^{(\varkappa)}}{\partial e}\right)}{2\left(\frac{\partial R^{(1)}}{\partial e}\right)} + \varkappa\frac{R^{(\varkappa)}}{2R^{(1)}}$$

$$\theta^{(\varkappa)} = \frac{\left(\frac{\partial R^{(\varkappa)}}{\partial e}\right)}{2\left(\frac{\partial R^{(1)}}{\partial e}\right)} - \varkappa\frac{R^{(\varkappa)}}{2R^{(1)}}$$

so wird

$$\alpha^{(\pm\varkappa)} = \eta^{(\varkappa)}\alpha^{(\pm 1)} + \theta^{(\varkappa)}\alpha^{(\mp 1)}$$

woraus alle $\alpha^{(\varkappa)}$ auf die einfachste Weise erhalten werden können, wenn $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(-1)}$ gegeben sind. Ich bemerke beiläufig, dass dieser Satz sich auf alle Potenzen der störenden Massen erstreckt. Für den gegenwärtigen Fall reichen die folgenden Werthe aus:

$$\eta^{(2)} = \frac{1}{2}e - \frac{1}{8}e^3, \qquad \theta^{(2)} = -\frac{1}{48}e^3$$

$$\eta^{(3)} = \frac{3}{8}e^2$$

$$\eta^{(4)} = \frac{1}{3}e^3$$

## 29.

Vor der Anwendung der im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke wird es dienlich sein, die Störungsfunction und deren Differential nach $r$ möglichst zusammen zu ziehen. Zu dem Ende kann nicht blos jede Gruppe von Gliedern der Störungsfunction, die dieselbe Function von $g$ und $g'$ enthält, in zwei Glieder zusammen gezogen werden, von welchen das eine mit dem Cosinus und das andere mit dem Sinus dieser Function multiplicirt ist, sondern es können auch die negativen Werthe des Index $i$ auf entsprechende Weise in positive verwandelt werden, wobei jedoch vorläufig der Werth $i = 0$ ausgeschlossen werden muss. Bezeichnet man, um anzudeuten, ob in den Coefficienten (1), (2), etc. der Störungsfunction $i$ positiv oder negativ anzunehmen ist, diese mit $(1)_i$, $(2)_i$, etc., $(1)_{-i}$, $(2)_{-i}$ etc. und setzt

$$(-3,i,c) = (13)_{-i}\cos iK + (14)_{-i}\cos(i-1)K + (15)_{-i}\cos(i-2)K + (16)_{-i}\cos(i-3)K + (17)_{-i}\cos(iK-2\Pi) + (18)_{-i}\cos((i-1)K-2\Pi)$$

$$(-3,i,s) = (13)_{-i}\sin iK + (14)_{-i}\sin(i-1)K + (15)_{-i}\sin(i-2)K + (16)_{-i}\sin(i-3)K + (17)_{-i}\sin(iK-2\Pi) + (18)_{-i}\sin((i-1)K-2\Pi)$$

$$(-2,i,c) = (9)_{-i}\cos iK + (10)_{-i}\cos(i-1)K + (11)_{-i}\cos(i-2)K + (12)_{-i}\cos(iK-2\Pi)$$

$$(-2,i,s) = (9)_{-i}\sin iK + (10)_{-i}\sin(i-1)K + (11)_{-i}\sin(i-2)K + (12)_{-i}\sin(iK-2\Pi)$$

$$(-1,i,c) = (3)_{-i}\cos iK + (4)_{-i}\cos(i-1)K + (5)_{-i}\cos(i+1)K + (6)_{-i}\cos(i-2)K + (7)_{-i}\cos(iK-2\Pi) + (8)_{-i}\cos((i+1)K-2\Pi)$$

$$(-1,i,s) = (3)_{-i}\sin iK + (4)_{-i}\sin(i-1)K + (5)_{-i}\sin(i+1)K + (6)_{-i}\sin(i-2)K + (7)_{-i}\sin(iK-2\Pi) + (8)_{-i}\sin((i+1)K-2\Pi)$$

$$(0,i,c) = \{(1)_i + (1)_{-i}\}\cos iK + (2)_i\cos(i+1)K + (2)_{-i}\cos(i-1)K$$

$$(0,i,s) = \{(1)_i + (1)_{-i}\}\sin iK + (2)_i\sin(i+1)K + (2)_{-i}\sin(i-1)K$$

$$(1,i,c) = (3)_i\cos iK + (4)_i\cos(i+1)K + (5)_i\cos(i-1)K + (6)_i\cos(i+2)K + (7)_i\cos(iK+2\Pi) + (8)_i\cos((i-1)K+2\Pi)$$

$$(1,i,s) = (3)_i\sin iK + (4)_i\sin(i+1)K + (5)_i\sin(i-1)K + (6)_i\sin(i+2)K + (7)_i\sin(iK+2\Pi) + (8)_i\sin((i-1)K+2\Pi)$$

$$(2,i,c) = (9)_i\cos iK + (10)_i\cos(i+1)K + (11)_i\cos(i+2)K + (12)_i\cos(iK+2\Pi)$$

$$(2,i,s) = (9)_i\sin iK + (10)_i\sin(i+1)K + (11)_i\sin(i+2)K + (12)_i\sin(iK+2\Pi)$$

$$(3,i,c) = (13)_i\cos iK + (14)_i\cos(i+1)K + (15)_i\cos(i+2)K + (16)_i\cos(i+3)K + (17)_i\cos(iK+2\Pi) + (18)_i\cos((i+1)K+2\Pi)$$

$$(3,i,s) = (13)_i\sin iK + (14)_i\sin(i+1)K + (15)_i\sin(i+2)K + (16)_i\sin(i+3)K + (17)_i\sin(iK+2\Pi) + (18)_i\sin((i+1)K+2\Pi)$$

und eben so

$$(-3,i,c)' = (13)'_{-i}\cos iK + (14)'_{-i}\cos(i-1)K + (15)'_{-i}\cos(i-2)K + (16)'_{-i}\cos(i-3)K + (17)'_{-i}\cos(iK-2\Pi) + (18)'_{-i}\cos((i-1)K-2\Pi)$$

u. s. w., wo wie früher

$$K = \Pi - \Pi',$$

so erhält man, wenn wieder

$$\Gamma = g - g'$$

gesetzt wird:

$$\begin{aligned} a\Omega = \; & (-3,i,c)\cos(-3g+i\Gamma) && -(-3,i,s)\sin(-3g+i\Gamma) \\ & +(-2,i,c)\cos(-2g+i\Gamma) && -(-2,i,s)\sin(-2g+i\Gamma) \\ & +(-1,i,c)\cos(-g+i\Gamma) && -(-1,i,s)\sin(-g+i\Gamma) \\ & +(0,i,c)\cos i\Gamma && -(0,i,s)\sin i\Gamma \\ & +(1,i,c)\cos(g+i\Gamma) && -(1,i,s)\sin(g+i\Gamma) \\ & +(2,i,c)\cos(2g+i\Gamma) && -(2,i,s)\sin(2g+i\Gamma) \\ & +(3,i,c)\cos(3g+i\Gamma) && -(3,i,s)\sin(3g+i\Gamma) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) = \;& (-3,i,c)'\cos(-3g+i\Gamma) && -(-3,i,s)\sin(-3g+i\Gamma)\\
&+(-2,i,c)'\cos(-2g+i\Gamma) && -(-2,i,s)\sin(-2g+i\Gamma)\\
&+(-1,i,c)'\cos(-g+i\Gamma) && -(-1,i,s)\sin(-g+i\Gamma)\\
&+(0,i,c)'\cos i\Gamma && -(0,i,s)\sin i\Gamma\\
&+(1,i,c)'\cos(g+i\Gamma) && -(1,i,s)\sin(g+i\Gamma)\\
&+(2,i,c)'\cos(2g+i\Gamma) && -(2,i,s)\sin(2g+i\Gamma)\\
&+(3,i,c)'\cos(3g+i\Gamma) && -(3,i,s)\sin(3g+i\Gamma)
\end{aligned}
$$

woraus

$$
\begin{aligned}
a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right) = \;& -(i-3)(-3,i,c)\sin(-3g+i\Gamma) && -(i-3)(-3,i,s)\cos(-3g+i\Gamma)\\
&-(i-2)(-2,i,c)\sin(-2g+i\Gamma) && -(i-2)(-2,i,s)\cos(-2g+i\Gamma)\\
&-(i-1)(-1,i,c)\sin(-g+i\Gamma) && -(i-1)(-1,i,s)\cos(-g+i\Gamma)\\
&-i(0,i,c)\sin i\Gamma && -i(0,i,s)\cos i\Gamma\\
&-(i+1)(1,i,c)\sin(g+i\Gamma) && -(i+1)(1,i,s)\cos(g+i\Gamma)\\
&-(i+2)(2,i,c)\sin(2g+i\Gamma) && -(i+2)(2,i,s)\cos(2g+i\Gamma)\\
&-(i+3)(3,i,c)\sin(3g+i\Gamma) && -(i+3)(3,i,s)\cos(3g+i\Gamma)
\end{aligned}
$$

folgt.

## 30.

Multiplicirt man hierauf mit den im Art. 27 gegebenen Entwickelungen der Factoren $A$ und $B$, und setzt

$$
\begin{aligned}
(0,-3,i,s) &= -3(i-3)(-3,i,c)\\
(-1,-2,i,s) &= 2(i-3)(-3,i,c) && -(-3,i,c)'\\
&\quad -\tfrac{3}{2}e(i-2)(-2,i,c) && -\tfrac{1}{2}e(-2,i,c)'\\
&\quad +\tfrac{1}{48}e^3 i(0,i,c) && +\tfrac{1}{48}e^3(0,i,c)'\\
(1,-4,i,s) &= 2(i-3)(-3,i,c) && +(-3,i,c)'\\
&\quad +\tfrac{1}{2}e(i-2)(-2,i,c) && +\tfrac{1}{2}e(-2,i,c)'\\
&\quad +\tfrac{1}{4}e^2(i-1)(-1,i,c) && +\tfrac{3}{8}e^2(-1,i,c)'\\
&\quad +\tfrac{1}{6}e^3 i(0,i,c) && +\tfrac{1}{3}e^3(0,i,c)'\\
(0,-3,i,c) &= -3(i-3)(-3,i,s)\\
(-1,-2,i,c) &= 2(i-3)(-3,i,s) && -(-3,i,s)'\\
&\quad -\tfrac{3}{2}e(i-2)(-2,i,s) && -\tfrac{1}{2}e(-2,i,s)'\\
&\quad +\tfrac{1}{48}e^3 i(0,i,s) && +\tfrac{1}{48}e^3(0,i,s)'\\
(1,-4,i,c) &= 2(i-3)(-3,i,c) && +(-3,i,c)'\\
&\quad +\tfrac{1}{2}e(i-2)(-2,i,c) && +\tfrac{1}{2}e(-2,i,c)'\\
&\quad +\tfrac{1}{4}e^2(i-1)(-1,i,c) && +\tfrac{3}{8}e^2(-1,i,c)'\\
&\quad +\tfrac{1}{6}e^3 i(0,i,c) && +\tfrac{1}{3}e^3(0,i,c)'
\end{aligned}
$$

---

$$\begin{array}{rcrr}
(0,-2,i,s) & = & -3(i-2)(-2,i,c) & \\
(-1,-1,i,s) & = & 2(i-2)(-2,i,c) & -(-2,i,c)' \\
 & & -\tfrac{5}{2}e(i-1)(-1,i,c) & -\tfrac{1}{2}e(-1,i,c)' \\
(1,-3,i,s) & = & 2(i-2)(-2,i,c) & +(-2,i,c)' \\
 & & +\tfrac{1}{2}e(i-1)(-1,i,c) & +\tfrac{1}{2}e(-1,i,c)' \\
 & & +\tfrac{1}{4}e^2 i(0,i,c) & +\tfrac{3}{8}e^2(0,i,c)' \\
(0,-2,i,c) & = & -3(i-2)(-2,i,s) & \\
(-1,-1,i,c) & = & 2(i-2)(-2,i,s) & -(-2,i,s)' \\
 & & -\tfrac{5}{2}e(i-1)(-1,i,s) & -\tfrac{1}{2}e(-1,i,s)' \\
(1,-3,i,c) & = & 2(i-2)(-2,i,s) & +(-2,i,s)' \\
 & & +\tfrac{1}{2}e(i-1)(-1,i,s) & +\tfrac{1}{2}e(-1,i,s)' \\
 & & +\tfrac{1}{4}e^2 i(0,i,s) & +\tfrac{3}{8}e^2(0,i,s)'
\end{array}$$

---

$$\begin{array}{rcrr}
(0,-1,i,s) & = & -3(i-1)(-1,i,c) & \\
(-1,0,i,s) & = & \tfrac{1}{2}e(i-2)(-2,i,c) & -\tfrac{1}{2}e(-2,i,c)' \\
 & & +(2+e^2)(i-1)(-2,i,c) & -(1+\tfrac{1}{2}e^2)(-1,i,c)' \\
 & & -(\tfrac{5}{2}e+\tfrac{25}{16}e^3)\,i(0,i,c) & -(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{7}{16}e^3)(0,i,c)' \\
(1,-2,i,s) & = & -\tfrac{5}{2}e(i-2)(-2,i,c) & +\tfrac{1}{2}e(-2,i,c)' \\
 & & +(2+e^2)(i-1)(-1,i,c) & +(1+\tfrac{1}{2}e^2)(-1,i,c)' \\
 & & +(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{1}{8}e^3)\,i(0,i,c) & +(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{1}{8}e^3)(0,i,c)' \\
 & & +\tfrac{1}{4}e^2(i+1)(1,i,c) & +\tfrac{3}{8}e^2(1,i,c)' \\
(0,-1,i,c) & = & -3(i-1)(-1,i,s) & \\
(-1,0,i,c) & = & \tfrac{1}{2}e(i-2)(-2,i,s) & -\tfrac{1}{2}e(-2,i,s)' \\
 & & +(2+e^2)(i-1)(-1,i,s) & -(1+\tfrac{1}{2}e^2)(-1,i,s)' \\
 & & -(\tfrac{5}{2}e+\tfrac{25}{16}e^3)\,i(0,i,s) & -(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{7}{16}e^3)(0,i,s)' \\
(1,-2,i,c) & = & -\tfrac{5}{2}e(i-2)(-2,i,s) & +\tfrac{1}{2}e(-2,i,s)' \\
 & & +(2+e^2)(i-1)(-1,i,s) & +(1+\tfrac{1}{2}e^2)(-1,i,s)' \\
 & & +(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{1}{8}e^3)\,i(0,i,s) & +(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{1}{8}e^3)(0,i,s)' \\
 & & +\tfrac{1}{4}e^2(i+1)(1,i,s) & +\tfrac{3}{8}e^2(1,i,s)'
\end{array}$$

---

$$\begin{aligned}
(0,0,i,s) &= -3\,i\,(0,i,c) \\
(-1,1,i,s) &= \tfrac{1}{2}e\,(i-1)\,(-1,i,c) && -\tfrac{1}{2}e\,(-1,i,c)' \\
&\quad +(2+e^2)\,i\,(0,i,c) && -(1+\tfrac{1}{2}e^2)\,(0,i,c)' \\
&\quad -\tfrac{5}{2}e\,(i+1)\,(1,i,c) && -\tfrac{1}{2}e\,(1,i,c)' \\
(1,-1,i,s) &= -\tfrac{5}{2}e\,(i-1)\,(-1,i,c) && +\tfrac{1}{2}e\,(-1,i,c)' \\
&\quad +(2+e^2)\,i\,(0,i,c) && +(1+\tfrac{1}{2}e^2)\,(0,i,c)' \\
&\quad +\tfrac{1}{2}e\,(i+1)\,(1,i,c) && +\tfrac{1}{2}e\,(1,i,c)' \\
(0,0,i,c) &= -3\,i\,(0,i,s) \\
(-1,1,i,c) &= \tfrac{1}{2}e\,(i-1)\,(-1,i,s) && -\tfrac{1}{2}e\,(-1,i,s)' \\
&\quad +(2+e^2)\,i\,(0,i,s) && -(1+\tfrac{1}{2}e^2)\,(0,i,s)' \\
&\quad -\tfrac{5}{2}e\,(i+1)\,(1,i,s) && -\tfrac{1}{2}e\,(1,i,s)' \\
(1,-1,i,c) &= -\tfrac{5}{2}e\,(i-1)\,(-1,i,s) && +\tfrac{1}{2}e\,(-1,i,s)' \\
&\quad +(2+e^2)\,i\,(0,i,s) && +(1+\tfrac{1}{2}e^2)\,(0,i,s)' \\
&\quad +\tfrac{1}{2}e\,(i+1)\,(1,i,s) && +\tfrac{1}{2}e\,(1,i,s)'
\end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned}
(0,1,i,s) &= -3\,(i+1)\,(1,i,c) \\
(-1,2,i,s) &= \tfrac{1}{4}e^2(i-1)\,(-1,i,c) && -\tfrac{3}{8}e^2(-1,i,c)' \\
&\quad +(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{1}{8}e^3)\,i\,(0,i,c) && -(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{1}{8}e^3)\,(0,i,c)' \\
&\quad +(2+e^2)\,(i+1)\,(1,i,c) && -(1+\tfrac{1}{2}e^2)\,(1,i,c)' \\
&\quad -\tfrac{5}{2}e\,(i+2)\,(2,i,c) && -\tfrac{1}{2}e\,(2,i,c)' \\
(1,0,i,s) &= -(\tfrac{5}{2}e+\tfrac{25}{16}e^3)\,i\,(0,i,c) && +(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{7}{16}e^3)\,(0,i,c)' \\
&\quad +(2+e^2)\,(i+1)\,(1,i,c) && +(1+\tfrac{1}{2}e^2)\,(1,i,c)' \\
&\quad +\tfrac{1}{2}e\,(i+2)\,(2,i,c) && +\tfrac{1}{2}e\,(2,i,c)' \\
(0,1,i,c) &= -3\,(i+1)\,(1,i,s) \\
(-1,2,i,c) &= \tfrac{1}{4}e^2(i-1)\,(-1,i,s) && -\tfrac{3}{8}e^2(-1,i,s)' \\
&\quad +(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{1}{8}e^3)\,i\,(0,i,s) && -(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{1}{8}e^3)\,(0,i,s)' \\
&\quad +(2+e^2)\,(i+1)\,(1,i,s) && -(1+\tfrac{1}{2}e^2)\,(1,i,s)' \\
&\quad -\tfrac{5}{2}e\,(i+2)\,(2,i,s) && -\tfrac{1}{2}e\,(2,i,s)' \\
(1,0,i,c) &= -(\tfrac{5}{2}e+\tfrac{25}{16}e^3)\,i\,(0,i,s) && +(\tfrac{1}{2}e+\tfrac{7}{16}e^3)\,(0,i,s)' \\
&\quad +(2+e^2)\,(i+1)\,(1,i,s) && +(1+\tfrac{1}{2}e^2)\,(1,i,s)' \\
&\quad +\tfrac{1}{2}e\,(i+2)\,(2,i,s) && +\tfrac{1}{2}e\,(2,i,s)'
\end{aligned}$$

---

$$
\begin{aligned}
(0,2,i,s) &= -3(i+2)(2,i,c) \\
(-1,3,i,s) &= \tfrac{1}{4}e^2 i\,(0,i,c) - \tfrac{3}{8}e^2(0,i,c)' \\
&\quad + \tfrac{1}{2}e\,(i+1)(1,i,c) - \tfrac{1}{2}e\,(1,i,c)' \\
&\quad + 2(i+2)(2,i,c) - (2,i,c)' \\
(1,1,i,s) &= -\tfrac{5}{2}e\,(i+1)(1,i,c) + \tfrac{1}{2}e\,(1,i,c)' \\
&\quad + 2(i+2)(2,i,c) + (2,i,c)' \\
(0,2,i,c) &= -3(i+2)(2,i,s) \\
(-1,3,i,c) &= \tfrac{1}{4}e^2 i\,(0,i,s) - \tfrac{3}{8}e^2(0,i,s)' \\
&\quad + \tfrac{1}{2}e\,(i+1)(1,i,s) - \tfrac{1}{2}e\,(1,i,s)' \\
&\quad + 2(i+2)(2,i,s) - (2,i,s)' \\
(1,1,i,c) &= -\tfrac{5}{2}e\,(i+1)(1,i,s) + \tfrac{1}{2}e\,(1,i,s)' \\
&\quad + 2(i+2)(2,i,s) + (2,i,s)'
\end{aligned}
$$

---

$$
\begin{aligned}
(0,3,i,s) &= -3(i+3)(3,i,c) \\
(-1,4,i,s) &= \tfrac{1}{6}e^3 i\,(0,i,c) - \tfrac{1}{3}e^3(0,i,c)' \\
&\quad + \tfrac{1}{4}e^2(i+1)(1,i,c) - \tfrac{3}{8}e^2(1,i,c)' \\
&\quad + \tfrac{1}{2}e\,(i+2)(2,i,c) - \tfrac{1}{2}e\,(2,i,c)' \\
&\quad + 2(i+3)(3,i,c) - (3,i,c)' \\
(1,2,i,s) &= \tfrac{1}{48}e^3 i\,(0,i,c) - \tfrac{1}{48}e^3(0,i,c)' \\
&\quad - \tfrac{5}{2}e\,(i+2)(2,i,c) + \tfrac{1}{2}e\,(2,i,c)' \\
&\quad + 2(i+3)(3,i,c) + (3,i,c)' \\
(0,3,i,c) &= -3(i+3)(3,i,s) \\
(-1,4,i,c) &= \tfrac{1}{6}e^3 i\,(0,i,s) - \tfrac{1}{3}e^3(0,i,s)' \\
&\quad + \tfrac{1}{4}e^2(i+1)(1,i,s) - \tfrac{3}{8}e^2(1,i,s)' \\
&\quad + \tfrac{1}{2}e\,(i+2)(2,i,s) - \tfrac{1}{2}e\,(2,i,s)' \\
&\quad + 2(i+3)(3,i,s) - (3,i,s)' \\
(1,2,i,c) &= \tfrac{1}{48}e^3 i\,(0,i,s) - \tfrac{1}{48}e^3(0,i,s)' \\
&\quad - \tfrac{5}{2}e\,(i+2)(2,i,s) + \tfrac{1}{2}e\,(2,i,s)' \\
&\quad + 2(i+3)(3,i,s) + (3,i,s)'
\end{aligned}
$$

dann sind diese Grössen die Coefficienten von $dW$, aber mit entgegengesetzten Zeichen behaftet*).

---

*) Die vorstehenden Ausdrücke habe ich nur entwickelt, um ihre Zusammensetzung zu zeigen, empfehle sie aber nicht zur Anwendung. Wenn man die Zusammenziehungen des vorigen Artikels ausgeführt hat, dann ist es bei Weitem vortheilhafter, die Multiplicationen mit $A$ und $B$ mechanisch, so wie ich es früher gezeigt habe, auszuführen. Diese gehen leicht und sicher von statten, und man kann die stets vorhandenen, unmerklichen Glieder sofort erkennen und weglassen.

Wir schreiben ferner

$$1-\frac{n'}{n}=\mu$$

wo $n$ und $n'$ wieder die mittleren Bewegungen bedeuten, und

$$\{0,0,i,s\}=\frac{(0,0,i,s)}{i\mu}\,,\qquad \{-1,1,i,s\}=\frac{(-1,1,i,s)}{i\mu+1}$$

u. s. w., oder überhaupt, wenn man die beiden ersten Indices durch die allgemeinen Zeichen $p$ und $q$ ersetzt,

$$\{p,q,i,s\}=\frac{(p,q,i,s)}{i\mu+q}$$

$$\{p,q,i,c\}=\frac{(p,q,i,c)}{i\mu+q}$$

Alsdann sind diese Grössen die Coefficienten von $W$, und zwar haben die mit dem Index $s$ versehenen das wahre, die mit dem Index $c$ das entgegengesetzte Zeichen. Stellt man dieselben zusammen, und ergänzt die im Vorhergehenden weggelassenen Glieder durch den Satz des Art. 28, so erhält man*):

$$\begin{aligned}
W = \quad & \{0,-3,i,s\}\cos(-3g+i\Gamma) & & -\{0,-3,i,c\}\sin(-3g+i\Gamma)\\
& +\{-1,-2,i,s\}\cos(-\gamma-2g+i\Gamma) & & -\{-1,-2,i,c\}\sin(-\gamma-2g+i\Gamma)\\
& +\left.\begin{matrix}\frac{1}{2}e\{-1,-1,i,s\}\\ -\frac{1}{48}e^3\{1,-1,i,s\}\end{matrix}\right\}\cos(-2\gamma-g+i\Gamma) & & \left.\begin{matrix}-\frac{1}{2}e\{-1,-1,i,c\}\\ +\frac{1}{48}e^3\{1,-1,i,c\}\end{matrix}\right\}\sin(-2\gamma-g+i\Gamma)\\
& +\frac{3}{8}e^2\{-1,0,i,s\}\cos(-3\gamma+i\Gamma) & & -\frac{3}{8}e^2\{-1,0,i,c\}\sin(-3\gamma+i\Gamma)\\
& +\frac{1}{3}e^3\{-1,1,i,s\}\cos(-4\gamma+g+i\Gamma) & & -\frac{1}{3}e^3\{-1,1,i,c\}\sin(-4\gamma+g+i\Gamma)\\
& +\{1,-4,i,s\}\cos(\gamma-4g+i\Gamma) & & -\{1,-4,i,c\}\sin(\gamma-4g+i\Gamma)\\
\hline
& +\{0,-2,i,s\}\cos(-2g+i\Gamma) & & -\{0,-2,i,c\}\sin(-2g+i\Gamma)\\
& +\{-1,-1,i,s\}\cos(-\gamma-g+i\Gamma) & & -\{-1,-1,i,c\}\sin(-\gamma-g+i\Gamma)\\
& +\frac{1}{2}e\{-1,0,i,s\}\cos(-2\gamma+i\Gamma) & & -\frac{1}{2}e\{-1,0,i,c\}\sin(-2\gamma+i\Gamma)\\
& +\frac{3}{8}e^2\{-1,1,i,s\}\cos(-3\gamma+g+i\Gamma) & & -\frac{3}{8}e^2\{-1,1,i,c\}\sin(-3\gamma+g+i\Gamma)\\
& +\{1,-3,i,s\}\cos(\gamma-3g+i\Gamma) & & -\{1,-3,i,c\}\sin(\gamma-3g+i\Gamma)\\
\hline
\end{aligned}$$

*) Auch diese Integration und die einfache Berechnung der Ergänzungsglieder kann man sofort nach den oben empfohlenen mechanischen Multiplicationen vornehmen und ausführen.

$$+\{0,-1,i,s\}\cos(-g+i\Gamma) \qquad -\{0,-1,i,c\}\sin(-g+i\Gamma)$$
$$+\{-1,0,i,s\}\cos(-\gamma+i\Gamma) \qquad -\{-1,0,i,c\}\sin(-\gamma+i\Gamma)$$
$$+(\tfrac{1}{2}e-\tfrac{1}{8}e^3)\{-1,1,i,s\}\cos(-2\gamma+g+i\Gamma) \qquad -(\tfrac{1}{2}e-\tfrac{1}{8}e^3)\{-1,1,i,c\}\sin(-2\gamma+g+i\Gamma)$$
$$+\tfrac{3}{8}e^2\{-1,2,i,s\}\cos(-3\gamma+2g+i\Gamma) \qquad -\tfrac{3}{8}e^2\{-1,2,i,c\}\sin(-3\gamma+2g+i\Gamma)$$
$$+\{1,-2,i,s\}\cos(\gamma-2g+i\Gamma) \qquad -\{1,-2,i,c\}\sin(\gamma-2g+i\Gamma)$$
$$+\tfrac{1}{2}e\{1,-3,i,s\}\cos(2\gamma-3g+i\Gamma) \qquad -\tfrac{1}{2}e\{1,-3,i,c\}\sin(2\gamma-3g+i\Gamma)$$

---

$$+\{0,0,i,s\}\cos i\Gamma \qquad -\{0,0,i,c\}\sin i\Gamma$$
$$+\{-1,1,i,s\}\cos(-\gamma+g+i\Gamma) \qquad -\{-1,1,i,c\}\sin(-\gamma+g+i\Gamma)$$
$$+\tfrac{1}{2}e\{-1,2,i,s\}\cos(-2\gamma+2g+i\Gamma) \qquad -\tfrac{1}{2}e\{-1,2,i,c\}\sin(-2\gamma+2g+i\Gamma)$$
$$+\{1,-1,i,s\}\cos(\gamma-g+i\Gamma) \qquad -\{1,-1,i,c\}\sin(\gamma-g+i\Gamma)$$
$$+\tfrac{1}{2}e\{1,-2,i,s\}\cos(2\gamma-2g+i\Gamma) \qquad -\tfrac{1}{2}e\{1,-2,i,c\}\sin(2\gamma-2g+i\Gamma)$$

---

$$+\{0,1,i,s\}\cos(g+i\Gamma) \qquad -\{0,1,i,c\}\sin(g+i\Gamma)$$
$$+\{-1,2,i,s\}\cos(-\gamma+2g+i\Gamma) \qquad -\{-1,2,i,c\}\sin(-\gamma+2g+i\Gamma)$$
$$+\tfrac{1}{2}e\{-1,3,i,s\}\cos(-2\gamma+3g+i\Gamma) \qquad -\tfrac{1}{2}e\{-1,3,i,c\}\sin(-2\gamma+3g+i\Gamma)$$
$$+\{1,0,i,s\}\cos(\gamma+i\Gamma) \qquad -\{1,0,i,c\}\sin(\gamma+i\Gamma)$$
$$+(\tfrac{1}{2}e-\tfrac{1}{8}e^3)\{1,-1,i,s\}\cos(2\gamma-g+i\Gamma) \qquad -(\tfrac{1}{2}e-\tfrac{1}{8}e^3)\{1,-1,i,c\}\sin(2\gamma-g+i\Gamma)$$
$$+\tfrac{3}{8}e^2\{1,-2,i,s\}\cos(3\gamma-2g+i\Gamma) \qquad -\tfrac{3}{8}e^2\{1,-2,i,c\}\sin(3\gamma-2g+i\Gamma)$$

---

$$+\{0,2,i,s\}\cos(2g+i\Gamma) \qquad -\{0,2,i,c\}\sin(2g+i\Gamma)$$
$$+\{-1,3,i,s\}\cos(-\gamma+3g+i\Gamma) \qquad -\{-1,3,i,c\}\sin(-\gamma+3g+i\Gamma)$$
$$+\{1,1,i,s\}\cos(\gamma+g+i\Gamma) \qquad -\{1,1,i,c\}\sin(\gamma+g+i\Gamma)$$
$$+\tfrac{1}{2}e\{1,0,i,s\}\cos(2\gamma+i\Gamma) \qquad -\tfrac{1}{2}e\{1,0,i,c\}\sin(2\gamma+i\Gamma)$$
$$+\tfrac{3}{8}e^2\{1,-1,i,s\}\cos(3\gamma-g+i\Gamma) \qquad -\tfrac{3}{8}e^2\{1,-1,i,c\}\sin(3\gamma-g+i\Gamma)$$

---

$$+\{0,3,i,s\}\cos(3g+i\Gamma) \qquad -\{0,3,i,c\}\sin(3g+i\Gamma)$$
$$+\{-1,4,i,s\}\cos(-\gamma+4g+i\Gamma) \qquad -\{-1,4,i,c\}\sin(-\gamma+4g+i\Gamma)$$
$$+\{1,2,i,s\}\cos(\gamma+2g+i\Gamma) \qquad -\{1,2,i,c\}\sin(\gamma+2g+i\Gamma)$$
$$\left.\begin{matrix}+\frac{1}{2}e\{1,1,i,s\}\\ -\frac{1}{48}e^3\{-1,1,i,s\}\end{matrix}\right\}\cos(2\gamma+g+i\Gamma) \qquad \left.\begin{matrix}-\frac{1}{2}e\{1,1,i,c\}\\ +\frac{1}{48}e^3\{-1,1,i,c\}\end{matrix}\right\}\sin(2\gamma+g+i\Gamma)$$
$$+\frac{3}{8}e^2\{1,0,i,s\}\cos(3\gamma+i\Gamma) \qquad -\frac{3}{8}e^2\{1,0,i,c\}\sin(3\gamma+i\Gamma)$$
$$+\frac{1}{3}e^3\{1,-1,i,s\}\cos(4\gamma-g+i\Gamma) \qquad -\frac{1}{3}e^3\{1,-1,i,c\}\sin(4\gamma-g+i\Gamma)$$

---

## 31.

Verwandelt man nun $\gamma$ in $g$, oder mit anderen Worten, addirt man die Coefficienten jeder Abtheilung von $W$, und integrirt von Neuem, so ergiebt sich

$$n\delta z = \frac{\left.\begin{matrix}\{0,-3,i,s\}+\{-1,-2,i,s\}+\frac{1}{2}e\{-1,-1,i,s\}\\ -\frac{1}{48}e^3\{1,-1,i,s\}+\frac{3}{8}e^2\{-1,0,i,s\}+\frac{1}{3}e^3\{-1,1,i,s\}\\ +\{1,-4,i,s\}\end{matrix}\right\}}{i\mu-3}\sin(-3g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{matrix}\{0,-3,i,c\}+\{-1,-2,i,c\}+\frac{1}{2}e\{-1,-1,i,c\}\\ -\frac{1}{48}e^3\{1,-1,i,c\}+\frac{3}{8}e^2\{-1,0,i,c\}+\frac{1}{3}e^3\{-1,1,i,c\}\\ +\{1,-4,i,c\}\end{matrix}\right\}}{i\mu-3}\cos(-3g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{matrix}\{0,-2,i,s\}+\{-1,-1,i,s\}+\frac{1}{2}e\{-1,0,i,s\}\\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,1,i,s\}+\{1,-3,i,s\}\end{matrix}\right\}}{i\mu-2}\sin(-2g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{matrix}\{0,-2,i,c\}+\{-1,-1,i,c\}+\frac{1}{2}e\{-1,0,i,c\}\\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,1,i,c\}+\{1,-3,i,c\}\end{matrix}\right\}}{i\mu-2}\cos(-2g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{matrix}\{0,-1,i,s\}+\{-1,0,i,s\}+(\frac{1}{2}e-\frac{1}{8}e^3)\{-1,1,i,s\}\\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,2,i,s\}+\{1,-2,i,s\}+\frac{1}{2}e\{1,-3,i,s\}\end{matrix}\right\}}{i\mu-1}\sin(-g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{matrix}\{0,-1,i,c\}+\{-1,0,i,c\}+(\frac{1}{2}e-\frac{1}{8}e^3)\{-1,1,i,c\}\\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,2,i,c\}+\{1,-2,i,c\}+\frac{1}{2}e\{1,-3,i,c\}\end{matrix}\right\}}{i\mu-1}\cos(-g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{matrix}\{0,0,i,s\}+\{-1,1,i,s\}+\frac{1}{2}e\{-1,2,i,s\}\\ +\{1,-1,i,s\}+\frac{1}{2}e\{1,-2,i,s\}\end{matrix}\right\}}{i\mu}\sin i\Gamma$$

$$+\frac{\left.\begin{matrix}\{0,0,i,c\}+\{-1,1,i,c\}+\frac{1}{2}e\{-1,2,i,c\}\\ +\{1,-1,i,c\}+\frac{1}{2}e\{1,-2,i,c\}\end{matrix}\right\}}{i\mu}\cos i\Gamma$$

$$+\frac{\left.\begin{matrix}\{0,1,i,s\}+\{-1,2,i,s\}+\frac{1}{2}e\{-1,3,i,s\}\\ +\{1,0,i,s\}+(\frac{1}{2}e-\frac{1}{8}e^3)\{1,-1,i,s\}+\frac{3}{8}e^2\{1,-2,i,s\}\end{matrix}\right\}}{i\mu+1}\sin(g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{matrix}\{0,1,i,c\}+\{-1,2,i,c\}+\frac{1}{2}e\{-1,3,i,c\}\\ +\{1,0,i,c\}+(\frac{1}{2}e-\frac{1}{8}e^3)\{1,-1,i,c\}+\frac{3}{8}e^2\{1,-2,i,c\}\end{matrix}\right\}}{i\mu+1}\cos(g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{matrix}\{0,2,i,s\}+\{-1,3,i,s\}+\{1,1,i,s\}\\ +\frac{1}{2}e\{1,0,i,s\}+\frac{3}{8}e^2\{1,-1,i,s\}\end{matrix}\right\}}{i\mu+2}\sin(2g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{matrix}\{0,2,i,c\}+\{-1,3,i,c\}+\{1,1,i,c\}\\ +\frac{1}{2}e\{1,0,i,c\}+\frac{3}{8}e^2\{1,-1,i,c\}\end{matrix}\right\}}{i\mu+2}\cos(2g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{matrix}\{0,3,i,s\}+\{-1,4,i,s\}+\{1,2,i,s\}\\ +\frac{1}{2}e\{1,1,i,s\}-\frac{1}{48}e^3\{-1,1,i,s\}+\frac{3}{8}e^2\{1,0,i,s\}\\ +\frac{1}{3}e^3\{1,-1,i,s\}\end{matrix}\right\}}{i\mu+3}\sin(3g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{matrix}\{0,3,i,c\}+\{-1,4,i,c\}+\{1,2,i,c\}\\ +\frac{1}{2}e\{1,1,i,c\}-\frac{1}{48}e^3\{-1,1,i,c\}+\frac{3}{8}e^2\{1,0,i,c\}\\ +\frac{1}{3}e^3\{1,-1,i,c\}\end{matrix}\right\}}{i\mu+3}\cos(3g+i\Gamma)$$

Differentiirt man $W$ nach $\gamma$, addirt wieder die Coefficienten jeder Abtheilung, und integrirt von Neuem, so ergiebt sich, nachdem das Integral mit $-2$ dividirt worden ist:

$$\nu=\frac{\left.\begin{matrix}\{-1,-2,i,s\}+e\{-1,-1,i,s\}-\frac{1}{24}e^3\{1,-1,i,s\}\\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,0,i,s\}+\frac{1}{3}e^3\{-1,1,i,s\}-\{1,-4,i,s\}\end{matrix}\right\}}{2(i\mu-3)}\cos(-3g+i\Gamma)$$

$$-\frac{\left.\begin{matrix}\{-1,-2,i,c\}+e\{-1,-1,i,c\}-\frac{1}{24}e^3\{1,-1,i,c\}\\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,0,i,c\}+\frac{1}{3}e^3\{-1,1,i,c\}-\{1,-4,i,c\}\end{matrix}\right\}}{2(i\mu-3)}\sin(-3g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{array}{l}\{-1,-1,i,s\}+e\{-1,0,i,s\}+\frac{9}{8}e^2\{-1,1,i,s\}\\ -\{1,-3,i,s\}\end{array}\right\}}{2(i\mu-2)}\cos(-2g+i\Gamma)$$

$$-\frac{\left.\begin{array}{l}\{-1,-1,i,c\}+e\{-1,0,i,c\}+\frac{9}{8}e^2\{-1,1,i,c\}\\ -\{1,-3,i,c\}\end{array}\right\}}{2(i\mu-2)}\sin(-2g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{array}{l}\{-1,0,i,s\}+(e-\frac{1}{4}e^3)\{-1,1,i,s\}+\frac{9}{8}e^2\{-1,2,i,s\}\\ -\{1,-2,i,s\}-e\{1,-3,i,s\}\end{array}\right\}}{2(i\mu-1)}\cos(-g+i\Gamma)$$

$$-\frac{\left.\begin{array}{l}\{-1,0,i,c\}+(e-\frac{1}{4}e^3)\{-1,1,i,c\}+\frac{9}{8}e^2\{-1,2,i,c\}\\ -\{1,-2,i,c\}-e\{1,-3,i,c\}\end{array}\right\}}{2(i\mu-1)}\sin(-g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{array}{l}\{-1,1,i,s\}+e\{-1,2,i,s\}-\{1,-1,i,s\}\\ -e\{1,-2,i,s\}\end{array}\right\}}{2i\mu}\cos i\Gamma$$

$$-\frac{\left.\begin{array}{l}\{-1,1,i,c\}+e\{-1,2,i,c\}-\{1,-1,i,c\}\\ -e\{1,-2,i,c\}\end{array}\right\}}{2i\mu}\sin i\Gamma$$

$$+\frac{\left.\begin{array}{l}\{-1,2,i,s\}+e\{-1,3,i,s\}-\{1,0,i,s\}\\ -(e-\frac{1}{4}e^3)\{1,-1,i,s\}-\frac{9}{8}e^2\{1,-2,i,s\}\end{array}\right\}}{2(i\mu+1)}\cos(g+i\Gamma)$$

$$-\frac{\left.\begin{array}{l}\{-1,2,i,c\}+e\{-1,3,i,c\}-\{1,0,i,c\}\\ -(e-\frac{1}{4}e^3)\{1,-1,i,c\}-\frac{9}{8}e^2\{1,-2,i,c\}\end{array}\right\}}{2(i\mu+1)}\sin(g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{array}{l}\{-1,3,i,s\}-\{1,1,i,s\}-e\{1,0,i,s\}\\ -\frac{9}{8}e^2\{1,-1,i,s\}\end{array}\right\}}{2(i\mu+2)}\cos(2g+i\Gamma)$$

$$-\frac{\left.\begin{array}{l}\{-1,3,i,c\}-\{1,1,i,c\}-e\{1,0,i,c\}\\ -\frac{9}{8}e^2\{1,-1,i,c\}\end{array}\right\}}{2(i\mu+2)}\sin(2g+i\Gamma)$$

$$+\frac{\left.\begin{array}{l}\{-1,4,i,s\}-\{1,2,i,s\}-e\{1,1,i,s\}\\ +\frac{1}{24}e^3\{-1,1,i,s\}-\frac{9}{8}e^2\{1,0,i,s\}-\frac{4}{3}e^3\{1,-1,i,s\}\end{array}\right\}}{2(i\mu+3)}\cos(3g+i\Gamma)$$

$$-\frac{\left.\begin{array}{l}\{-1,4,i,c\}-\{1,2,i,c\}-e\{1,1,i,c\}\\ +\frac{1}{24}e^3\{-1,1,i,c\}-\frac{9}{8}e^2\{1,0,i,c\}-\frac{4}{3}e^3\{1,-1,i,c\}\end{array}\right\}}{2(i\mu+3)}\sin(3g+i\Gamma)$$

Ich wiederhole, dass diese Entwickelungen den Fall $i = 0$ ausschliessen, und dass man für $i$ nur die positiven Zahlen 1, 2, 3, etc. substituiren darf. Ich bemerke ferner, dass die im Vorhergehenden erklärte Berechnung von $W$, $n\delta z$ und $\nu$ äusserst einfach und regelmässig wird, wenn man sie abtheilungsweise in Bezug auf die Werthe von $i$ vornimmt, und alle Operationen, die sie verlangt, numerisch so ausführt, wie ich früher erklärt habe.

Die den Integralen hinzuzufügenden willkürlichen Constanten kommen hier nicht in Betracht, sondern finden erst weiter unten bei dem Falle $i = 0$ ihre Berücksichtigung.

---

## §. 3. Entwickelung der allgemeinen Störungen der dritten Coordinate.

32.

Die Störungen der dritten Coordinate erhält man durch die Integration der Gleichung

$$\frac{du}{n\,dt} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\frac{r}{a}\frac{\varrho}{a}\sin(\varphi - f)\,a^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)\cos i$$

nachdem im Integral $\tau$ in $t$ oder $\gamma$ in $g$ verwandelt worden ist. Ich bemerke hier, dass in diesem Ausdruck $i$ die Neigung der Bahnebene gegen die Fundamentalebene bedeutet, dass aber dieser Umstand nicht hindert, den in den Entwickelungen vorkommenden Index nach wie vor auch mit $i$ zu bezeichnen, da eine Verwechselung hier nicht möglich ist.

Gleichwie oben gezeigt wurde, dass $W$ von den Differentialen der Störungsfunction nach $g$, $f$ und $e$ abhängig gemacht werden kann, so könnte hier auch gezeigt werden, dass $\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)$ von den Differentialen der Störungsfunction nach $J$, $\Pi$, $\Pi'$ abhängig gemacht werden kann. Da aber bei Anwendung dieses Verfahrens $a\Omega$ auf zwei Ordnungen weiter, als oben geschehen ist, entwickelt werden müsste, um die hier festgesetzte Genauigkeit zu erhalten, so soll die eben aufgestellte Gleichung unmittelbar angewandt werden.

33.

Sei zur Abkürzung

$$C = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \frac{r}{a} \frac{\varrho}{a} \sin(\varphi - f)$$

womit, vorbehältlich der Verwandelung von $\gamma$ in $g$,

$$\frac{du}{\cos i\, n\, dt} = C a^2 \left(\frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right)$$

wird. Der Factor $C$ kann eben so wie die obigen Factoren $A$ und $B$ von $\varrho^2$ und $r^2$ nebst deren Differentialen abhängig gemacht werden, und man braucht nur die Glieder direct zu berechnen, die $\pm\gamma$ in ihren Argumenten enthalten. Die übrigen von $\gamma$ abhängigen Glieder können wieder durch den Satz des Art. 28, nach der Integration, berechnet werden, und die Werthe der Coefficienten $\eta^{(\varkappa)}$ und $\theta^{(\varkappa)}$ bleiben dieselben wie a. a. O.

Man kann hier noch einen Schritt weiter gehen und auch die Glieder, deren Argumente $\gamma$ nicht enthalten, aus denen, die $\pm\gamma$ enthalten, auf ähnliche Art ableiten. Um diess zu zeigen, nehme ich die Function

$$\Gamma = G\frac{\varrho}{a}\cos\varphi + H\frac{\varrho}{a}\sin\varphi$$

vor, in welcher $G$ und $H$ von $\gamma$ unabhängig sind, und von denen angenommen wird, dass sie sich in convergirende Reihen von der Form

$$G = 2\Sigma V \sin(\alpha t + \beta), \qquad H\sqrt{1-e^2} = 2\Sigma W \cos(\alpha t + \beta)$$

entwickeln lassen. Diese Function $\Gamma$ lässt sich nach der Verwandelung von $\gamma$ in $g$ mit $u$ identificiren. Da

$$2\frac{\varrho}{a}\cos\varphi = -\frac{\partial \cdot \varrho^2}{a^2 \partial e}, \qquad 2\frac{\varrho}{a}\sin\varphi = \frac{\partial \cdot \varrho^2}{a^2 e \partial \gamma}\sqrt{1-e^2}$$

sind, und

$$\frac{\varrho^2}{a^2} = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} R^{(\varkappa)} \cos\varkappa\gamma$$

gesetzt werden kann, so geht der Ausdruck von $\Gamma$ in den folgenden über

$$\Gamma = -\Sigma\Sigma_{-\infty}^{+\infty} \alpha^{(\varkappa)} \sin(\varkappa\gamma + \alpha t + \beta)$$

in welchem

$$\alpha^{(\varkappa)} = \frac{\partial R^{(\varkappa)}}{\partial e} V + \varkappa \frac{R^{(\varkappa)}}{e} W$$

ist. Setzt man hierin $\varkappa = 1$ und $\varkappa = -1$, so ergeben sich

$$\alpha^{(1)} = \frac{\partial R^{(1)}}{\partial e} V + \frac{R^{(1)}}{e} W$$

$$\alpha^{(-1)} = \frac{\partial R^{(1)}}{\partial e} V - \frac{R^{(1)}}{e} W.$$

woraus man

$$V = \frac{\alpha^{(1)} + \alpha^{(-1)}}{2 \frac{\partial R^{(1)}}{\partial e}}$$

zieht. Setzt man hierauf $\varkappa = 0$ in der allgemeinen Formel, so wird

$$\alpha^{(0)} = \frac{\partial R^{(0)}}{\partial e} V$$

oder nach der Elimination von $V$ durch den vorstehenden Ausdruck,

$$\alpha^{(0)} = \eta^{(0)} (\alpha^{(1)} + \alpha^{(-1)})$$

wenn

$$\eta^{(0)} = \frac{\frac{\partial R^{(0)}}{\partial e}}{2 \frac{\partial R^{(1)}}{\partial e}}$$

gesetzt wird. Da $\alpha^{(0)}$ den Gliedern entspricht, deren Argumente von $\gamma$ unabhängig sind, und $\alpha^{(1)}$ und $\alpha^{(-1)}$ den Gliedern angehören, die bez. $+\gamma$ und $-\gamma$ in ihren Argumenten enthalten, so kann man durch den eben erhaltenen Ausdruck jene aus diesen berechnen, es mögen die betreffenden Glieder mit einem Sinus oder einem Cosinus multiplicirt sein.

Die in Art. 27 angeführte Entwickelung von $\varrho^2$ giebt

$$\frac{\partial R^{(0)}}{\partial e} = 3e, \qquad \frac{\partial R^{(1)}}{\partial e} = -\left(1 - \frac{3}{8} e^2 \pm \ldots\right)$$

womit, nach Ergänzung der weggelassenen Glieder des zweiten Ausdrucks, der Ausdruck für $\eta^{(0)}$ mit jeder beliebigen Genauigkeit berechnet werden kann. Für unseren Zweck wird hinreichend genau

$$\eta^{(0)} = -\left(\frac{3}{2} e + \frac{9}{16} e^3\right)$$

### 34.

Der Ausdruck für $C$ des vorigen Art. geht nun zuerst über in

$$C = \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{\varrho}{a}\sin\varphi\,\frac{r}{a}\cos f - \frac{\varrho}{a}\cos\varphi\,\frac{r}{a}\sin f\right\}$$

welcher leicht in den folgenden verwandelt wird:

$$C = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\,.\,\varrho^2}{a^2\partial\,e}\right)\left(\frac{\partial\,.\,r^2}{a^2 e\,\partial\,g}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\,.\,\varrho^2}{a^2 e\,\partial\,\gamma}\right)\left(\frac{\partial\,.\,r^2}{a^2\partial\,e}\right)$$

Hieraus erhält man durch Hülfe der im Art. 27 gegebenen Entwickelungen, mit Rücksicht auf die Auseinandersetzungen des vorigen Art.

$$\begin{aligned}
C = &\quad (1-\tfrac{1}{2}e^2)\sin(\gamma-g)\\
&-(\tfrac{1}{2}e-\tfrac{3}{8}e^3)\sin(-\gamma+2g)\\
&-(\tfrac{3}{2}e-\tfrac{3}{16}e^3)\sin\gamma\\
&\qquad-\tfrac{3}{8}e^2\sin(-\gamma+3g)\\
&\qquad-\tfrac{1}{3}e^3\sin(-\gamma+4g)\\
&\qquad-\tfrac{1}{48}e^3\sin(\gamma+2g)
\end{aligned}$$

### 35.

Ziehen wir nun auch den Differentialquotienten der Störungsfunction nach $Z$ möglichst zusammen, und setzen zu dem Ende

$$\begin{aligned}
(-4,i,s) = &-(25)_{-i}\cos(iK-\Pi)-(26)_{-i}\cos((i-1)K-\Pi)-(27)_{-i}\cos((i-2)K-\Pi)\\
&-(28)_{-i}\cos((i-3)K-\Pi)-(29)_{-i}\cos(iK-3\Pi)-(30)_{-i}\cos((i-1)K-3\Pi)\\
(-4,i,c) = &-(25)_{-i}\sin(iK-\Pi)-(26)_{-i}\sin((i-1)K-\Pi)-(27)_{-i}\sin((i-2)K-\Pi)\\
&-(28)_{-i}\sin((i-3)K-\Pi)-(29)_{-i}\sin(iK-3\Pi)-(30)_{-i}\sin((i-1)K-3\Pi)\\
(-3,i,s) = &-(21)_{-i}\cos(iK-\Pi)-(22)_{-i}\cos((i-1)K-\Pi)-(23)_{-i}\cos((i-2)K-\Pi)\\
&-(24)_{-i}\cos(iK-3\Pi)\\
(-3,i,c) = &-(21)_{-i}\sin(iK-\Pi)-(22)_{-i}\sin((i-1)K-\Pi)-(23)_{-i}\sin((i-2)K-\Pi)\\
&=(24)_{-i}\sin(iK-3\Pi)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(-2,i,s) = & -(11)_{-i}\cos(iK-\Pi)-(12)_{-i}\cos((i-1)K-\Pi)-(13)_{-i}\cos((i+1)K-\Pi)\\
& -(14)_{-i}\cos((i-2)K-\Pi)-(15)_{-i}\cos(iK-3\Pi)-(16)_{-i}\cos((i+1)K-3\Pi)\\
& -(17)_{-i}\cos(iK+\Pi)-(18)_{-i}\cos((i-1)K+\Pi)-(19)_{-i}\cos((i-2)K+\Pi)\\
& -(20)_{-i}\cos((i-3)K+\Pi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-2,i,c) = & -(11)_{-i}\sin(iK-\Pi)-(12)_{-i}\sin((i-1)K-\Pi)-(13)_{-i}\sin((i+1)K-\Pi)\\
& -(14)_{-i}\sin((i-2)K-\Pi)-(15)_{-i}\sin(iK-3\Pi)-(16)_{-i}\sin((i+1)K-3\Pi)\\
& -(17)_{-i}\sin(iK+\Pi)-(18)_{-i}\sin((i-1)K+\Pi)-(19)_{-i}\sin((i-2)K+\Pi)\\
& -(20)_{-i}\sin((i-3)K+\Pi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-1,i,s) = & -(5)_{-i}\cos(iK-\Pi)-(6)_{-i}\cos((i-1)K-\Pi)-(7)_{-i}\cos((i+1)K-\Pi)\\
& -(8)_{-i}\cos(iK+\Pi)-(9)_{-i}\cos((i-1)K+\Pi)-(10)_{-i}\cos((i-2)K+\Pi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-1,i,c) = & -(5)_{-i}\sin(iK-\Pi)-(6)_{-i}\sin((i-1)K-\Pi)-(7)_{-i}\sin((i+1)K-\Pi)\\
& -(8)_{-i}\sin(iK+\Pi)-(9)_{-i}\sin((i-1)K+\Pi)-(10)_{-i}\sin((i-2)K+\Pi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(0,i,s) = & (1)_i\cos(iK+\Pi)+(2)_i\cos((i-1)K+\Pi)+(3)_i\cos((i+1)K+\Pi)\\
& +(4)_i\cos((i-2)K+\Pi)\\
& -(1)_{-i}\cos(iK-\Pi)-(2)_{-i}\cos((i+1)K-\Pi)-(3)_{-i}\cos((i-1)K-\Pi)\\
& -(4)_{-i}\cos((i+2)K-\Pi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(0,i,c) = & (1)_i\sin(iK+\Pi)+(2)_i\sin((i-1)K+\Pi)+(3)_i\sin((i+1)K+\Pi)\\
& +(4)_i\sin((i-2)K+\Pi)\\
& -(1)_{-i}\sin(iK-\Pi)-(2)_{-i}\sin((i+1)K-\Pi)-(3)_{-i}\sin((i-1)K-\Pi)\\
& -(4)_{-i}\sin((i+2)K-\Pi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1,i,s) = & (5)_i\cos(iK+\Pi)+(6)_i\cos((i+1)K+\Pi)+(7)_i\cos((i-1)K+\Pi)\\
& +(8)_i\cos(iK-\Pi)+(9)_i\cos((i+1)K-\Pi)+(10)_i\cos((i+2)K-\Pi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1,i,c) = & (5)_i\sin(iK+\Pi)+(6)_i\sin((i+1)K+\Pi)+(7)_i\sin((i-1)K+\Pi)\\
& +(8)_i\sin(iK-\Pi)+(9)_i\sin((i+1)K-\Pi)+(10)_i\sin((i+2)K-\Pi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2,i,s) = & (11)_i\cos(iK+\Pi)+(12)_i\cos((i+1)K+\Pi)+(13)_i\cos((i-1)K+\Pi)\\
& +(14)_i\cos((i+2)K+\Pi)+(15)_i\cos(iK+3\Pi)+(16)_i\cos((i-1)K+3\Pi)\\
& +(17)_i\cos(iK-\Pi)+(18)_i\cos((i+1)K-\Pi)+(19)_i\cos((i+2)K-\Pi)\\
& +(20)_i\cos((i+3)K-\Pi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2,i,c) = & (11)_i\sin(iK+\Pi)+(12)_i\sin((i+1)K+\Pi)+(13)_i\sin((i-1)K+\Pi)\\
& +(14)_i\sin((i+2)K+\Pi)+(15)_i\sin(iK+3\Pi)+(16)_i\sin((i-1)K+3\Pi)\\
& +(17)_i\sin(iK-\Pi)+(18)_i\sin((i+1)K-\Pi)+(19)_i\sin((i+2)K-\Pi)\\
& +(20)_i\sin((i+3)K-\Pi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3,i,s) = & (21)_i\cos(iK+\Pi)+(22)_i\cos((i+1)K+\Pi)+(23)_i\cos((i+2)K+\Pi)\\
& +(24)_i\cos(iK+3\Pi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(3,i,c) = & (21)_i\sin(iK+\Pi)+(22)_i\sin((i+1)K+\Pi)+(23)_i\sin((i+2)K+\Pi)\\
& +(24)_i\sin(iK+3\Pi)
\end{aligned}
$$

$$(4,i,s) = (25)_i \cos(iK+\Pi) + (26)_i \cos((i+1)K+\Pi) + (27)_i \cos((i+2)K+\Pi)$$
$$+ (28)_i \cos((i+3)K+\Pi) + (29)_i \cos(iK+3\Pi) + (30)_i \cos((i+1)K+3\Pi)$$
$$(4,i,c) = (25)_i \sin(iK+\Pi) + (26)_i \sin((i+1)K+\Pi) + (27)_i \sin((i+2)K+\Pi)$$
$$+ (28)_i \sin((i+3)K+\Pi) + (29)_i \sin(iK+3\Pi) + (30)_i \sin((i+1)K+3\Pi)$$

wo wie früher

$$K = \Pi - \Pi'$$

ist, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
a^2\left(\frac{\delta\Omega}{\delta Z}\right) = \quad & (-4,i,s)\sin(-4g+i\Gamma) && +(-4,i,c)\cos(-4g+i\Gamma)\\
+ & (-3,i,s)\sin(-3g+i\Gamma) && +(-3,i,c)\cos(-3g+i\Gamma)\\
+ & (-2,i,s)\sin(-2g+i\Gamma) && +(-2,i,c)\cos(-2g+i\Gamma)\\
+ & (-1,i,s)\sin(-g+i\Gamma) && +(-1,i,c)\cos(-g+i\Gamma)\\
+ & (0,i,s)\sin i\Gamma && +(0,i,c)\cos i\Gamma\\
+ & (1,i,s)\sin(g+i\Gamma) && +(1,i,c)\cos(g+i\Gamma)\\
+ & (2,i,s)\sin(2g+i\Gamma) && +(2,i,c)\cos(2g+i\Gamma)\\
+ & (3,i,s)\sin(3g+i\Gamma) && +(3,i,c)\cos(3g+i\Gamma)\\
+ & (4,i,s)\sin(4g+i\Gamma) && +(4,i,c)\cos(4g+i\Gamma)
\end{aligned}$$

wo wieder

$$\Gamma = g - g'$$

gesetzt worden ist.

## 36.

Die Ausführung der Multiplication mit $C$ giebt die folgenden Coefficienten des Products:

$$\begin{aligned}
(-1,-3,i,s) = & \ \tfrac{1}{2}(-4,i,s)\\
& -\tfrac{3}{4}e(-3,i,s)\\
& -\tfrac{1}{96}e^3(-1,i,s)\\
(1,-5,i,s) = & -\tfrac{1}{2}(-4,i,s)\\
& -\tfrac{1}{4}e(-3,i,s)\\
& -\tfrac{3}{16}e^2(-2,i,s)\\
& -\tfrac{1}{6}e^3(-1,i,s)\\
(-1,-3,i,c) = & \ \tfrac{1}{2}(-4,i,c)\\
& -\tfrac{3}{4}e(-3,i,c)\\
& -\tfrac{1}{96}e^3(-1,i,c)\\
(1,-5,i,c) = & -\tfrac{1}{2}(-4,i,c)\\
& -\tfrac{1}{4}e(-3,i,c)\\
& -\tfrac{3}{16}e^2(-2,i,c)\\
& -\tfrac{1}{6}e^3(-1,i,c)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(-1,-2,i,s) &= \tfrac{1}{2}(-3,i,s) \\
&\quad - \tfrac{3}{4}e\,(-2,i,s) \\
(1,-4,i,s) &= -\tfrac{1}{2}(-3,i,s) \\
&\quad - \tfrac{1}{4}e\,(-2,i,s) \\
&\quad - \tfrac{3}{16}e^2\,(-1,i,s) \\
(-1,-2,i,c) &= \tfrac{1}{2}(-3,i,c) \\
&\quad - \tfrac{3}{4}e\,(-2,i,c) \\
(1,-4,i,c) &= -\tfrac{1}{2}(-3,i,c) \\
&\quad - \tfrac{1}{4}e\,(-2,i,c) \\
&\quad - \tfrac{3}{16}e^2\,(-1,i,c)
\end{aligned}
$$

---

$$
\begin{aligned}
(-1,-1,i,s) &= \tfrac{1}{4}e\,(-3,i,s) \\
&\quad + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}e^2)(-2,i,s) \\
&\quad - (\tfrac{3}{4}e - \tfrac{3}{32}e^3)(-1,i,s) \\
&\quad - \tfrac{1}{96}e^3\,(1,i,s) \\
(1,-3,i,s) &= \tfrac{3}{4}e\,(-3,i,s) \\
&\quad - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}e^2)(-2,i,s) \\
&\quad - (\tfrac{1}{4}e - \tfrac{3}{16}e^3)(-1,i,s) \\
&\quad - \tfrac{3}{16}e^2\,(0,i,s) \\
&\quad - \tfrac{1}{6}e^3\,(1,i,s) \\
(-1,-1,i,c) &= \tfrac{1}{4}e\,(-3,i,c) \\
&\quad + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}e^2)(-2,i,c) \\
&\quad - (\tfrac{3}{4}e - \tfrac{3}{32}e^3)(-1,i,c) \\
&\quad - \tfrac{1}{96}e^3\,(1,i,c) \\
(1,-3,i,c) &= \tfrac{3}{4}e\,(-3,i,c) \\
&\quad - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}e^2)(-2,i,c) \\
&\quad - (\tfrac{1}{4}e - \tfrac{3}{16}e^3)(-1,i,c) \\
&\quad - \tfrac{3}{16}e^2\,(0,i,c) \\
&\quad - \tfrac{1}{6}e^3\,(1,i,c)
\end{aligned}
$$

---

$$
\begin{aligned}
(-1,0,i,s) = {} & \tfrac{1}{4} e\,(-2,i,s) \\
& + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} e^2)\,(-1,i,s) \\
& - \tfrac{3}{4} e\,(0,i,s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1,-2,i,s) = {} & \tfrac{3}{4} e\,(-2,i,s) \\
& - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} e^2)\,(-1,i,s) \\
& - \tfrac{1}{4} e\,(0,i,s) \\
& - \tfrac{3}{16} e^2\,(1,i,s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-1,0,i,c) = {} & \tfrac{1}{4} e\,(-2,i,c) \\
& + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} e^2)\,(-1,i,c) \\
& - \tfrac{3}{4} e\,(0,i,c)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1,-2,i,c) = {} & \tfrac{3}{4} e\,(-2,i,c) \\
& - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} e^2)\,(-1,i,c) \\
& - \tfrac{1}{4} e\,(0,i,c) \\
& - \tfrac{3}{16} e^2\,(1,i,c)
\end{aligned}
$$

---

$$
\begin{aligned}
(-1,1,i,s) = {} & \tfrac{3}{16} e^2\,(-2,i,s) \\
& + (\tfrac{1}{4} e - \tfrac{3}{16} e^3)\,(-1,i,s) \\
& + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} e^2)\,(0,i,s) \\
& - (\tfrac{3}{4} e - \tfrac{3}{32} e^3)\,(1,i,s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1,-1,i,s) = {} & (\tfrac{3}{4} e - \tfrac{3}{32} e^3)\,(-1,i,s) \\
& - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} e^2)\,(0,i,s) \\
& - (\tfrac{1}{4} e - \tfrac{3}{16} e^3)\,(1,i,s) \\
& - \tfrac{3}{16} e^2\,(2,i,s)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(-1,1,i,c) = {} & \tfrac{3}{16} e^2\,(-2,i,c) \\
& + (\tfrac{1}{4} e - \tfrac{3}{16} e^3)\,(-1,i,c) \\
& + (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} e^2)\,(0,i,c) \\
& - (\tfrac{3}{4} e - \tfrac{3}{32} e^3)\,(1,i,c)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(1,-1,i,c) = {} & (\tfrac{3}{4} e - \tfrac{3}{32} e^3)\,(-1,i,c) \\
& - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4} e^2)\,(0,i,c) \\
& - (\tfrac{1}{4} e - \tfrac{3}{16} e^3)\,(1,i,c) \\
& - \tfrac{3}{16} e^2\,(2,i,c)
\end{aligned}
$$

---

$$\begin{aligned}
(-1,2,i,s) = {} & \tfrac{3}{16}e^2(-1,i,s) \\
& +\tfrac{1}{4}e\,(0,i,s) \\
& +(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}e^2)(1,i,s) \\
& -\tfrac{3}{4}e\,(2,i,s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1,0,i,s) = {} & \tfrac{3}{4}e\,(0,i,s) \\
& -(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}e^2)(1,i,s) \\
& -\tfrac{1}{4}e\,(2,i,s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-1,2,i,c) = {} & \tfrac{3}{16}e^2(-1,i,c) \\
& +\tfrac{1}{4}e\,(0,i,c) \\
& +(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}e^2)(1,i,c) \\
& -\tfrac{3}{4}e\,(2,i,c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1,0,i,c) = {} & \tfrac{3}{4}e\,(0,i,c) \\
& -(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}e^2)(1,i,c) \\
& -\tfrac{1}{4}e\,(2,i,c)
\end{aligned}$$

---

$$\begin{aligned}
(-1,3,i,s) = {} & \tfrac{1}{6}e^3(-1,i,s) \\
& +\tfrac{3}{16}e^2(0,i,s) \\
& +(\tfrac{1}{4}e-\tfrac{3}{16}e^3)(1,i,s) \\
& +(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}e^2)(2,i,s) \\
& -\tfrac{3}{4}e\,(3,i,s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1,1,i,s) = {} & \tfrac{1}{96}e^3(-1,i,s) \\
& +(\tfrac{3}{4}e-\tfrac{3}{32}e^3)(1,i,s) \\
& -(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}e^2)(2,i,s) \\
& -\tfrac{1}{4}e\,(3,i,s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-1,3,i,c) = {} & \tfrac{1}{6}e^3(-1,i,c) \\
& +\tfrac{3}{16}e^2(0,i,c) \\
& +(\tfrac{1}{4}e-\tfrac{3}{16}e^3)(1,i,c) \\
& +(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}e^2)(2,i,c) \\
& -\tfrac{3}{4}e\,(3,i,c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1,1,i,c) = {} & \tfrac{1}{96}e^3(-1,i,c) \\
& +(\tfrac{3}{4}e-\tfrac{3}{32}e^3)(1,i,c) \\
& -(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{4}e^2)(2,i,c) \\
& -\tfrac{1}{4}e\,(3,i,c)
\end{aligned}$$

---

$$
\begin{aligned}
(-1,4,i,s) &= \tfrac{3}{16}e^2(1,i,s) \\
&\quad + \tfrac{1}{4}e\,(2,i,s) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(3,i,s) \\[4pt]
(1,2,i,s) &= \tfrac{3}{4}e\,(2,i,s) \\
&\quad - \tfrac{1}{2}(3,i,s) \\[4pt]
(-1,4,i,c) &= \tfrac{3}{16}e^2(1,i,c) \\
&\quad + \tfrac{1}{4}e\,(2,i,c) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(3,i,c) \\[4pt]
(1,2,i,c) &= \tfrac{3}{4}e\,(2,i,c) \\
&\quad - \tfrac{1}{2}(3,i,c)
\end{aligned}
$$

---

$$
\begin{aligned}
(-1,5,i,s) &= \tfrac{1}{6}e^3(1,i,s) \\
&\quad + \tfrac{3}{16}e^2(2,i,s) \\
&\quad + \tfrac{1}{4}e\,(3,i,s) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(4,i,s) \\[4pt]
(1,3,i,s) &= \tfrac{1}{96}e^3(1,i,s) \\
&\quad + \tfrac{3}{4}e\,(3,i,s) \\
&\quad - \tfrac{1}{2}(4,i,s) \\[4pt]
(-1,5,i,c) &= \tfrac{1}{6}e^3(1,i,c) \\
&\quad + \tfrac{3}{16}e^2(2,i,c) \\
&\quad + \tfrac{1}{4}e\,(3,i,c) \\
&\quad + \tfrac{1}{2}(4,i,c) \\[4pt]
(1,3,i,c) &= \tfrac{1}{96}e^3(1,i,c) \\
&\quad + \tfrac{3}{4}e\,(3,i,c) \\
&\quad - \tfrac{1}{2}(4,i,c)
\end{aligned}
$$

---

von welchen Coefficienten aber die mit dem Index $c$ behafteten das entgegengesetzte Zeichen haben. Ersetzt man nun wieder die beiden ersten Indices aller dieser Coefficienten durch die allgemeinen Zeichen $p$ und $q$, und schreibt

$$
\begin{aligned}
\{p,q,i,s\} &= \frac{(p,q,i,s)}{i\mu+q} \\
\{p,q,i,c\} &= \frac{(p,q,i,c)}{i\mu+q}
\end{aligned}
$$

so werden diese Grössen die Coefficienten des Integrals mit dem wahren Zeichen *).

## 37.

Stellen wir jetzt das Integral zusammen, ergänzen die im Vorhergehenden weggelassenen Glieder durch die Sätze der Artt. 28 und 33, und verwandeln darauf $\gamma$ in $g$, so bekommen wir:

$$\frac{u}{\cos i} = \left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e\{1,-4,i,s\} \\ +\{-1,-3,i,s\} \\ +\frac{1}{2}e\{-1,-2,i,s\} \\ -\frac{1}{48}e^3\{1,-2,i,s\} \\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,-1,i,s\} \\ +\frac{1}{3}e^3\{-1,0,i,s\} \\ +\{1,-5,i,s\} \end{array}\right\}\sin(-4g+i\Gamma) + \left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e\{1,-4,i,c\} \\ +\{-1,-3,i,c\} \\ +\frac{1}{2}e\{-1,-2,i,c\} \\ -\frac{1}{48}e^3\{1,-2,i,c\} \\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,-1,i,c\} \\ +\frac{1}{3}e^3\{-1,0,i,c\} \\ +\{1,-5,i,c\} \end{array}\right\}\cos(-4g+i\Gamma)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e\{1,-3,i,s\} \\ +\{-1,-2,i,s\} \\ +\frac{1}{2}e\{-1,-1,i,s\} \\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,0,i,s\} \\ +\{1,-4,i,s\} \end{array}\right\}\sin(-3g+i\Gamma) + \left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e\{1,-3,i,c\} \\ +\{-1,-2,i,c\} \\ +\frac{1}{2}e\{-1,-1,i,c\} \\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,0,i,c\} \\ +\{1,-4,i,c\} \end{array}\right\}\cos(-3g+i\Gamma)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -(\frac{3}{2}e+\frac{9}{16}e^3)\{1,-2,i,s\} \\ -\frac{3}{2}e\{-1,-2,i,s\} \\ +\{-1,-1,i,s\} \\ +(\frac{1}{2}e-\frac{1}{8}e^3)\{-1,0,i,s\} \\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,1,i,s\} \\ +\frac{1}{3}e^3\{-1,2,i,s\} \\ +\{1,-3,i,s\} \\ +\frac{1}{2}e\{1,-4,i,s\} \end{array}\right\}\sin(-2g+i\Gamma) + \left\{\begin{array}{r} -(\frac{3}{2}e+\frac{9}{16}e^3)\{1,-2,i,c\} \\ -\frac{3}{2}e\{-1,-2,i,c\} \\ +\{-1,-1,i,c\} \\ +(\frac{1}{2}e-\frac{1}{8}e^3)\{-1,0,i,c\} \\ +\frac{3}{8}e^2\{-1,1,i,c\} \\ +\frac{1}{3}e^3\{-1,2,i,c\} \\ +\{1,-3,i,c\} \\ +\frac{1}{2}e\{1,-4,i,c\} \end{array}\right\}\cos(-2g+i\Gamma)$$

*) Ich mache hier auf die Anmerkungen zum Art. 30 aufmerksam, deren Inhalt auch hier Anwendung findet.

$$+\left\{\begin{array}{r}-\tfrac{3}{2}e\{1,-1,i,s\}\\ -\tfrac{3}{2}e\{-1,-1,i,s\}\\ +\{-1,0,i,s\}\\ +\tfrac{1}{2}e\{-1,1,i,s\}\\ +\tfrac{3}{8}e^2\{-1,2,i,s\}\\ +\{1,-2,i,s\}\\ +\tfrac{1}{2}e\{1,-3,i,s\}\end{array}\right\}\sin(-g+i\Gamma)\quad+\left\{\begin{array}{r}-\tfrac{3}{2}e\{1,-1,i,c\}\\ -\tfrac{3}{2}e\{-1,-1,i,c\}\\ +\{-1,0,i,c\}\\ +\tfrac{1}{2}e\{-1,1,i,c\}\\ +\tfrac{3}{8}e^2\{-1,2,i,c\}\\ +\{1,-2,i,c\}\\ +\tfrac{1}{2}e\{1,-3,i,c\}\end{array}\right\}\cos(-g+i\Gamma)$$

$$+\left\{\begin{array}{r}-(\tfrac{3}{2}e+\tfrac{9}{16}e^3)\{1,0,i,s\}\\ -(\tfrac{3}{2}e+\tfrac{9}{16}e^3)\{-1,0,i,s\}\\ +\{-1,1,i,s\}\\ +(\tfrac{1}{2}e-\tfrac{1}{8}e^3)\{-1,2,i,s\}\\ +\tfrac{3}{8}e^2\{-1,3,i,s\}\\ +\{1,-1,i,s\}\\ +(\tfrac{1}{2}e-\tfrac{1}{8}e^3)\{1,-2,i,s\}\\ +\tfrac{3}{8}e^2\{1,-3,i,s\}\end{array}\right\}\sin i\Gamma\quad+\left\{\begin{array}{r}-(\tfrac{3}{2}e+\tfrac{9}{16}e^3)\{1,0,i,c\}\\ -(\tfrac{3}{2}e+\tfrac{9}{16}e^3)\{-1,0,i,c\}\\ +\{-1,1,i,c\}\\ +(\tfrac{1}{2}e-\tfrac{1}{8}e^3)\{-1,2,i,c\}\\ +\tfrac{3}{8}e^2\{-1,3,i,c\}\\ +\{1,-1,i,c\}\\ +(\tfrac{1}{2}e-\tfrac{1}{8}e^3)\{1,-2,i,c\}\\ +\tfrac{3}{8}e^2\{1,-3,i,c\}\end{array}\right\}\cos i\Gamma$$

$$+\left\{\begin{array}{r}-\tfrac{3}{2}e\{-1,1,i,s\}\\ -\tfrac{3}{2}e\{1,1,i,s\}\\ +\{-1,2,i,s\}\\ +\tfrac{1}{2}e\{-1,3,i,s\}\\ +\{1,0,i,s\}\\ +\tfrac{1}{2}e\{1,-1,i,s\}\\ +\tfrac{3}{8}e^2\{1,-2,i,s\}\end{array}\right\}\sin(g+i\Gamma)\quad+\left\{\begin{array}{r}-\tfrac{3}{2}e\{-1,1,i,c\}\\ -\tfrac{3}{2}e\{1,1,i,c\}\\ +\{-1,2,i,c\}\\ +\tfrac{1}{2}e\{-1,3,i,c\}\\ +\{1,0,i,c\}\\ +\tfrac{1}{2}e\{1,-1,i,c\}\\ +\tfrac{3}{8}e^2\{1,-2,i,c\}\end{array}\right\}\cos(g+i\Gamma)$$

$$+\left\{\begin{array}{r}-(\tfrac{3}{2}e+\tfrac{9}{16}e^3)\{-1,2,i,s\}\\ -\tfrac{3}{2}e\{1,2,i,s\}\\ +\{-1,3,i,s\}\\ +\tfrac{1}{2}e\{-1,4,i,s\}\\ +\{1,1,i,s\}\\ +(\tfrac{1}{2}e-\tfrac{1}{8}e^3)\{1,0,i,s\}\\ +\tfrac{3}{8}e^2\{1,-1,i,s\}\\ +\tfrac{1}{8}e^3\{1,-2,i,s\}\end{array}\right\}\sin(2g+i\Gamma)\quad+\left\{\begin{array}{r}-(\tfrac{3}{2}e+\tfrac{9}{16}e^3)\{-1,2,i,c\}\\ -\tfrac{3}{2}e\{1,2,i,c\}\\ +\{-1,3,i,c\}\\ +\tfrac{1}{2}e\{-1,4,i,c\}\\ +\{1,1,i,c\}\\ +(\tfrac{1}{2}e-\tfrac{1}{8}e^3)\{1,0,i,c\}\\ +\tfrac{3}{8}e^2\{1,-1,i,c\}\\ +\tfrac{1}{8}e^3\{1,-2,i,c\}\end{array}\right\}\cos(2g+i\Gamma)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e\{-1,3,i,s\} \\ +\{-1,4,i,s\} \\ +\{1,2,i,s\} \\ +\frac{1}{2}e\{1,1,i,s\} \\ +\frac{3}{8}e^2\{1,0,i,s\} \end{array}\right\}\sin(3g+i\Gamma) +\left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e\{-1,3,i,c\} \\ +\{-1,4,i,c\} \\ +\{1,2,i,c\} \\ +\frac{1}{2}e\{1,1,i,c\} \\ +\frac{3}{8}e^2\{1,0,i,c\} \end{array}\right\}\cos(3g+i\Gamma)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e\{-1,4,i,s\} \\ +\{-1,5,i,s\} \\ +\{1,3,i,s\} \\ +\frac{1}{2}e\{1,2,i,s\} \\ -\frac{1}{48}e^3\{-1,2,i,s\} \\ +\frac{3}{8}e^2\{1,1,i,s\} \\ +\frac{1}{3}e^3\{1,0,i,s\} \end{array}\right\}\sin(4g+i\Gamma) +\left\{\begin{array}{r} -\frac{3}{2}e\{-1,4,i,c\} \\ +\{-1,5,i,c\} \\ +\{1,3,i,c\} \\ +\frac{1}{2}e\{1,2,i,c\} \\ -\frac{1}{48}e^3\{-1,2,i,c\} \\ +\frac{3}{8}e^2\{1,1,i,c\} \\ +\frac{1}{3}e^3\{1,0,i,c\} \end{array}\right\}\cos(4g+i\Gamma)$$

Die am Ende des Art. 31 aufgestellten Bemerkungen gelten auch hier.

---

## §. 4. Entwickelung der Glieder der mittleren Länge und des Radius Vectors, die dem Falle $i = 0$ in den Coefficienten der Störungsfunction und deren Differentiale entsprechen.

### 38.

Gehen wir zum Falle $i = 0$ über, und entwickeln zuvörderst die demselben angehörigen Glieder der mittleren Länge und des Radius Vectors. Da sich in diesem Falle die Coefficienten der Endresultate leicht und einfach unmittelbar auf die $A_i$, $B_i$ und deren Differentialquotienten hinführen lassen, so soll die Zusammenziehung der Glieder erst am Schlusse der Entwickelungen vorgenommen werden. Setzt man sogleich $i = 0$ in dem Ausdruck des Art. 8 für $a\Omega$, so wird derselbe

$$
\begin{aligned}
a\Omega = \quad & (1) \\
& + (2) \cos K \\
& + (3) \cos g \\
& + (4) \cos (g+K) \\
& + (5) \cos (g-K) \\
& + (6) \cos (g+2K) \\
& + (7) \cos (g+2\Pi) \\
& + (8) \cos (g+\Pi+\Pi') \\
& + (9) \cos 2g \\
& + (10) \cos (2g+K) \\
& + (11) \cos (2g+2K) \\
& + (12) \cos (2g+2\Pi) \\
& + (13) \cos 3g \\
& + (14) \cos (3g+K) \\
& + (15) \cos (3g+2K) \\
& + (16) \cos (3g+3K) \\
& + (17) \cos (3g+2\Pi) \\
& + (18) \cos (3g+K+2\Pi)
\end{aligned}
$$

woraus

$$
\begin{aligned}
a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right) = \quad & [3] \sin g \\
& + [4] \sin (g+K) \\
& + [5] \sin (g-K) \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

folgt, wenn

$$[3] = -(3), \qquad [4] = -(4), \qquad [5] = -(5), \quad \text{etc.}$$
$$[9] = -2(9), \quad \text{etc.,} \qquad [13] = -3(13), \quad \text{etc.}$$

gesetzt werden. Eben so wird

$$
\begin{aligned}
ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) = \quad & (1)' \\
& + (2)' \cos K \\
& + (3)' \cos g \\
& + (4)' \cos (g+K) \\
& + (5)' \cos (g-K) \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

und in den Coefficienten dieser Ausdrücke ist ebenfalls $i = 0$ zu setzen.

39.

Die Ausdrücke dieser Coefficienten werden also nach dem Art. 10

$$[3] = e m'\alpha (1) A_0 + \frac{1}{8} e^3 m'\alpha \{(3) + 2(2) - 3(1)\} A_0$$
$$+ \frac{1}{4} e e'^2 m'\alpha \{(3) + 4(2) + 2(1)\} A_0 - e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \{(1) + (0)\} B_1$$

$$[4] = - e' m'\alpha \{(1) - (0)\} A_1 - \frac{1}{4} e^2 e' m'\alpha \{(3) + 3(2) - 4(1) + 4(0)\} A_1$$
$$- \frac{1}{8} e'^3 m'\alpha \{(3) + 5(2) + 2(1) - 2(0)\} A_1 + \frac{1}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha (1) \{B_0 + B_2\}$$

$$[5] = - \frac{1}{8} e^2 e' m'\alpha \{(3) + 3(2) - (1) + (0)\} A_1$$

$$[6] = \frac{1}{8} e e'^2 m'\alpha \{(3) + 4(2) - 8(1) + 8(0)\} A_2$$

$$[7] = \frac{1}{2} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \{(1) + 5(0)\} B_1$$

$$[8] = - \frac{1}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha (1) B_0$$

$$[9] = - \frac{1}{2} e^2 m'\alpha \{(2) - 2(1)\} A_0$$

$$[10] = e e' m'\alpha \{(2) - 2(1) + 2(0)\} A_1$$

$$[11] = - \frac{1}{2} e'^2 m'\alpha \{(2) - 2(1) + 2(0)\} A_2$$

$$[12] = - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha (0) B_1$$

$$[13] = \frac{1}{8} e^3 m'\alpha \{(3) - 6(2) + 9(1)\} A_0$$

$$[14] = - \frac{3}{8} e^2 e' m'\alpha \{(3) - 5(2) + 9(1) - 9(0)\} A_1$$

$$[15] = \frac{3}{8} e e'^2 m'\alpha \{(3) - 4(2) + 8(1) - 8(0)\} A_2$$

$$[16] = - \frac{1}{8} e'^3 m'\alpha \{(3) - 3(2) + 6(1) - 6(0)\} A_3$$

$$[17] = \frac{3}{2} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \{(1) - 3(0)\} B_1$$

$$[18] = - \frac{3}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha (1) B_2$$

und nach dem Art. 11

$$(1)' = m'\alpha (1) A_0 + \frac{1}{4} (e^2 + e'^2) m'\alpha \{(3) + 4(2) + 2(1)\} A_0 - \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \{(1) + (0)\} B_1$$

$$(2)' = - \frac{1}{2} e e' m'\alpha \{(3) + 4(2)\} A_1$$

$$(3)' = - e m'\alpha \{(2) + (1)\} A_0 - \frac{1}{8} e^3 m'\alpha \{(4) + 5(3) + (2) - 3(1)\} A_0$$
$$- \frac{1}{4} e e'^2 m'\alpha \{(4) + 7(3) + 10(2) + 2(1)\} A_0 + e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \{(2) + 3(1) + (0)\} B_1$$

$$(4)' = e' m'\alpha (2) A_1 + \frac{1}{4} e^2 e' m'\alpha \{(4) + 6(3) + 2(2)\} A_1$$
$$+ \frac{1}{8} e'^3 m'\alpha \{(4) + 8(3) + 12(2)\} A_1 - \frac{1}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m'\alpha \{(2) + 2(1)\} \{B_0 + B_2\}$$

$$(5)' = \frac{1}{8} e^2 e' m' \alpha \{(4) + 6(3) + 5(2)\} A_1$$

$$(6)' = -\frac{1}{8} e e'^2 m' \alpha \{(4) + 7(3)\} A_2$$

$$(7)' = -\frac{1}{2} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \{(2) + 7(1) + 5(0)\} B_1$$

$$(8)' = \frac{1}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \{(2) + 2(1)\} B_0$$

$$(9)' = \frac{1}{4} e^2 m' \alpha \{(3) \quad - 2(1)\} A_0$$

$$(10)' = -\frac{1}{2} e e' m' \alpha (3) A_1$$

$$(11)' = \frac{1}{4} e'^2 m' \alpha (3) A_2$$

$$(12)' = \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \{(1) + (0)\} B_1$$

$$(13)' = -\frac{1}{24} e^3 m' \alpha \{(4) - 3(3) - 3(2) + 9(1)\} A_0$$

$$(14)' = \frac{1}{8} e^2 e' m' \alpha \{(4) - 2(3) - (2)\} A_1$$

$$(15)' = -\frac{1}{8} e e'^2 m' \alpha \{(4) - (3)\} A_2$$

$$(16)' = \frac{1}{24} e'^3 m' \alpha (4) A_3$$

$$(17)' = -\frac{1}{2} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \{(2) - (1) - 3(0)\} B_1$$

$$(18)' = \frac{1}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \{(2) + 2(1)\} B_2$$

## 40.

Multiplicirt man nun die betreffenden Ausdrücke des vorvorigen Artikels mit den Factoren $A$ und $B$ des Art. 27, und setzt

$$(1,-1,1) = -(2+e^2)(1)' + 3e[3] - e(3)'$$

$$(-1,1,2) = (2)' - \frac{5}{2} e[4] + \frac{1}{2} e(4)'$$

$$(1,-1,2) = -(2)' + \frac{1}{2} e[4] - \frac{1}{2} e(4)'$$

$$(0,1,3) = -3[3]$$

$$(-1,2,3) = (e + \frac{1}{4} e^3)(1)' + (2 + \frac{3}{4} e^2)[3] + (1 + \frac{7}{8} e^2)(3)' - \frac{5}{2} e[9] + \frac{1}{2} e(9)'$$

$$(1,0,3) = -(e + \frac{7}{8} e^3)(1)' + (2 + e^2)[3] - (1 + \frac{1}{2} e^2)(3)' + \frac{1}{2} e[9] - \frac{1}{2} e(9)'$$

$$(0,1,4) = -3[4]$$

$$(-1,2,4) = \frac{1}{2} e(2)' + (2 + e^2)[4] + (1 + \frac{1}{2} e^2)(4)' - \frac{5}{2} e[10] + \frac{1}{2} e(10)'$$

$$(1,0,4) = -\frac{1}{2} e(2)' + (2 + e^2)[4] - (1 + \frac{1}{2} e^2)(4)' + \frac{1}{2} e[10] - \frac{1}{2} e(10)'$$

$$(0,1,5) = -3\,[5]$$

$$(-1,2,5) = \frac{1}{2}e\,(2)' - \frac{1}{4}e^2\,[4] + \frac{3}{8}e^2\,(4)' + 2\,[5] + (5)'$$

$$(1,0,5) = -\frac{1}{2}e\,(2)' + 2\,[5] - (5)'$$

$$(0,1,6) = -3\,[6]$$

$$(-1,2,6) = 2\,[6] + (6)' - \frac{5}{2}e\,[11] + \frac{1}{2}e\,(11)'$$

$$(1,0,6) = 2\,[6] - (6)' + \frac{1}{2}e\,[11] - \frac{1}{2}e\,(11)'$$

$$(0,1,7) = -3\,[7]$$

$$(-1,2,7) = 2\,[7] + (7)' - \frac{5}{2}e\,[12] + \frac{1}{2}e\,(12)'$$

$$(1,0,7) = 2\,[7] - (7)' + \frac{1}{2}e\,[12] - \frac{1}{2}e\,(12)'$$

$$(0,1,8) = -3\,[8]$$

$$(-1,2,8) = 2\,[8] + (8)'$$

$$(1,0,8) = 2\,[8] - (8)'$$

$$(0,2,9) = -3\,[9]$$

$$(-1,3,9) = \frac{3}{4}e^2\,(1)' + \frac{1}{2}e\,[3] + \frac{1}{2}e\,(3)' + 2\,[9] + (9)'$$

$$(1,1,9) = -\frac{5}{2}e\,[3] - \frac{1}{2}e\,(3)' + 2\,[9] - (9)'$$

$$(0,2,10) = -3\,[10]$$

$$(-1,3,10) = \frac{1}{2}e\,[4] + \frac{1}{2}e\,(4)' + 2\,[10] + (10)'$$

$$(1,1,10) = -\frac{5}{2}e\,[4] - \frac{1}{2}e\,(4)' + 2\,[10] - (10)'$$

$$(0,2,11) = -3\,[11]$$

$$(-1,3,11) = 2\,[11] + (11)'$$

$$(1,1,11) = 2\,[11] - (11)'$$

$$(0,2,12) = -3\,[12]$$

$$(-1,3,12) = 2\,[12] + (12)'$$

$$(1,1,12) = 2\,[12] - (12)'$$

$$(0,3,13) = -3\,[13]$$

$$(-1,4,13) = \frac{2}{3}e^3\,(1)' + \frac{1}{4}e^2\,[3] + \frac{3}{8}e^2\,(3)' + \frac{1}{2}e\,[9] + \frac{1}{2}e\,(9)' + 2\,[13] + (13)'$$

$$(1,2,13) = \frac{1}{24}e^3\,(1)' - \frac{5}{2}e\,[9] - \frac{1}{2}e\,(9)' + 2\,[13] - (13)'$$

$$(0,3,14) = -3[14]$$

$$(-1,4,14) = \frac{1}{4}e^2[4] + \frac{3}{8}e^2(4)' + \frac{1}{2}e[10] + \frac{1}{2}e(10)' + 2[14] + (14)'$$

$$(1,2,14) = -\frac{5}{2}e[10] - \frac{1}{2}e(10)' + 2[14] - (14)'$$

$$(0,3,15) = -3[15]$$

$$(-1,4,15) = \frac{1}{2}e[11] + \frac{1}{2}e(11)' + 2[15] + (15)'$$

$$(1,2,15) = -\frac{5}{2}e[11] - \frac{1}{2}e(11)' + 2[15] - (15)'$$

$$(0,3,16) = -3[16]$$

$$(-1,4,16) = 2[16] + (16)'$$

$$(1,2,16) = 2[16] - (16)'$$

$$(0,3,17) = -3[17]$$

$$(-1,4,17) = \frac{1}{2}e[12] + \frac{1}{2}e(12)' + 2[17] + (17)'$$

$$(1,2,17) = -\frac{5}{2}e[12] - \frac{1}{2}e(12)' + 2[17] - (17)'$$

$$(0,3,18) = -3[18]$$

$$(-1,4,18) = 2[18] + (18)'$$

$$(1,2,18) = 2[18] - (18)'$$

so wird

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{n\,dt} = \; & (1,-1,1)\sin(\gamma-g) \\
& + (-1,1,2)\sin(-\gamma+g+K) \\
& + (1,-1,2)\sin(\gamma-g+K) \\
& + (0,1,3)\sin g \\
& + (-1,2,3)\sin(-\gamma+2g) \\
& + (1,0,3)\sin\gamma \\
& + (0,1,4)\sin(g+K) \\
& + (-1,2,4)\sin(-\gamma+2g+K) \\
& + (1,0,4)\sin(\gamma+K) \\
& + (0,1,5)\sin(g-K) \\
& + (-1,2,5)\sin(-\gamma+2g-K) \\
& + (1,0,5)\sin(\gamma-K) \\
& + (0,1,6)\sin(g+2K) \\
& + (-1,2,6)\sin(-\gamma+2g+2K) \\
& + (1,0,6)\sin(\gamma+2K)
\end{aligned}$$

$$+(0,1,7)\sin(g+2\Pi)$$
$$+(-1,2,7)\sin(-\gamma+2g+2\Pi)$$
$$+(1,0,7)\sin(\gamma+2\Pi)$$

$$+(0,1,8)\sin(g+\Pi+\Pi')$$
$$+(-1,2,8)\sin(-\gamma+2g+\Pi+\Pi')$$
$$+(1,0,8)\sin(\gamma+\Pi+\Pi')$$

$$+(0,2,9)\sin 2g$$
$$+(-1,3,9)\sin(-\gamma+3g)$$
$$+(1,1,9)\sin(\gamma+g)$$

$$+(0,2,10)\sin(2g+K)$$
$$+(-1,3,10)\sin(-\gamma+3g+K)$$
$$+(1,1,10)\sin(\gamma+g+K)$$

$$+(0,2,11)\sin(2g+2K)$$
$$+(-1,3,11)\sin(-\gamma+3g+2K)$$
$$+(1,1,11)\sin(\gamma+g+2K)$$

$$+(0,2,12)\sin(2g+2\Pi)$$
$$+(-1,3,12)\sin(-\gamma+3g+2\Pi)$$
$$+(1,1,12)\sin(\gamma+g+2\Pi)$$

$$+(0,3,13)\sin 3g$$
$$+(-1,4,13)\sin(-\gamma+4g)$$
$$+(1,2,13)\sin(\gamma+2g)$$

$$+(0,3,14)\sin(3g+K)$$
$$+(-1,4,14)\sin(-\gamma+4g+K)$$
$$+(1,2,14)\sin(\gamma+2g+K)$$

$$+(0,3,15)\sin(3g+2K)$$
$$+(-1,4,15)\sin(-\gamma+4g+2K)$$
$$+(1,2,15)\sin(\gamma+2g+2K)$$

$$+(0,3,16)\sin(3g+3K)$$
$$+(-1,4,16)\sin(-\gamma+4g+3K)$$
$$+(1,2,16)\sin(\gamma+2g+3K)$$

$$+(0,3,17)\sin(3g+2\Pi)$$
$$+(-1,4,17)\sin(-\gamma+4g+2\Pi)$$
$$+(1,2,17)\sin(\gamma+2g+2\Pi)$$

$$+(0,3,18)\sin(3g+K+2\Pi)$$
$$+(-1,4,18)\sin(-\gamma+4g+K+2\Pi)$$
$$+(1,2,18)\sin(\gamma+2g+K+2\Pi)$$

## 41.

Die Substitution der Ausdrücke der [3], [4], etc., (1)′, (2)′, etc. in die Coefficienten von $dW$ giebt

$$(1,-1,1) = -2m'\alpha(1)A_0 - \tfrac{1}{2}e^2m'\alpha\{(3)+2(2)-4(1)\}A_0$$
$$-\tfrac{1}{2}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0 + 2\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+(0)\}B_1$$

$$(-1,1,2) = -\tfrac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-5(1)+5(0)\}A_1$$

$$(1,-1,2) = \tfrac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1$$

$$(0,1,3) = -3em'\alpha(1)A_0 - \tfrac{3}{8}e^3m'\alpha\{(3)+2(2)-3(1)\}A_0$$
$$-\tfrac{3}{4}ee'^2m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0 + 3e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+(0)\}B_1$$

$$(-1,2,3) = -em'\alpha\{(2)-2(1)\}A_0 - \tfrac{1}{8}e^3m'\alpha\{(4)\quad -14(2)+20(1)\}A_0$$
$$-\tfrac{1}{4}ee'^2m'\alpha\{(4)+4(3)-2(2)-4(1)\}A_0 + e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)\quad -2(0)\}B_1$$

$$(1,0,3) = em'\alpha\{(2)+2(1)\}A_0 + \tfrac{1}{8}e^3m'\alpha\{(4)+4(3)-(2)-2(1)\}A_0$$
$$+\tfrac{1}{4}ee'^2m'\alpha\{(4)+8(3)+14(2)+4(1)\}A_0 - e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1$$

$$(0,1,4) = 3e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1 + \tfrac{3}{4}e^2e'm'\alpha\{(3)+3(2)-4(1)+4(0)\}A_1$$
$$+\tfrac{3}{8}e'^3m'\alpha\{(3)+5(2)+2(1)-2(0)\}A_1 - \tfrac{3}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha(1)\{B_0+B_2\}$$

$$(-1,2,4) = e'm'\alpha\{(2)-2(1)+2(0)\}A_1 + \tfrac{1}{4}e^2e'\{(4)+2(3)-16(2)+24(1)-24(0)\}A_1$$
$$+\tfrac{1}{8}e'^3m'\alpha\{(4)+6(3)+2(2)-4(1)+4(0)\}A_1 - \tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha(2)\{B_0+B_2\}$$

$$(1,0,4) = -e'm'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1 - \tfrac{1}{4}e^2e'm'\alpha\{(4)+6(3)+4(2)\}A_1$$
$$-\tfrac{1}{8}e'^3m'\alpha\{(4)+10(3)+22(2)+4(1)-4(0)\}A_1 + \tfrac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}\{B_0+B_2\}$$

$$(0,1,5) = \tfrac{3}{8}e^2e'm'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1$$

$$(-1,2,5) = \tfrac{1}{8}e^2e'm'\alpha\{(4)+2(3)-6(2)+4(1)-4(0)\}A_1$$

$$(1,0,5) = -\tfrac{1}{8}e^2e'm'\alpha\{(4)+6(3)+3(2)-2(1)+2(0)\}A_1$$

$$(0,1,6) = -\tfrac{3}{8}ee'^2m'\alpha\{(3)+4(2)-8(1)+8(0)\}A_2$$

$$(-1,2,6) = -\tfrac{1}{8}ee'^2m'\alpha\{(4)+4(3)-18(2)+36(1)-36(0)\}A_2$$

$$(1,0,6) = \tfrac{1}{8}ee'^2m'\alpha\{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\}A_2$$

$$(0,1,7) = -\tfrac{3}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1$$

$$(-1,2,7) = -\tfrac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)-16(0)\}B_1$$

$$(1,0,7) = \tfrac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1$$

$$(0,1,8) = \frac{3}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J \, m'\alpha \, (1) \, B_0$$

$$(-1,2,8) = \frac{1}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J \, m'\alpha \, (2) \, B_0$$

$$(1,0,8) = -\frac{1}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J \, m'\alpha \{(2) + 4(1)\} B_0$$

$$(0,2,9) = \frac{3}{2} e^2 m'\alpha \{(2) - 2(1)\} A_0$$

$$(-1,3,9) = \frac{1}{4} e^2 m'\alpha \{(3) - 6(2) + 9(1)\} A_0$$

$$(1,1,9) = -\frac{1}{4} e^2 m'\alpha \{(3) + 2(2) - 2(1)\} A_0$$

$$(0,2,10) = -3 e e' m'\alpha \{(2) - 2(1) + 2(0)\} A_1$$

$$(-1,3,10) = -\frac{1}{2} e e' m'\alpha \{(3) - 5(2) + 9(1) - 9(0)\} A_1$$

$$(1,1,10) = \frac{1}{2} e e' m'\alpha \{(3) + 3(2) - 3(1) + 3(0)\} A_1$$

$$(0,2,11) = \frac{3}{2} e'^2 m'\alpha \{(2) - 2(1) + 2(0)\} A_2$$

$$(-1,3,11) = \frac{1}{4} e'^2 m'\alpha \{(3) - 4(2) + 8(1) - 8(0)\} A_2$$

$$(1,1,11) = -\frac{1}{4} e'^2 m'\alpha \{(3) + 4(2) - 8(1) + 8(0)\} A_2$$

$$(0,2,12) = 6 \sin^2 \tfrac{1}{2} J \, m'\alpha \, (0) \, B_1$$

$$(-1,3,12) = \sin^2 \tfrac{1}{2} J \, m'\alpha \{(1) - 3(0)\} B_1$$

$$(1,1,12) = -\sin^2 \tfrac{1}{2} J \, m'\alpha \{(1) + 5(0)\} B_1$$

$$(0,3,13) = -\frac{3}{8} e^3 m'\alpha \{(3) - 6(2) + 9(1)\} A_0$$

$$(-1,4,13) = -\frac{1}{24} e^3 m'\alpha \{(4) - 12(3) + 48(2) - 64(1)\} A_0$$

$$(1,2,13) = \frac{1}{24} e^3 m'\alpha \{(4) \quad - 9(2) + 10(1)\} A_0$$

$$(0,3,14) = \frac{9}{8} e^2 e' m'\alpha \{(3) - 5(2) + 9(1) - 9(0)\} A_1$$

$$(-1,4,14) = \frac{1}{8} e^2 e' m'\alpha \{(4) - 10(3) + 36(2) - 64(1) + 64(0)\} A_1$$

$$(1,2,14) = -\frac{1}{8} e^2 e' m'\alpha \{(4) + 2(3) - 11(2) + 14(1) - 14(0)\} A_1$$

$$(0,3,15) = -\frac{9}{8} e e'^2 m'\alpha \{(3) - 4(2) + 8(1) - 8(0)\} A_2$$

$$(-1,4,15) = -\frac{1}{8} e e'^2 m'\alpha \{(4) - 8(3) + 26(2) - 52(1) - 52(0)\} A_2$$

$$(1,2,15) = \frac{1}{8} e e'^2 m'\alpha \{(4) + 4(3) - 14(2) + 28(1) - 28(0)\} A_2$$

$$(0,3,16) = \frac{3}{8} e'^3 m'\alpha \{(3) - 3(2) + 6(1) - 6(0)\} A_3$$

$$(-1,4,16) = \frac{1}{24} e'^3 m'\alpha \{(4) - 6(3) + 18(2) - 36(1) + 36(0)\} A_3$$

$$(1,2,16) = -\frac{1}{24} e'^3 m'\alpha \{(4) + 6(3) - 18(2) + 36(1) - 36(0)\} A_3$$

$$(0,3,17) = -\frac{9}{2} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \{(1) - 3(0)\} B_1$$

$$(-1,4,17) = -\frac{1}{2} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \{(2) - 8(1) + 16(0)\} B_1$$

$$(1,2,17) = \frac{1}{2} e \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \{(2) + 4(1) - 12(0)\} B_1$$

$$(0,3,18) = \frac{9}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha (1) B_2$$

$$(-1,4,18) = \frac{1}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \{(2) - 4(1)\} B_2$$

$$(1,2,18) = -\frac{1}{2} e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \{(2) + 8(1)\} B_2$$

## 42.

Integrirt man nun den Ausdruck für $dW$ des vorvorigen Artikels und fügt sowohl nach dem Satz des Art. 28 die weggelassenen Glieder, wie die willkührliche Constante hinzu, so wird

$$\begin{aligned}
W = \quad & k_0 \\
& + (1,-1,1) \cos(\gamma - g) \\
& - \tfrac{1}{4} e (-1,2,3) \cos(2\gamma - 2g) \\
& \text{———————} \\
& - (-1,1,2) \cos(-\gamma + g + K) \\
& - \tfrac{1}{4} e (-1,2,4) \cos(-2\gamma + 2g + K) \\
& + (1,-1,2) \cos(\gamma - g + K) \\
& \text{———————} \\
& - (0,1,3) \cos g \\
& - \tfrac{1}{2} (-1,2,3) \cos(-\gamma + 2g) \\
& - \tfrac{1}{8} e (-1,3,9) \cos(-2\gamma + 3g) \\
& + (1,0,3)\, n t \sin \gamma \\
& + e k_1 \cos \gamma \\
& + (\tfrac{1}{2} e - \tfrac{1}{8} e^3)(1,-1,1) \cos(2\gamma - g) \\
& - \tfrac{3}{16} e^2 (-1,2,3) \cos(3\gamma - 2g) \\
& \text{———————} \\
& - (0,1,4) \cos(g + K) \\
& - \tfrac{1}{2} (-1,2,4) \cos(-\gamma + 2g + K) \\
& - \tfrac{1}{8} e (-1,3,10) \cos(-2\gamma + 3g + K) \\
& + (1,0,4)\, n t \sin(\gamma + K) \\
& + e' k_2 \cos(\gamma + K) \\
& + \tfrac{1}{2} e (1,-1,2) \cos(2\gamma - g + K) \\
& \text{———————}
\end{aligned}$$

$$-(0,1,5)\cos(g-K)$$
$$-\tfrac{1}{2}(-1,2,5)\cos(-\gamma+2g-K)$$
$$+(1,0,5)\,nt\sin(\gamma-K)$$
$$+e^2e'k_3\cos(\gamma-K)$$
$$-\tfrac{1}{2}e(-1,1,2)\cos(2\gamma-g-K)$$
$$-\tfrac{3}{16}e^2(-1,2,4)\cos(3\gamma-2g-K)$$

---

$$-(0,1,6)\cos(g+2K)$$
$$-\tfrac{1}{2}(-1,2,6)\cos(-\gamma+2g+2K)$$
$$-\tfrac{1}{6}e(-1,3,11)\cos(-2\gamma+3g+2K)$$
$$+(1,0,6)\,nt\sin(\gamma+2K)$$
$$+ee'^2k_4\cos(\gamma+2K)$$

---

$$-(0,1,7)\cos(g+2\Pi)$$
$$-\tfrac{1}{2}(-1,2,7)\cos(-\gamma+2g+2\Pi)$$
$$-\tfrac{1}{6}e(-1,3,12)\cos(-2\gamma+3g+2\Pi)$$
$$+(1,0,7)\,nt\sin(\gamma+2\Pi)$$
$$+e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,k_5\cos(\gamma+2\Pi)$$

---

$$-(0,1,8)\cos(g+\Pi+\Pi')$$
$$-\tfrac{1}{2}(-1,2,8)\cos(-\gamma+2g+\Pi+\Pi')$$
$$+(1,0,8)\,nt\sin(\gamma+\Pi+\Pi')$$
$$+e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,k_6\cos(\gamma+\Pi+\Pi')$$

---

$$-\tfrac{1}{2}(0,2,9)\cos 2g$$
$$-\tfrac{1}{3}(-1,3,9)\cos(-\gamma+3g)$$
$$-(1,1,9)\cos(\gamma+g)$$
$$+\tfrac{1}{2}e(1,0,3)\,nt\sin 2\gamma$$
$$+\tfrac{1}{2}e^2k_1\cos 2\gamma$$
$$+\tfrac{3}{8}e^2(1,-1,1)\cos(3\gamma-g)$$

---

$$-\tfrac{1}{2}(0,2,10)\cos(2g+K)$$
$$-\tfrac{1}{3}(-1,3,10)\cos(-\gamma+3g+K)$$
$$-(1,1,10)\cos(\gamma+g+K)$$
$$+\tfrac{1}{2}e(1,0,4)\,nt\sin(2\gamma+K)$$
$$+\tfrac{1}{2}ee'k_2\cos(2\gamma+K)$$

---

$$-\tfrac{1}{2}(0,2,11)\cos(2g+2K)$$
$$-\tfrac{1}{3}(-1,3,11)\cos(-\gamma+3g+2K)$$
$$-(1,1,11)\cos(\gamma+g+2K)$$

---

$$-\tfrac{1}{2}(0,2,12)\cos(2g+2\Pi)$$
$$-\tfrac{1}{3}(-1,3,12)\cos(-\gamma+3g+2\Pi)$$
$$-(1,1,12)\cos(\gamma+g+2\Pi)$$

---

$$-\tfrac{1}{3}(0,3,13)\cos 3g$$
$$-\tfrac{1}{4}(-1,4,13)\cos(-\gamma+4g)$$
$$-\tfrac{1}{2}(1,2,13)\cos(\gamma+2g)$$
$$\left.\begin{matrix}-\tfrac{1}{2}e(1,1,9)\\ -\tfrac{1}{48}e^3(1,-1,1)\end{matrix}\right\}(\cos 2\gamma+g)$$
$$+\tfrac{3}{8}e^2(1,0,3)\,nt\sin 3\gamma$$
$$+\tfrac{3}{8}e^3k_1\cos 3\gamma$$
$$+\tfrac{1}{3}e^3(1,-1,1)\cos(4\gamma-g)$$

---

$$-\tfrac{1}{3}(0,3,14)\cos(3g+K)$$
$$-\tfrac{1}{4}(-1,4,14)\cos(-\gamma+4g+K)$$
$$-\tfrac{1}{2}(1,2,14)\cos(\gamma+2g+K)$$
$$-\tfrac{1}{2}e(1,1,10)\cos(2\gamma+g+K)$$
$$+\tfrac{3}{8}e^2(1,0,4)\,nt\sin(3\gamma+K)$$
$$+\tfrac{3}{8}e^2e'k_2\cos(3\gamma+K)$$

---

$$-\tfrac{1}{3}(0,3,15)\cos(3g+2K)$$
$$-\tfrac{1}{4}(-1,4,15)\cos(-\gamma+4g+2K)$$
$$-\tfrac{1}{2}(1,2,15)\cos(\gamma+2g+2K)$$
$$-\tfrac{1}{2}e(1,1,11)\cos(2\gamma+g+2K)$$

---

$$-\tfrac{1}{3}(0,3,16)\cos(3g+3K)$$
$$-\tfrac{1}{4}(-1,4,16)\cos(-\gamma+4g+3K)$$
$$-\tfrac{1}{2}(1,2,16)\cos(\gamma+2g+3K)$$

---

$$-\tfrac{1}{3}(0,3,17)\cos(3g+2\Pi)$$
$$-\tfrac{1}{4}(-1,4,17)\cos(-\gamma+4g+2\Pi)$$
$$-\tfrac{1}{2}(1,2,17)\cos(\gamma+2g+2\Pi)$$
$$-\tfrac{1}{2}e(1,1,12)\cos(2\gamma+g+2\Pi)$$

---

$$-\tfrac{1}{3}(0,3,18)\cos(3g+K+2\Pi)$$
$$-\tfrac{1}{4}(-1,4,18)\cos(-\gamma+4g+K+2\Pi)$$
$$-\tfrac{1}{2}(1,2,18)\cos(\gamma+2g+K+2\Pi)$$

---

wo der willkührlichen Constante die Form

$$k_0 + e k_1 \cos\gamma + e' k_2 \cos(\gamma + K) + e^2 e' k_3 \cos(\gamma - K) + e e'^2 k_4 \cos(\gamma + 2K)$$
$$+ e \sin^2 \tfrac{1}{2} J k_5 \cos(\gamma + 2\Pi) + e' \sin^2 \tfrac{1}{2} J k_6 \cos(\gamma + \Pi + \Pi')$$

gegeben worden ist, deren Glieder ebenfalls dem Satze des Art. 28 unterworfen sind.

## 43.

Die Verwandelung von $\gamma$ in $g$, und die darauf auszuführende Integration giebt nun:

$$n\delta z = \left\{ \begin{array}{l} k_0 + (1,-1,1) - \tfrac{1}{4} e(-1,2,3) \\ - [(-1,1,2) + \tfrac{1}{4} e(-1,2,4) - (1,-1,2)] \cos K \end{array} \right\} nt$$
$$- (1,0,3)\, nt \cos g$$
$$- (1,0,4)\, nt \cos(g+K)$$
$$- (1,0,5)\, nt \cos(g-K)$$
$$- (1,0,6)\, nt \cos(g+2K)$$
$$- (1,0,7)\, nt \cos(g+2\Pi)$$
$$- (1,0,8)\, nt \cos(g+\Pi+\Pi')$$
$$- \tfrac{1}{2} e(1,0,3)\, nt \cos 2g$$
$$- \tfrac{1}{2} e(1,0,4)\, nt \cos(2g+K)$$
$$- \tfrac{3}{8} e^2 (1,0,3)\, nt \cos 3g$$
$$- \tfrac{3}{8} e^2 (1,0,3)\, nt \cos(3g+K)$$

$$+ \left\{ \begin{array}{r} -(0,1,3) \\ -\tfrac{1}{2}(-1,2,3) \\ -\tfrac{1}{8} e(-1,3,9) \\ +(1,0,3) \\ + e k_1 \\ +(\tfrac{1}{2} e - \tfrac{1}{8} e^3)(1,-1,1) \\ -\tfrac{3}{16} e^2 (-1,2,3) \end{array} \right\} \sin g$$

$$+ \left\{ \begin{array}{r} -(0,1,4) \\ -\tfrac{1}{2}(-1,2,4) \\ -\tfrac{1}{8} e(-1,3,10) \\ +(1,0,4) \\ + e' k_2 \\ +\tfrac{1}{2} e(1,-1,2) \end{array} \right\} \sin(g+K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -(0,1,5) \\ -\tfrac{1}{2}(-1,2,5) \\ +(1,0,5) \\ +e^2e'k_3 \\ -\tfrac{1}{2}e\,(-1,1,2) \\ -\tfrac{3}{16}e^2(-1,2,4) \end{array}\right\}\sin(g-K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -(0,1,6) \\ -\tfrac{1}{2}(-1,2,6) \\ -\tfrac{1}{6}e\,(-1,3,11) \\ +(1,0,6) \\ +ee'^2k_4 \end{array}\right\}\sin(g+2K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -(0,1,7) \\ -\tfrac{1}{2}(-1,2,7) \\ -\tfrac{1}{6}e\,(-1,3,12) \\ +(1,0,7) \\ +e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,k_5 \end{array}\right\}\sin(g+2\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -(0,1,8) \\ -\tfrac{1}{2}(-1,2,8) \\ +(1,0,8) \\ +e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,k_6 \end{array}\right\}\sin(g+\Pi+\Pi')$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\tfrac{1}{4}(0,2,9) \\ -\tfrac{1}{6}(-1,3,9) \\ -\tfrac{1}{2}(1,1,9) \\ +\tfrac{1}{8}e\,(1,0,3) \\ +\tfrac{1}{4}e^2k_1 \\ +\tfrac{3}{16}e^2(1,-1,1) \end{array}\right\}\sin 2g$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\tfrac{1}{4}(0,2,10) \\ -\tfrac{1}{6}(-1,3,10) \\ -\tfrac{1}{2}(1,1,10) \\ +\tfrac{1}{8}e\,(1,0,4) \\ +\tfrac{1}{4}ee'k \end{array}\right\}\sin(2g+K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r}-\frac{1}{4}(0,2,11)\\-\frac{1}{6}(-1,3,11)\\-\frac{1}{2}(1,1,11)\end{array}\right\}\sin(2g+2K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r}-\frac{1}{4}(0,2,12)\\-\frac{1}{6}(-1,3,12)\\-\frac{1}{2}(1,1,12)\end{array}\right\}\sin(2g+2\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{r}-\frac{1}{9}(0,3,13)\\-\frac{1}{12}(-1,4,13)\\-\frac{1}{6}(1,2,13)\\-\frac{1}{6}e(1,1,9)\\+\frac{1}{24}e^2(1,0,3)\\+\frac{1}{8}e^3k_1\\+\frac{5}{48}e^3(1,-1,1)\end{array}\right\}\sin 3g$$

$$+\left\{\begin{array}{r}-\frac{1}{9}(0,3,14)\\-\frac{1}{12}(-1,4,14)\\-\frac{1}{6}(1,2,14)\\-\frac{1}{6}e(1,1,10)\\+\frac{1}{24}e^2(1,0,4)\\+\frac{1}{8}e^2e'k_2\end{array}\right\}\sin(3g+K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r}-\frac{1}{9}(0,3,15)\\-\frac{1}{12}(-1,4,15)\\-\frac{1}{6}(1,2,15)\\-\frac{1}{6}e(1,1,11)\end{array}\right\}\sin(3g+2K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r}-\frac{1}{9}(0,3,16)\\-\frac{1}{12}(-1,4,16)\\-\frac{1}{6}(1,2,16)\end{array}\right\}\sin(3g+3K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r}-\frac{1}{9}(0,3,17)\\-\frac{1}{12}(-1,4,17)\\-\frac{1}{6}(1,2,17)\\-\frac{1}{6}e(1,1,12)\end{array}\right\}\sin(3g+2\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{r}-\frac{1}{9}(0,3,18)\\-\frac{1}{12}(-1,4,18)\\-\frac{1}{6}(1,2,18)\end{array}\right\}\sin(3g+K+2\Pi)$$

### 44.

Nach der Differentiation von $W$ nach $\gamma$, der Verwandelung von $\gamma$ in $g$, und der erneueten Integration bekommt man für die Störungen des Radius Vectors den folgenden Ausdruck:

$$
\begin{aligned}
2\nu = 2C + \{(-1,1,2) + \tfrac{1}{2}e(-1,2,4) + (1,-1,2)\}\, nt \sin K \\
- (1,0,3)\, nt \sin g \\
- (1,0,4)\, nt \sin (g+K) \\
- (1,0,5)\, nt \sin (g-K) \\
- (1,0,6)\, nt \sin (g+2K) \\
- (1,0,7)\, nt \sin (g+2\Pi) \\
- (1,0,8)\, nt \sin (g+\Pi+\Pi') \\
- \tfrac{1}{2}e(1,0,3)\, nt \sin 2g \\
- \tfrac{1}{2}e(1,0,4)\, nt \sin (2g+K) \\
- \tfrac{3}{8}e^2(1,0,3)\, nt \sin 3g \\
- \tfrac{3}{8}e^2(1,0,4)\, nt \sin (3g+K)
\end{aligned}
$$

$$
+\left\{\begin{array}{r}
-\tfrac{1}{2}(-1,2,3) \\
-\tfrac{1}{3}e(-1,3,9) \\
-(1,0,3) \\
-e k_1 \\
-(e-\tfrac{1}{4}e^3)(1,-1,1) \\
+\tfrac{9}{16}e^2(-1,2,3)
\end{array}\right\}\cos g
$$

$$
+\left\{\begin{array}{r}
-\tfrac{1}{2}(-1,2,4) \\
-\tfrac{1}{3}e(-1,3,10) \\
-(1,0,4) \\
-e'k_2 \\
-e(1,-1,2)
\end{array}\right\}\cos (g+K)
$$

$$
+\left\{\begin{array}{r}
-\tfrac{1}{2}(-1,2,5) \\
-(1,0,5) \\
-e^2 e' k_3 \\
+e(-1,1,2) \\
+\tfrac{9}{16}e^2(-1,2,4)
\end{array}\right\}\cos (g-K)
$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\tfrac{1}{2}(-1,2,6) \\ -\tfrac{1}{3}e(-1,3,11) \\ -(1,0,6) \\ -ee'^2k_4 \end{array}\right\}\cos(g+2K')$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\tfrac{1}{2}(-1,2,7) \\ -\tfrac{1}{3}e(-1,3,12) \\ -(1,0,7) \\ -e\sin^2\tfrac{1}{2}Jk_5 \end{array}\right\}\cos(g+2\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\tfrac{1}{2}(-1,2,8) \\ -(1,0,8) \\ -e'\sin^2\tfrac{1}{2}Jk_6 \end{array}\right\}\cos(g+\Pi+\Pi')$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\tfrac{1}{6}(-1,3,9) \\ +\tfrac{1}{2}(1,1,9) \\ -\tfrac{1}{4}e(1,0,3) \\ -\tfrac{1}{2}e^2k_1 \\ -\tfrac{9}{16}e^2(1,-1,1) \end{array}\right\}\cos 2g$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\tfrac{1}{6}(-1,3,10) \\ +\tfrac{1}{2}(1,1,10) \\ -\tfrac{1}{4}e(1,0,4) \\ -\tfrac{1}{2}ee'k_2 \end{array}\right\}\cos(2g+K')$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\tfrac{1}{6}(-1,3,11) \\ +\tfrac{1}{2}(1,1,11) \end{array}\right\}\cos(2g+2K')$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\tfrac{1}{6}(-1,3,12) \\ +\tfrac{1}{2}(1,1,12) \end{array}\right\}\cos(2g+2\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\tfrac{1}{12}(-1,4,13) \\ +\tfrac{1}{6}(1,2,13) \\ +\tfrac{1}{3}e(1,1,9) \\ -\tfrac{1}{8}e^2(1,0,3) \\ -\tfrac{3}{8}e^3k_1 \\ -\tfrac{31}{72}e^3(1,-1,1) \end{array}\right\}\cos 3g$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{12}(-1,4,14) \\ +\frac{1}{8}(1,2,14) \\ +\frac{1}{2}e\,(1,1,10) \\ -\frac{1}{8}e^2(1,0,4) \\ -\frac{3}{8}e^2e'k_2 \end{array}\right\}\cos(3g+K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{12}(-1,4,15) \\ +\frac{1}{8}(1,2,15) \\ +\frac{1}{2}e\,(1,1,11) \end{array}\right\}\cos(3g+2K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{12}(-1,4,16) \\ +\frac{1}{8}(1,2,16) \end{array}\right\}\cos(3g+3K)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{12}(-1,4,17) \\ +\frac{1}{8}(1,2,17) \\ +\frac{1}{2}e\,(1,1,12) \end{array}\right\}\cos(3g+2\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\frac{1}{12}(-1,4,18) \\ +\frac{1}{8}(1,2,18) \end{array}\right\}\cos(3g+K+2\Pi)$$

wo $2C$ die dem Integral hinzugefügte willkührliche Constante ist, die

$$C = -\frac{1}{6}k_0 - \frac{1}{4}e^2k_1 - \frac{1}{4}ee'k_2\cos K$$

zum Ausdruck hat.

## 45.

Es soll jetzt angenommen werden, dass der Berechnung der Störungen die mittleren Elemente des gestörten Planeten zu Grunde gelegt werden, wodurch die willkührlichen Constanten völlig bestimmt werden. Die Bestimmung derselben muss bewirken, dass in dem Ausdruck für $n\delta z$ weder ein der Zeit proportionales Glied, noch Glieder vorkommen, die mit $\sin g$ und $\cos g$ multiplicirt sind. Die Anwendung hiervon auf den Ausdruck von $n\delta z$ in Art. 43 giebt

$$k_0 = -(1,-1,1) + \frac{1}{4}e(-1,2,3)$$
$$+\{(-1,1,2) + \frac{1}{4}e(-1,2,4) - (1,-1,2)\}\cos K$$

$$e k_1 = (0,1,3) + \frac{1}{2}(-1,2,3) + \frac{1}{6}e(-1,3,9) - (1,0,3)$$
$$-(\frac{1}{2}e - \frac{1}{8}e^3)(1,-1,1) + \frac{3}{16}e^2(-1,2,3)$$

$$e'k_2 = (0,1,4) + \frac{1}{2}(-1,2,4) + \frac{1}{6}e(-1,3,10)$$
$$-(1,0,4) - \frac{1}{2}e(1,-1,2)$$

$$e^2e'k_3 = (0,1,5) + \frac{1}{2}(-1,2,5) - (1,0,5)$$
$$+\frac{1}{2}e(-1,1,2) + \frac{3}{16}e^2(-1,2,4)$$

$$ee'^2k_4 = (0,1,6) + \frac{1}{2}(-1,2,6) + \frac{1}{6}e(-1,3,11) - (1,0,6)$$

$$e\sin^2\tfrac{1}{2}Jk_5 = (0,1,7) + \frac{1}{2}(-1,2,7) + \frac{1}{6}e(-1,3,12) - (1,0,7)$$

$$e'\sin^2\tfrac{1}{2}Jk_6 = (0,1,8) + \frac{1}{2}(-1,2,8) - (1,0,8)$$

welche Ausdrücke zu substituiren sind.

## 46.

Zugleich mit der Substitution der Werthe der Constanten sollen die Coefficienten in $n\delta z$ und $\nu$ auf die $A_i$ und $B_i$ hingeführt und zusammengezogen werden. Fangen wir mit den Constanten an, so bekommen wir durch die Ausdrücke des Art. 41

$$k_0 = 2m'\alpha(1)A_0 + \frac{1}{4}e^2m'\alpha\{2(3)+3(2)-6(1)\}A_0$$
$$+\frac{1}{2}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(1)+(0)\}B_1$$
$$-\frac{1}{4}ee'm'\alpha\{4(3)+11(2)-10(1)+10(0)\}A_1\cos K$$

$$k_1 = -\frac{3}{2}m'\alpha\{(2)+2(1)\}A_0 - \frac{1}{48}e^2m'\alpha\{9(4)+28(3)-15(2)+18(1)\}A_0$$
$$-\frac{3}{8}e'^2m'\alpha\{(4)+8(3)+14(2)+4(1)\}A_0 + \frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1$$

$$k_2 = \frac{1}{2}m'\alpha\{3(2)+8(1)-8(0)\}A_1 + \frac{1}{24}e^2m'\alpha\{9(4)+52(3)+22(2)-12(1)+12(0)\}A_1$$
$$+\frac{1}{16}e'^2m'\alpha\{3(4)+32(3)+76(2)+16(1)-16(0)\}A_1 - \frac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{3(2)+14(1)\}\{B_0+B_2\}$$

$$k_3 = \frac{1}{16} m'\alpha\{3(4)+16(3)+9(2)+8(1)-8(0)\} A_1$$

$$k_4 = -\frac{1}{48} m'\alpha\{9(4)+76(3)+62(2)-124(1)+124(0)\} A_2$$

$$k_5 = -\frac{1}{12} m'\alpha\{9(2)+76(1)+120(0)\} B_1$$

$$k_6 = \frac{1}{4} m'\alpha\{3(2)+14(1)\} B_0$$

Setzt man hierauf*)

$$\begin{aligned} K = & -e'\Big\{m'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1+\frac{1}{8}e^2 m'\alpha\{(4)+6(3)+5(2)+2(1)-2(0)\}A_1+ \\ & +\frac{1}{8}e'^2 m'\alpha\{(4)+10(3)+22(2)+4(1)-4(0)\}A_1-\frac{1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}\{B_0+B_2\}\Big\}\sin K \\ & +\frac{1}{8}e e'^2 m'\alpha\{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\}A_2\sin 2K \\ & +\frac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\sin 2\Pi \\ & -\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\sin(\Pi+\Pi') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L = & -e\Big\{m'\alpha\{(2)+2(1)\}A_0+\frac{1}{8}e^2 m'\alpha\{(4)+4(3)-(2)-2(1)\}A_0+ \\ & +\frac{1}{4}e'^2 m'\alpha\{(4)+8(3)+14(2)+4(1)\}A_0-\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1\Big\} \\ & +e'\Big\{m'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1+\frac{1}{8}e^2 m'\alpha\{3(4)+18(3)+11(2)-2(1)+2(0)\}A_1+ \\ & +\frac{1}{8}e'^2 m'\alpha\{(4)+10(3)+22(2)+4(1)-4(0)\}A_1-\frac{1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}\{B_0+B_2\}\Big\}\cos K \\ & -\frac{1}{8}e e'^2 m'\alpha\{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\}A_2\cos 2K \\ & -\frac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\cos 2\Pi \\ & +\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\cos(\Pi+\Pi') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2,s) = & \frac{1}{24}e^2 m'\alpha\{2(3)-3(2)-18(1)\}A_0 \\ & -\frac{1}{12}e e' m'\alpha\{2(3)+2(2)-9(1)+9(0)\}A_1\cos K \\ & +\frac{1}{24}e'^2 m'\alpha\{2(3)+7(2)-14(1)+14(0)\}A_2\cos 2K \\ & +\frac{1}{6}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{2(1)+9(0)\}B_1\cos 2\Pi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2,c) = & -\frac{1}{12}e e' m'\alpha\{2(3)+2(2)-9(1)+9(0)\}A_1\sin K \\ & +\frac{1}{24}e'^2 m'\alpha\{2(3)+7(2)-14(1)+14(0)\}A_2\sin 2K \\ & +\frac{1}{6}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{2(1)+9(0)\}B_1\sin 2\Pi \end{aligned}$$

*) Die Bezeichnung dieser Constante wird zur Verwechselung mit dem Winkel $K$ keinen Anlass geben.

$$(3,s) = -\frac{1}{288}e^3 m'\alpha\{(4)-12(3)+24(2)+144(1)\}A_0$$
$$+\frac{1}{96}e^2 e'm'\alpha\{(4)-6(3)-8(2)+48(1)-48(0)\}A_1\cos K$$
$$-\frac{1}{96}ee'^2 m'\alpha\{(4)\quad -22(2)+44(1)-44(0)\}A_2\cos 2K$$
$$+\frac{1}{288}e'^3 m'\alpha\{(4)+6(3)-18(2)+36(1)-36(0)\}A_3\cos 3K$$
$$-\frac{1}{24}e\sin^2\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)\quad -24(0)\}B_1\cos 2\Pi$$
$$+\frac{1}{24}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)+8(1)\}B_2\cos(K+2\Pi)$$

$$(3,c) = \frac{1}{96}e^2 e'm'\alpha\{(4)-6(3)-8(2)+48(1)-48(0)\}A_1\sin K$$
$$-\frac{1}{96}ee'^2 m'\alpha\{(4)\quad -22(2)+44(1)-44(0)\}A_2\sin 2K$$
$$+\frac{1}{288}e'^3 m'\alpha\{(4)+6(3)-18(2)+36(1)-36(0)\}A_3\sin 3K$$
$$-\frac{1}{24}e\sin^2\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)\quad -24(0)\}B_1\sin 2\Pi$$
$$+\frac{1}{24}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(2)+8(1)\}B_2\sin(K+2\Pi)$$

so ergiebt sich

$$\begin{aligned} n\delta z = \quad & Knt\sin g & & +Lnt\cos g \\ & +\frac{1}{4}eKnt\sin 2g & & +\frac{1}{4}eLnt\cos 2g \\ & +\frac{1}{8}e^2 Knt\sin 3g & & +\frac{1}{8}e^2 Lnt\cos 3g \\ & +(2,s)\sin 2g & & +(2,c)\cos 2g \\ & +(3,s)\sin 3g & & +(3,c)\cos 3g \end{aligned}$$

## 47.

Die Ausdrücke des vorigen Artikels für die willkührlichen Constanten geben ferner

$$C = -\frac{1}{8}m'\alpha(1)A_0 - \frac{1}{12}e^2 m'\alpha\{(3)-3(2)-12(1)\}A_0$$
$$-\frac{1}{12}e'^2 m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0 + \frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J m'\alpha\{(1)+(0)\}B_1$$
$$+\frac{1}{12}ee'm'\alpha\{2(3)+(2)-17(1)+17(0)\}A_1\cos K$$

Seien ausserdem

$$(1,c) = e\left\{\frac{1}{2}m'\alpha\{(2)+2(1)\}A_0+\frac{1}{16}e^2m'\alpha\{(4)+4(3)-(2)-2(1)\}A_0+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{8}e'^2m'\alpha\{(4)+8(3)+14(2)+4(1)\}A_0-\frac{1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1\right\}$$
$$-e'\left\{\frac{1}{2}m'\alpha\{(2)+(1)-(0)\}A_1+\frac{1}{16}e^2m'\alpha\{3(4)+17(3)+8(2)+(1)-(0)\}A_1+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{16}e'^2m'\alpha\{(4)+9(3)+17(2)+2(1)-2(0)\}A_1+\frac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+3(1)\}\{B_0+B_2\}\right\}\cos K$$
$$+\frac{1}{16}e\,e'^2m'\alpha\{(4)+6(3)-2(2)+4(1)-4(0)\}A_2\cos 2K$$
$$+\frac{1}{4}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+6(1)+2(0)\}B_1\cos 2\Pi$$
$$-\frac{1}{4}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+3(1)\}B_0\cos(\Pi+\Pi')$$

$$(1,s) = e'\left\{\frac{1}{2}m'\alpha\{(2)+(1)-(0)\}A_1+\frac{1}{16}e^2m'\alpha\{(4)+3(3)-4(2)+7(1)-7(0)\}A_1+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{16}e'^2m'\alpha\{(4)+9(3)+17(2)+2(1)-2(0)\}A_1+\frac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+3(1)\}\{B_0+B_2\}\right\}\sin K$$
$$-\frac{1}{16}e\,e'^2m'\alpha\{(4)+6(3)-2(2)+4(1)-4(0)\}A_2\sin 2K$$
$$-\frac{1}{4}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+6(1)+2(0)\}B_1\sin 2\Pi$$
$$+\frac{1}{4}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+3(1)\}B_0\sin(\Pi+\Pi')$$

$$(2,c) = -\frac{1}{12}e^2m'\alpha\{(3)-3(2)-12(1)\}A_0$$
$$+\frac{1}{12}e\,e'm'\alpha\{2(3)-(2)-9(1)+9(0)\}A_1\cos K$$
$$-\frac{1}{12}e'^2m'\alpha\{(3)+2(2)-4(1)+4(0)\}A_2\cos 2K$$
$$-\frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+3(0)\}B_1\cos 2\Pi$$

$$(2,s) = -\frac{1}{12}e\,e'm'\alpha\{2(3)-(2)-9(1)+9(0)\}A_1\sin K$$
$$+\frac{1}{12}e'^2m'\alpha\{(3)+2(2)-4(1)+4(0)\}A_2\sin 2K$$
$$+\frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+3(0)\}B_1\sin 2\Pi$$

$$(3,c) = \frac{1}{192}e^3m'\alpha\{(4)-12(3)+36(2)+168(1)\}A_0$$
$$-\frac{1}{192}e^2e'm'\alpha\{3(4)-22(3)+8(2)+132(1)-132(0)\}A_1\cos K$$
$$+\frac{1}{192}e\,e'^2m'\alpha\{3(4)-8(3)-34(2)+68(1)-68(0)\}A_2\cos 2K$$
$$-\frac{1}{192}e'^3m'\alpha\{(4)+2(3)-6(2)+12(1)-12(0)\}A_3\cos 3K$$
$$+\frac{1}{48}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{3(2)-8(1)-48(0)\}B_1\cos 2\Pi$$
$$-\frac{1}{16}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_2\cos(K+2\Pi)$$

$$(3,s) = \frac{1}{192}e^2e'm'\alpha\{3(4)-22(3)+8(2)+132(1)-132(0)\}A_1\sin K$$
$$-\frac{1}{192}ee'^2m'\alpha\{3(4)-8(3)-34(2)+68(1)-68(0)\}A_2\sin 2K$$
$$+\frac{1}{192}e'^3m'\alpha\{(4)+2(3)-6(2)+12(1)-12(0)\}A_3\sin 3K$$
$$-\frac{1}{48}e\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{3(2)-8(1)-48(0)\}B_1\sin 2\Pi$$
$$+\frac{1}{16}e'\sin^2\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)+4(1)\}B_2\sin(K+2\Pi)$$

dann erhält man

$$\begin{aligned}
\nu = & -\frac{1}{4}eKnt \\
& -\frac{1}{2}Knt\cos g \qquad +\frac{1}{2}Lnt\sin g \\
& -\frac{1}{4}eKnt\cos 2g \qquad +\frac{1}{4}eLnt\sin 2g \\
& -\frac{3}{16}e^2Knt\cos 3g \qquad +\frac{3}{16}e^2Lnt\sin 3g \\
& +C \\
& +(1,c)\cos g \qquad +(1,s)\sin g \\
& +(2,c)\cos 2g \qquad +(2,s)\sin 2g \\
& +(3,c)\cos 3g \qquad +(3,s)\sin 3g
\end{aligned}$$

---

## §. 5. Entwickelung der Glieder der dritten Coordinate, die dem Falle $i = 0$ in den Coefficienten des Differentials der Störungsfunction nach $Z$ entsprechen.

### 48.

Die Störungen der dritten Coordinate, die dem Falle $i = 0$ angehören, sollen eben so behandelt werden, wie im Vorhergehenden die der Länge und des Radius Vectors behandelt worden sind, nur werde ich hier die Glieder vierter Ordnung weglassen, die in den Fällen, in denen die hier ausgeführten Entwickelungen überhaupt anwendbar sind, nie Merkliches werden geben können.

Es wird zu dem Ende

$$
\begin{aligned}
a^2\left(\frac{\delta\Omega}{\delta Z}\right) = \; & (1)\sin\Pi \\
& +(2)\sin(-K+\Pi) \\
& +(5)\sin(g+\Pi) \\
& +(6)\sin(g+K+\Pi) \\
& +(7)\sin(g-K+\Pi) \\
& +(8)\sin(g-\Pi) \\
& +(9)\sin(g+K-\Pi) \\
& +(10)\sin(g+2K-\Pi) \\
& +(11)\sin(2g+\Pi) \\
& +(12)\sin(2g+K+\Pi) \\
& +(21)\sin(3g+\Pi) \\
& +(22)\sin(3g+K+\Pi) \\
& +(23)\sin(3g+2K+\Pi) \\
& +(24)\sin(3g+3\Pi)
\end{aligned}
$$

in welchem Ausdruck die Coefficienten die folgenden Werthe haben:

$$
\begin{aligned}
(1) &= \frac{1}{2} e\, m'\alpha \sin J\{(1)+2(0)\} B_1 \\
(2) &= -\frac{1}{2} e'\, m'\alpha \sin J\,(1) B_0 \\
(5) &= -m'\alpha\sin J\,(0) B_1 - \frac{1}{4} e^2 m'\alpha \sin J\{(2)+2(1)-4(0)\} B_1 \\
&\quad - \frac{1}{4} e'^2 m'\alpha \sin J\{(2)+4(1)+2(0)\} B_1 + \frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha\sin J\,(0)\{2C_0+C_2\} \\
(6) &= \frac{1}{4} e e' m'\alpha \sin J\{(2)+5(1)\} B_2 \\
(7) &= \frac{1}{4} e e' m'\alpha \sin J\{(2)+(1)\} B_0 \\
(8) &= \frac{1}{8} e^2 m'\alpha \sin J\{(2)+2(1)-(0)\} B_1 \\
(9) &= -\frac{1}{4} e e' m'\alpha \sin J\{(2)+(1)\} B_0 \\
(10) &= \frac{1}{8} e'^2 m'\alpha \sin J\,(2) B_1 \\
(11) &= \frac{1}{2} e\, m'\alpha \sin J\{(1)-2(0)\} B_1 \\
(12) &= -\frac{1}{2} e'\, m'\alpha \sin J\,(1) B_2 \\
(21) &= -\frac{1}{8} e^2 m'\alpha \sin J\{(2)-6(1)+9(0)\} B_1 \\
(22) &= \frac{1}{4} e e' m'\alpha \sin J\{(2)-3(1)\} B_2 \\
(23) &= -\frac{1}{8} e'^2 m'\alpha \sin J\,(2) B_3 \\
(24) &= -\frac{3}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha \sin J\,(0)\, C_2
\end{aligned}
$$

## 49.

Multiplicirt man nun mit dem Ausdrucke des Factors $C$ in Art. 34, und führt darauf die Integration aus, so wird das Integral =

$$(-1,1,1)\sin(-\gamma+g+\Pi)$$
$$+(1,-1,1)\sin(\gamma-g+\Pi)$$

---

$$+(-1,1,2)\sin(-\gamma+g+\Pi')$$
$$+(1,-1,2)\sin(\gamma-g+\Pi')$$

---

$$+(-1,2,5)\sin(-\gamma+2g+\Pi)$$
$$+(1,0,5)\,nt\cos(\gamma+\Pi)$$
$$+l_1\sin(\gamma+\Pi)$$

---

$$+(-1,2,6)\sin(-\gamma+2g+2\Pi-\Pi')$$
$$+(1,0,6)\,nt\cos(\gamma+2\Pi-\Pi')$$
$$+ee'l_2\sin(\gamma+2\Pi-\Pi')$$

---

$$+(-1,2,7)\sin(-\gamma+2g+\Pi')$$
$$+(1,0,7)\,nt\cos(\gamma+\Pi')$$
$$+ee'l_3\sin(\gamma+\Pi')$$

---

$$+(-1,2,8)\sin(-\gamma+2g-\Pi)$$
$$+(1,0,8)\,nt\cos(\gamma-\Pi)$$
$$+e^2l_4\sin(\gamma-\Pi)$$

---

$$+(-1,2,9)\sin(-\gamma+2g-\Pi')$$
$$+(1,0,9)\,nt\cos(\gamma-\Pi')$$
$$+ee'l_5\sin(\gamma-\Pi')$$

---

$$+(-1,2,10)\sin(-\gamma+2g+\Pi-2\Pi')$$
$$+(1,0,10)\,nt\cos(\gamma+\Pi-2\Pi')$$
$$+e'^2l_6\sin(\gamma+\Pi-2\Pi')$$

---

$$+(-1,3,11)\sin(-\gamma+3g+\Pi)$$
$$+(1,1,11)\sin(\gamma+g+\Pi)$$

---

$$+(-1,3,12)\sin(-\gamma+3g+2\Pi-\Pi')$$
$$+(1,1,12)\sin(\gamma+g+2\Pi-\Pi')$$

---

$$+(-1,4,21)\sin(-\gamma+4g+\Pi)$$
$$+(1,2,21)\sin(\gamma+2g+\Pi)$$

---

$$+(-1,4,22)\sin(-\gamma+4g+2\Pi-\Pi')$$
$$+(1,2,22)\sin(\gamma+2g+2\Pi-\Pi')$$

---

$$+(-1,4,23)\sin(-\gamma+4g+3\Pi-2\Pi')$$
$$+(1,2,23)\sin(\gamma+2g+3\Pi-2\Pi')$$

---

$$+(-1,4,24)\sin(-\gamma+4g+3\Pi)$$
$$+(1,2,24)\sin(\gamma+2g+3\Pi)$$

---

wo die mit $l_1$, $l_2$, etc. multiplicirten Glieder die Theile der Integrationsconstante sind, und die Coefficienten die folgenden Ausdrücke haben:

$$(-1,1,1) = \frac{1}{2}(1) - \frac{3}{4}e(5)$$
$$(1,-1,1) = \frac{1}{2}(1) + \frac{1}{4}e(5)$$
$$(-1,1,2) = \frac{1}{2}(2)$$
$$(1,-1,2) = \frac{1}{2}(2)$$
$$(-1,2,5) = \frac{1}{8}e(1) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}e^2\right)(5) - \frac{3}{8}e(11)$$
$$(1,0,5) = \frac{3}{4}e(1) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}e^2\right)(5) - \frac{1}{4}e(11)$$
$$(-1,2,6) = \frac{1}{4}(6) - \frac{3}{8}e(12)$$
$$(1,0,6) = -\frac{1}{2}(6) - \frac{1}{4}e(12)$$
$$(-1,2,7) = \frac{1}{8}e(2) + \frac{1}{4}(7)$$
$$(1,0,7) = \frac{3}{4}e(2) - \frac{1}{2}(7)$$
$$(-1,2,8) = -\frac{1}{8}e(1) - \frac{3}{32}e^2(5) + \frac{1}{4}(8)$$
$$(1,0,8) = -\frac{3}{4}e(1) - \frac{1}{2}(8)$$
$$(-1,2,9) = -\frac{1}{8}e(2) + \frac{1}{4}(9)$$
$$(1,0,9) = -\frac{3}{4}e(2) - \frac{1}{2}(9)$$
$$(-1,2,10) = \frac{1}{4}(10)$$
$$(1,0,10) = -\frac{1}{2}(10)$$
$$(-1,3,11) = \frac{1}{12}e(5) + \frac{1}{6}(11)$$
$$(1,1,11) = \frac{3}{4}e(5) - \frac{1}{2}(11)$$

$$(-1,3,12) = \frac{1}{6}(12)$$

$$(1,1,12) = -\frac{1}{2}(12)$$

$$(-1,4,21) = \frac{3}{64}e^2(5) + \frac{1}{16}e(11) + \frac{1}{8}(21)$$

$$(1,2,21) = \frac{3}{8}e(11) - \frac{1}{4}(21)$$

$$(-1,4,22) = \frac{1}{16}e(12) + \frac{1}{8}(22)$$

$$(1,2,22) = \frac{3}{8}e(12) - \frac{1}{4}(22)$$

$$(-1,4,23) = \frac{1}{8}(23)$$

$$(1,2,23) = -\frac{1}{4}(23)$$

$$(-1,4,24) = \frac{1}{8}(24)$$

$$(1,2,24) = -\frac{1}{4}(24)$$

## 50.

Drückt man diese Coefficienten durch die $B_i$ und $C_i$ aus, so geben die Ausdrücke des Art. 48

$$(-1,1,1) = \frac{1}{4}em'\alpha\sin J\{(1)+5(0)\}B_1$$

$$(1,-1,1) = \frac{1}{4}em'\alpha\sin J\{(1)+(0)\}B_1$$

$$(-1,1,2) = -\frac{1}{4}e'm'\alpha\sin J(1)B_0$$

$$(1,-1,2) = -\frac{1}{4}e'm'\alpha\sin J(1)B_0$$

$$(-1,2,5) = -\frac{1}{4}m'\alpha\sin J(0)B_1 - \frac{1}{16}e^2m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)-14(0)\}B_1$$
$$-\frac{1}{16}e'^2m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)+2(0)\} + \frac{3}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\sin J(0)\{2C_0+C_2\}$$

$$(1,0,5) = \frac{1}{2}m'\alpha\sin J(0)B_1 + \frac{1}{8}e^2m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1$$
$$+\frac{1}{8}e'^2m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1 - \frac{3}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\sin J(0)\{2C_0+C_2\}$$

$$(-1,2,6) = \frac{1}{16}ee'm'\alpha\sin J\{(2)+8(1)\}B_2$$

$$(1,0,6) = -\frac{1}{8}ee'm'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_2$$

$$(-1,2,7) = \frac{1}{16}ee'm'\alpha\sin J(2)B_0$$

$$(1,0,7) = -\frac{1}{8}ee'm'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_0$$

$$(-1,2,8) = \frac{1}{32}e^2m'\alpha\sin J\{(2)\quad -2(0)\}B_1$$

$$(1,0,8) = -\frac{1}{16}e^2m'\alpha\sin J\{(2)+8(1)+11(0)\}B_1$$

$$(-1,2,9) = -\frac{1}{16} e e' m' \alpha \sin J (2) B_0$$
$$(1,0,9) = \frac{1}{8} e e' m' \alpha \sin J \{(2) + 4(1)\} B_0$$
$$(-1,2,10) = \frac{1}{32} e'^2 m' \alpha \sin J (2) B_1$$
$$(1,0,10) = -\frac{1}{16} e'^2 m' \alpha \sin J (2) B_1$$
$$(-1,3,11) = \frac{1}{12} e m' \alpha \sin J \{(1) - 3(0)\} B_1$$
$$(1,1,11) = -\frac{1}{4} e m' \alpha \sin J \{(1) + (0)\} B_1$$
$$(-1,3,12) = -\frac{1}{12} e' m' \alpha \sin J (1) B_2$$
$$(1,1,12) = \frac{1}{4} e' m' \alpha \sin J (1) B_2$$
$$(-1,4,21) = -\frac{1}{64} e^2 m' \alpha \sin J \{(2) - 8(1) + 16(0)\} B_1$$
$$(1,2,21) = \frac{1}{32} e^2 m' \alpha \sin J \{(2) \quad - 3(0)\} B_1$$
$$(-1,4,22) = \frac{1}{32} e e' m' \alpha \sin J \{(2) - 4(1)\} B_2$$
$$(1,2,22) = -\frac{1}{16} e e' m' \alpha \sin J (2) B_2$$
$$(-1,4,23) = -\frac{1}{64} e'^2 m' \alpha \sin J (2) B_3$$
$$(1,2,23) = \frac{1}{32} e' m' \alpha \sin J (2) B_3$$
$$(-1,4,24) = -\frac{3}{16} \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \sin J (0) C_2$$
$$(1,2,24) = \frac{3}{8} \sin^2 \tfrac{1}{2} J m' \alpha \sin J (0) C_2$$

## 51.

Es sind jetzt dem Integral des Art. 49 die weggelassenen Glieder durch die Sätze der Artt. 28 und 33 zuzufügen, wodurch

$$\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = & -\tfrac{3}{2} e (1,0,5)\, nt \cos \Pi + (1,0,5)\, nt \cos (g+\Pi) \\
& + (1,0,6)\, nt \cos (g+2\Pi-\Pi') + (1,0,7)\, nt \cos (g+\Pi') \\
& + (1,0,8)\, nt \cos (g-\Pi) + (1,0,9)\, nt \cos (g-\Pi') \\
& + (1,0,10)\, nt \cos (g+\Pi-2\Pi') \\
& + \tfrac{1}{2} e (1,0,5)\, nt \cos (2g+\Pi) + \tfrac{3}{8} e^2 (1,0,5)\, nt \cos (3g+\Pi) \\
& + \left\{\begin{array}{r} -\tfrac{3}{2} e l_1 \\ +(-1,1,1) \\ +\tfrac{1}{2} e (-1,2,5) \\ +(1,-1,1) \end{array}\right\} \sin \Pi \\
& + \left\{\begin{array}{r} (-1,1,2) \\ +(1,-1,2) \end{array}\right\} \sin \Pi'
\end{aligned}$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\tfrac{3}{2}e(-1,1,1) \\ -\tfrac{3}{2}e(1,1,11) \\ +(-1,2,5) \\ +\tfrac{1}{2}e(-1,3,11) \\ +l_1 \\ +\tfrac{1}{2}e(1,-1,1) \end{array}\right\}\sin(g+\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\tfrac{3}{2}e(1,1,12) \\ +(-1,2,6) \\ +\tfrac{1}{2}e(-1,3,12) \\ +ee'l_2 \end{array}\right\}\sin(g+2\Pi-\Pi')$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\tfrac{3}{2}e(-1,1,2) \\ +(-1,2,7) \\ +ee'l_3 \\ +\tfrac{1}{2}e(1,-1,2) \end{array}\right\}\sin(g+\Pi')$$

$$+\left\{\begin{array}{r} \tfrac{3}{2}e(1,-1,1) \\ +(-1,2,8) \\ +e^2l_4 \\ -\tfrac{1}{2}e(-1,1,1) \\ -\tfrac{3}{8}e^2(-1,2,5) \end{array}\right\}\sin(g-\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} \tfrac{3}{2}e(1,-1,2) \\ +(-1,2,9) \\ +ee'l_5 \\ -\tfrac{1}{2}e(-1,1,2) \end{array}\right\}\sin(g-\Pi')$$

$$+\left\{\begin{array}{r} (-1,2,10) \\ +e'^2l_6 \end{array}\right\}\sin(g+\Pi-2\Pi')$$

$$+\left\{\begin{array}{r} -\tfrac{3}{2}e(-1,2,5) \\ +(-1,3,11) \\ +(1,1,11) \\ +\tfrac{1}{2}el_1 \end{array}\right\}\sin(2g+\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{r} (-1,2,12) \\ +(1,1,12) \end{array}\right\}\sin(2g+2\Pi-\Pi')$$

$$+\left\{\begin{array}{r}-\frac{3}{2}e(-1,3,11)\\+(-1,4,21)\\+(1,2,21)\\+\frac{1}{2}e(1,1,11)\\+\frac{3}{8}e^2l_1\end{array}\right\}\sin(3g+\Pi)$$

$$+\left\{\begin{array}{r}-\frac{3}{2}e(-1,3,12)\\+(-1,4,22)\\+(1,2,22)\\+\frac{1}{2}e(1,1,12)\end{array}\right\}\sin(3g+2\Pi-\Pi')$$

$$+\left\{\begin{array}{r}(-1,4,23)\\+(1,2,23)\end{array}\right\}\sin(3g+3\Pi-2\Pi')$$

$$+\left\{\begin{array}{r}(-1,4,24)\\+(1,2,24)\end{array}\right\}\sin(3g+3\Pi)$$

erhalten wird. Die in Art. 45 eingeführte Bedingung in Betreff der angewandten elliptischen Elemente verlangt auch hier, dass die mit $\sin g$ und $\cos g$ multiplicirten Glieder Null werden, und hiermit bekommen die willkührlichen Constanten die folgenden Werthe:

$$l_1 = \frac{3}{2}e(-1,1,1)+\frac{3}{2}e(1,1,11)-(-1,2,5)$$
$$-\frac{1}{2}e(-1,3,11)-\frac{1}{2}e(1,-1,1)$$
$$ee'l_2 = \frac{3}{2}(1,1,12)-(-1,2,6)-\frac{1}{2}e(-1,3,12)$$
$$ee'l_3 = \frac{3}{2}(-1,1,2)-(-1,2,7)-\frac{1}{2}e(1,-1,2)$$
$$e^2l_4 = -\frac{3}{2}e(1,-1,1)-(-1,2,8)+\frac{1}{2}e(-1,1,1)+\frac{3}{8}e^2(-1,2,5)$$
$$ee'l_5 = -\frac{3}{2}e(1,-1,2)-(-1,2,9)+\frac{1}{2}e(-1,1,2)$$
$$e'^2l_6 = -(-1,2,10)$$

von welchen nur der erste weiter entwickelt zu werden braucht.

## 52.

Durch die Substitution der Ausdrücke des Art. 50 bekommt man zuerst mit ausreichender Genauigkeit

$$l_1 = \frac{1}{4}m'\alpha\sin J(0)B_1$$

und hierauf, nachdem

$$M = -\Big\{\tfrac{1}{2}m'\alpha\sin J(0)B_1 + \tfrac{1}{16}e^2 m'\alpha\sin J\{3(2)+16(1)+15(0)\}B_1 +$$
$$+\tfrac{1}{8}e'^2 m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1 - \tfrac{3}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\sin J(0)\{2C_0+C_2\}\Big\}\sin\Pi$$
$$+\tfrac{1}{4}ee'm'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_0\sin\Pi'$$
$$+\tfrac{1}{8}ee'm'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_2\sin(2\Pi-\Pi')$$
$$+\tfrac{1}{16}e'^2 m'\alpha\sin J(2)B_1\sin(\Pi-2\Pi')$$

$$N = \Big\{\tfrac{1}{2}m'\alpha\sin J(0)B_1 + \tfrac{1}{16}e^2 m'\alpha\sin J\{(2)\quad -7(0)\}B_1 +$$
$$+\tfrac{1}{8}e'^2 m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1 - \tfrac{3}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\sin J(0)\{2C_0+C_2\}\Big\}\cos\Pi$$
$$-\tfrac{1}{8}ee'm'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_2\cos(2\Pi-\Pi')$$
$$-\tfrac{1}{16}e'^2 m'\alpha\sin J(2)B_1\cos(\Pi-2\Pi')$$

$$(0,c) = \tfrac{1}{2}em'\alpha\sin J\{(1)+2(0)\}B_1\sin\Pi - \tfrac{1}{2}e'm'\alpha\sin J(1)B_0\sin\Pi'$$

$$(2,s) = -\tfrac{1}{6}em'\alpha\sin J(1)B_1\cos\Pi + \tfrac{1}{6}e'm'\alpha\sin J(1)B_2\cos(2\Pi-\Pi')$$

$$(2,c) = -\tfrac{1}{6}em'\alpha\sin J(1)B_1\sin\Pi + \tfrac{1}{6}e'm'\alpha\sin(1)B_2\sin J(2\Pi-\Pi')$$

$$(3,s) = \tfrac{1}{64}e^2 m'\alpha\sin J\{(2)-8(1)\}B_1\cos\Pi - \tfrac{1}{32}ee'm'\alpha\sin J\{(2)-4(1)\}B_2\cos(2\Pi-\Pi')$$
$$+\tfrac{1}{64}e'^2 m'\alpha\sin J(2)B_3\cos(3\Pi-2\Pi') + \tfrac{3}{16}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\sin J(0)C_2\cos 3\Pi$$

$$(3,c) = \tfrac{1}{64}e^2 m'\alpha\sin J\{(2)-8(1)\}B_1\sin\Pi - \tfrac{1}{32}ee'm'\alpha\sin J\{(2)-4(1)\}B_2\sin(2\Pi-\Pi')$$
$$+\tfrac{1}{64}e'^2 m'\alpha\sin J(2)B_3\sin(3\Pi-2\Pi') + \tfrac{3}{16}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\sin J(0)C_2\sin 3\Pi$$

gesetzt worden sind:

$$\begin{aligned}\frac{u}{\cos i} = \quad & && -\tfrac{3}{2}eNnt\\ & + Mnt\sin g && + Nnt\cos g\\ & +\tfrac{1}{2}eMnt\sin 2g && +\tfrac{1}{2}eNnt\cos 2g\\ & +\tfrac{3}{8}e^2Mnt\sin 3g && +\tfrac{3}{8}e^2Nnt\cos 3g\\ & && +(0,c)\\ & +(2,s)\sin 2g && +(2,c)\cos 2g\\ & +(3,s)\sin 3g && +(3,c)\cos 3g\end{aligned}$$

## §. 6. Allgemeine Entwickelung der von den Quadraten und Producten der störenden Kräfte abhängigen, und mit $t^2$ multiplicirten Glieder.

53.

Die mit $t^2$ multiplicirten Glieder sind von der Ordnung der Quadrate und der Producte der störenden Massen, und um ihre analytischen Ausdrücke zu entwickeln, muss man sich deshalb der strengen Differentialgleichungen bedienen. Sie können nur aus den Gliedern hervorgehen, die mit blosser Rücksicht auf die ersten Potenzen der störenden Massen schon mit $t$ multiplicirt sind, und dieser Umstand trägt wesentlich zur Einfachheit ihrer Ausdrücke bei. Auch hier, wie im Vorhergehenden, braucht man nur Einen störenden Planeten zu betrachten, da mehrere solcher ähnliche Glieder hinzufügen.

Wir könnten jetzt wieder dieselben Differentialgleichungen anwenden, die uns im Vorhergehenden gedient haben, aber da ich mich überzeugt habe, dass ihre Anwendung in diesem Falle auf Weitläufigkeiten führt, so werde ich lieber andere anwenden, die auf einfachere Entwickelungen führen.

Die Uebersicht über die Entwickelungen kann man sich dadurch erleichtern, dass man die zu entwickelnden Glieder in verschiedene Abtheilungen bringt, und jede Abtheilung für sich entwickelt. Es bieten sich zuerst zwei Hauptabtheilungen dar, von welchen die eine die Glieder behandelt, die durch die Aenderungen der Coordinaten des gestörten, und die andere diejenigen, die durch die Aenderungen der Coordinaten des störenden Planeten entstehen. Jede dieser Abtheilungen kann für sich in zwei Unterabtheilungen zerlegt werden, deren eine die Glieder behandelt, die aus den Aenderungen der Länge und des Radius Vectors, und deren andere diejenigen in sich begreift, die aus den Aenderungen der dritten Coordinate hervorgehen. Jede dieser Abtheilungen soll im Folgenden für sich betrachtet werden.

## $\alpha$) Störungen der Länge und des Radius Vectors, die mit $t^2$ multiplicirt sind, und aus $n\delta z$ und $\nu$ entstehen.

54.

Die Gleichungen, die ich anwenden werde, sind die längst bekannten folgenden:

$$n\delta z = n\int\{\overline{W} + \left(\frac{\delta \overline{W}}{\delta \gamma}\right) n\delta z + \nu^2\} dt$$

$$\nu = -\frac{1}{2} n\int\left\{\left(\frac{\delta \overline{W}}{\delta \gamma}\right) + \left(\frac{\delta^2 \overline{W}}{\delta \gamma^2}\right) n\delta z\right\} dt$$

und von den zwei Ausdrücken der Function $W$, die ich gegeben habe, werde ich hier den nachstehenden benutzen

$$W = \Xi + \Upsilon\left(\frac{\varrho}{a}\cos\varphi + \frac{3}{2}e\right) + \Psi\frac{\varrho}{a}\sin\varphi$$

Hierdurch wird

$$\overline{W} = \Xi + \Upsilon\left(\frac{r}{a}\cos f + \frac{3}{2}e\right) + \Psi\frac{r}{a}\sin f$$

Die strengen Ausdrücke der Differentiale von $\Upsilon$ und $\Psi$ sind ferner

$$\frac{d\Upsilon}{n\,dt} = 2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left(\frac{a}{r}\cos f + \frac{h^2}{h_0^2}\,\frac{\cos f + e}{1-e^2}\right)\left(\frac{\delta\Omega}{\delta f}\right) + \frac{a}{r}\sin f\, r\left(\frac{\delta\Omega}{\delta r}\right)\right\}$$

$$\frac{d\Psi}{n\,dt} = 2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left(\frac{a}{r}\sin f + \frac{h^2}{h_0^2}\,\frac{\sin f}{1-e^2}\right)\left(\frac{\delta\Omega}{\delta f}\right) - \frac{a}{r}\cos f\, r\left(\frac{\delta\Omega}{\delta r}\right)\right\}$$

und das Element $\Xi$ kann aus diesen durch die Gleichung

$$\Xi = -\frac{3}{2}e\Upsilon + 2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1$$

erhalten werden. Endlich ist

$$\frac{h_0}{h} = h_0\int\left(\frac{\delta\Omega}{\delta f}\right) dt$$

wofür, wie ich schon früher gethan habe,

$$\frac{h_0}{h} = 1 + S$$

geschrieben werden soll.

Nach der Entwickelung hat man, mit hier ausreichender Genauigkeit, zu setzen

$$\frac{\varrho}{a}\cos\varphi + \frac{3}{2}e = \left(1 - \frac{3}{8}e^2\right)\cos\gamma + \frac{1}{2}e\cos 2\gamma + \frac{3}{8}e^2\cos 3\gamma$$

$$\frac{\varrho}{a}\sin\varphi = \left(1 - \frac{5}{8}e^2\right)\sin\gamma + \frac{1}{2}e\sin 2\gamma + \frac{3}{8}e^2\sin 3\gamma$$

Endlich ist noch zu bemerken, dass in diesen Ausdrücken $a$, $n$, $e$, $h_0$ Constanten sind, $f$ blos Function von $nz$ ist, $r$ und die Differentialquotienten von $\Omega$ aber Functionen von $nz$ und $\nu$ sind. Im Allgemeinen wird, wenn $F$ irgend eine Function dieser beiden Grössen ist, wegen

$$nz = g + n\delta z$$
$$r = \bar{r}(1+\nu)$$

der Zuwachs von $F$, welcher von $n\delta z$ und $\nu$ herrührt

$$= \left(\frac{\delta F}{\delta g}\right) n\delta z + r\left(\frac{\delta F}{\delta r}\right)\nu$$

Die obigen Gleichungen sollen nun auf ähnliche Art behandelt werden, wie im § 1 der dritten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten gezeigt worden ist.

55.

In den vorstehenden Ausdrücken ist, wie man weiss, Ein Element eliminirt, welches jetzt eingeführt werden muss, wobei jedoch nur auf die ersten Potenzen der Massen Rücksicht genommen zu werden braucht. Die erste Gleichung des vorigen Artikels giebt unter dieser Beschränkung

$$\frac{d\delta z}{dt} = \Xi + \Upsilon\left(\frac{r}{a}\cos f + \frac{3}{2}e\right) + \Psi\frac{r}{a}\sin f$$

Man findet nun durch ein directes Verfahren, dass

$$\int\left\{\frac{r}{a}\cos f + \frac{3}{2}e\right\} n\,dt = \left\{\frac{r\sqrt{1-e^2}}{2a} + \frac{r^2}{2a^2\sqrt{1-e^2}}\right\}\sin f$$
$$\int\frac{r}{a}\sin f\,n\,dt = \frac{\sqrt{1-e^2}}{2e}\left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{2+3e^2}{2}\right)$$

sind, und kann sich jedenfalls leicht durch die Rückdifferentiation von der Richtigkeit dieser Gleichungen überzeugen. Diese Integrale unterliegen der Bedingung, dass sie gleichwie ihre Differentiale nur periodische Glieder enthalten dürfen, und demgemäss ist dem zweiten Integral eine entsprechende Constante hinzugefügt worden. Integrirt man nun die Gleichung für $d\delta z$ theilweise, so ergiebt sich

$$n\delta z = X + \Upsilon\frac{\sqrt{1-e^2}}{2}\left(\frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2(1-e^2)}\right)\sin f + \Psi\frac{\sqrt{1-e^2}}{2e}\left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{2+3e^2}{2}\right)$$

wo

$$X = n\int\left\{\Xi - \frac{d\Upsilon}{n\,dt}\frac{\sqrt{1-e^2}}{2}\left(\frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2(1-e^2)}\right)\sin f - \frac{d\Psi}{n\,dt}\frac{\sqrt{1-e^2}}{2e}\left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{2+3e^2}{2}\right)\right\}dt$$

geschrieben und $X$ das verlangte vierte Element ist.

Die Störungen des Radius Vectors können auf die drei Elemente $\Xi$, $\Upsilon$, $\Psi$ hingeführt werden. Die Gleichung des vor. Art. für $\Xi$ ergiebt, wenn blos die ersten Potenzen der Massen berücksichtigt werden,

$$S = -\frac{1}{3}\Xi - \frac{1}{2}e\Upsilon$$

und aus der Gleichung des Art. 23 für das Differential der Längenstörungen folgt

$$\nu = \frac{1}{2}S - \frac{1}{2}\frac{d\delta z}{dt} \quad .$$

Substituirt man hierin die vorstehenden Ausdrücke für $S$ und $d\delta z$, so wird

$$\nu = -\frac{2}{3}\Xi - \frac{1}{2}\Upsilon\left(\frac{r}{a}\cos f + 2e\right) - \frac{1}{2}\Psi\frac{r}{a}\sin f$$

Durch Hülfe dieser Gleichungen kann man umgekehrt die Elemente $X$, $\Xi$, $\Upsilon$, $\Psi$ durch $n\delta z$, $\frac{d\delta z}{dt}$, $\nu$, $S$ ausdrücken, welches aber erst weiter unten geschehen soll.

56.

Nehmen wir jetzt die Ausdrücke des vorvor. Art. für die Differentiale von $\Upsilon$ und $\Psi$ vor, und suchen den Zuwachs derselben, der durch die Quadrate der störenden Kräfte bewirkt wird und durch ein denselben vorgesetztes $\delta$ bezeichnet werden soll. Bezeichnet man mit $\Gamma$ und $\Theta$ die Ausdrücke von $d\Upsilon$ und $d\Psi$, wenn blos die ersten Potenzen der störenden Kräfte berücksichtigt werden, so erhält man

$$\Gamma = 2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left(\frac{a}{r}\cos f + \frac{\cos f + e}{1-e^2}\right)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right) + \frac{a}{r}\sin f\, r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

$$\Theta = 2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left(\frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2}\right)\sin f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right) - \frac{a}{r}\cos f\, r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

und es ist leicht zu finden, dass diese sich in die Gleichungen

$$\Gamma = 2\frac{a}{e}\left\{\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right) - \frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)\right\}$$

$$\Theta = 2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial e}\right)$$

verwandeln lassen, welche schon im Art. 24 angegeben wurden. In dieser letzteren Form ist ihre Entwickelung, nachdem die von $\Omega$ gegeben ist, sehr einfach, aber wenn man bis zu Grössen von der $p^{\text{ten}}$ Ordnung in Bezug auf die Excentricitäten gehen will, so ver-

langen sie, dass $\Omega$ bis auf Grössen der $(p+1)^{\text{ten}}$ Ordnung entwickelt sei. Auch kann man dieselben Grössen aus dem Ausdruck von $dW$ erhalten, wie weiter unten gezeigt werden wird.

## 57.

Da für die ersten Potenzen der Massen aus dem Vorhergehenden

$$\frac{h^2}{h_0^2} = 1 - 2S$$

folgt, so geben die strengen Ausdrücke sogleich

$$\frac{d\delta\Gamma}{ndt} = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g}\right) n\delta z + r\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)\nu - 4\frac{a}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(\cos f + e)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right) S$$

$$\frac{d\delta\Psi}{ndt} = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial g}\right) n\delta z + r\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)\nu - 4\frac{a}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\sin f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right) S$$

und die Gleichung des Art. 54 für $\Xi$ giebt

$$\delta\Xi = -\tfrac{3}{2}e\delta\Gamma - 3\delta S + 2S^2$$

In Bezug auf die Differentialquotienten nach $r$ ist zu bemerken, dass

$$r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right) = a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial a}\right)$$

ist, woraus leicht

$$r\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right) = a\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial a}\right) - 2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{a}{r}\cos f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right) + \frac{a}{r}\sin f r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

$$r\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right) = a\left(\frac{\partial\Theta}{\partial a}\right) - 2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\frac{a}{r}\sin f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right) - \frac{a}{r}\cos f r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

folgen. Eliminirt man nun $n\delta z$, $\nu$, $S$ durch die Ausdrücke des Art. 55, so bekommt man

$$\frac{d\delta\Gamma}{ndt} = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g}\right) X + \frac{2}{3}\left\{\Gamma - a\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial a}\right)\right\}\Xi + M\Gamma + N\Psi$$

$$\frac{d\delta\Psi}{ndt} = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial g}\right) X + \frac{2}{3}\left\{\Theta - a\left(\frac{\partial\Theta}{\partial a}\right)\right\}\Xi + P\Gamma + Q\Psi$$

wo

$$M = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g}\right)\frac{\sqrt{1-e^2}}{2}\left(\frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2(1-e^2)}\right)\sin f - r\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)\left(\frac{r}{2a}\cos f + e\right)$$
$$+ 2\frac{ae}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}(\cos f + e)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)$$

$$N = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g}\right)\frac{\sqrt{1-e^2}}{2e}\left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{2+3e^2}{2}\right) - r\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)\frac{r}{2a}\sin f$$

$$P = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial g}\right)\frac{\sqrt{1-e^2}}{2}\left(\frac{r}{a}+\frac{r^2}{a^2(1-e^2)}\right)\sin f - r\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)\left(\frac{r}{2a}\cos f + e\right)$$
$$+ 2\frac{ae}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\sin f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)$$
$$Q = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial g}\right)\frac{\sqrt{1-e^2}}{2e}\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{2+3e^2}{2}\right) - r\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)\frac{r}{2a}\sin f$$

## 58.

Die eben erhaltenen Ausdrücke für $M$, $N$, $P$, $Q$ lassen sich durch die Einführung der Differentialquotienten von $\Gamma$ und $\Theta$ nach $e$ bedeutend vereinfachen. Um diese Vereinfachung auszuführen bemerke ich, dass, abgesehen von $a$, welche Grösse hierbei nicht in Betracht kommt, $\Gamma$ und $\Theta$ in der Form, in welcher sie oben aufgestellt worden sind, sich als Functionen von $f$, $r$, $\Pi$, $e$ darstellen, und dass $f$ und $\Pi$ mit einander verbunden sind. Ferner dass zwar

$$\left(\frac{\partial\Omega}{\partial f}\right) = \left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)$$

ist, dass aber diese Gleichung in Bezug auf die vollständigen Ausdrücke von $\Gamma$ und $\Theta$ nicht stattfindet. Die Argumente $f$ und $r$ sind ihrerseits Functionen von $g$ und $e$, und zwar so, dass

$$\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right) = \frac{a^2}{r^2}\sqrt{1-e^2}, \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial e}\right) = \left(\frac{a}{r}+\frac{1}{1-e^2}\right)\sin f$$
$$\left(\frac{\partial r}{\partial g}\right) = \frac{ae\sin f}{\sqrt{1-e^2}}, \qquad \left(\frac{\partial r}{\partial e}\right) = -a\cos f$$

sind. Da $g$ blos in $f$ und $r$ enthalten ist, so finden jedenfalls die Gleichungen

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g}\right) = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial f}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right) + \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial g}\right)$$
$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial g}\right) = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial f}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial g}\right) + \left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial g}\right)$$

statt, aus denen man durch Substitution der vorstehenden Ausdrücke der Differentialquotienten von $f$ und $r$ nach $g$ die folgenden

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial f}\right) = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g}\right)\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}} - r\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)\frac{re\sin f}{a(1-e^2)}$$
$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial f}\right) = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial g}\right)\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}} - r\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)\frac{re\sin f}{a(1-e^2)}$$

erhält. Differentiirt man nun die Ausdrücke des Art. 56 für $\Gamma$ und $\Theta$ nach $e$, so erhält man zuerst

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial e}\right) = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial f}\right)\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{1-e^2}\right)\sin f - r\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)\frac{a}{r}\cos f$$
$$+\frac{1}{1-e^2}\left\{e\Gamma+\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)\right\}+4\frac{ae}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}(\cos f+e)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)$$
$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial e}\right) = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial f}\right)\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{1-e^2}\right)\sin f - r\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)\frac{a}{r}\cos f$$
$$+\frac{e}{1-e^2}\Theta+4\frac{ae}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}\sin f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)$$

die sich durch Hülfe der beiden vorstehenden Gleichungen, und wegen

$$e\Gamma = 2a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right)-2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)$$

leicht in die folgenden verwandeln lassen:

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial e}\right) = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g}\right)\left(\frac{r}{a}+\frac{r^2}{a^2(1-e^2)}\right)\frac{\sin f}{\sqrt{1-e^2}} - r\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)\frac{r\cos f+2ae}{a(1-e^2)}$$
$$+\frac{2a}{1-e^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right)+4\frac{ane}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}(\cos f+e)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)$$
$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial e}\right) = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial g}\right)\left(\frac{r}{a}+\frac{r^2}{a^2(1-e^2)}\right)\frac{\sin f}{\sqrt{1-e^2}} - r\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)\frac{r\cos f+2ae}{a(1-e^2)}$$
$$+\frac{e}{1-e^2}\Theta+4\frac{ae}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}\sin f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)$$

Differentiirt man ferner dieselben Ausdrücke für $\Gamma$ und $\Theta$ nach $\Pi$, so erhält man

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi}\right) = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial f}\right)+2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{1-e^2}\right)\sin f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)-\frac{a}{r}\cos f r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$
$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Pi}\right) = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial f}\right)-2\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\left\{\left(\frac{a}{r}+\frac{1}{1-e^2}\right)\cos f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\Pi}\right)+\frac{a}{r}\sin f r\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)\right\}$$

die man leicht auf ähnliche Art wie vorher in die folgenden verwandelt:

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi}\right) = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g}\right)\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}} - r\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r}\right)\frac{re\sin f}{a(1-e^2)}+\Theta$$
$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Pi}\right) = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial g}\right)\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}} - r\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right)\frac{re\sin f}{a(1-e^2)}-\frac{1}{1-e^2}\Gamma+2\frac{ae}{1-e^2}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right)$$

Vergleicht man diese mit den Ausdrücken von $M$, $N$, $P$, $Q$ des vor. Art., so zeigt sich ohne Weiteres, dass

$$M = \frac{1-e^2}{2}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial e}\right)-a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right)$$
$$N = \frac{1-e^2}{2e}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi}\right)-\frac{1-e^2}{2e}\Theta-\frac{2+3e^2}{4e}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g}\right)$$
$$P = \frac{1-e^2}{2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial e}\right)-\frac{e}{2}\Theta$$
$$Q = \frac{1-e^2}{2e}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Pi}\right)+\frac{1}{2e}\Gamma-a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right)-\frac{2+3e^2}{4e}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial g}\right)$$

sind.

59.

Geht man nun die Ausdrücke durch, die zur Erreichung unseres Zweckes erforderlich sind, so findet man leicht, dass nur die Glieder gebraucht werden, in welchen $i = 0$ ist, und dass man in $\Gamma$ und $\Theta$ die constanten Glieder bis auf Grössen der vierten, die veränderlichen aber nur bis auf Grössen der dritten Ordnung braucht. Diese erhält man leicht aus dem Ausdruck für $dW$ des Art. 40. Dem Vorhergehenden zufolge kann man dieses Differential auf die folgende Form bringen

$$\frac{dW}{ndt} = \Xi + \Gamma\left(\frac{\varrho}{a}\cos\varphi + \frac{3}{2}e\right) + \Theta\frac{\varrho}{a}\sin\varphi$$

Setzt man hierauf

$$\Gamma = \Sigma a_m \sin(\alpha t + \beta)$$
$$\Theta = \Sigma b_m \cos(\alpha t + \beta)$$

und

$$\frac{\varrho}{a}\cos\varphi + \frac{3}{2}e = \left(1 - \frac{3}{8}e^2\right)\cos\gamma$$
$$\frac{\varrho}{a}\sin\varphi = \left(1 - \frac{5}{8}e^2\right)\sin\gamma$$

so bekommt man

$$\frac{dW}{ndt} = \Xi + \left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{16}e^2\right)a_m - \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{16}e^2\right)b_m\right\}\sin(-\gamma + \alpha t + \beta)$$
$$+ \left\{\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{16}e^2\right)a_m + \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{16}e^2\right)b_m\right\}\sin(\gamma + \alpha t + \beta)$$

Die Vergleichung mit dem Ausdruck von $dW$ in Art. 40 giebt

$$(-1, 1, m) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{16}e^2\right)a_m - \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{16}e^2\right)b_m$$
$$(1, -1, m) = \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{16}e^2\right)a_m + \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{16}e^2\right)b_m$$

woraus

$$a_m = \left(1 + \frac{3}{8}e^2\right)\{(1, -1, m) + (-1, 1, m)\}$$
$$b_m = \left(1 + \frac{5}{8}e^2\right)\{(1, -1, m) - (-1, 1, m)\}$$

folgen. Durch die Anwendung dieser Ausdrücke ergiebt sich leicht:

$$
\begin{aligned}
\Gamma = \;& (1+\tfrac{3}{8}e^2)\{(1,0,4)-(1,0,5)\}\sin K \\
& + (1,0,6)\sin 2K \\
& + (1,0,7)\sin 2\Pi \\
& + (1,0,8)\sin(\Pi+\Pi') \\
& + (1+\tfrac{3}{8}e^2)\{(1,1,9)-(1,-1,1)\sin g \\
& + (1,1,10)+(-1,1,2)\sin(g+K) \\
& - (1,-1,2)\sin(g-K) \\
& + (1,1,11)\sin(g+2K) \\
& + (1,1,12)\sin(g+2\Pi) \\
& + (-1,2,3)\sin 2g \\
& + (-1,2,4)\sin(2g+K) \\
& + (-1,3,9)\sin 3g \\
& + (-1,3,10)\sin(3g+K) \\
& + (-1,3,11)\sin(3g+2K) \\
& + (-1,3,12)\sin(3g+2\Pi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Theta = \;& (1+\tfrac{5}{8}e^2)(1,0,3) \\
& + (1+\tfrac{5}{8}e^2)\{(1,0,4)+(1,0,5)\}\cos K \\
& + (1,0,6)\cos 2K \\
& + (1,0,7)\cos 2\Pi \\
& + (1,0,8)\cos(\Pi+\Pi') \\
& + (1+\tfrac{5}{8}e^2)\{(1,1,9)+(1,-1,1)\}\cos g \\
& + \{(1,1,10)-(-1,1,2)\}\cos(g+K) \\
& + (1,-1,2)\cos(g-K) \\
& + (1,1,11)\cos(g+2K) \\
& + (1,1,12)\cos(g+2\Pi) \\
& - (-1,2,3)\cos 2g \\
& - (-1,2,4)\cos(2g+K) \\
& - (-1,3,9)\cos 3g \\
& - (-1,3,10)\cos(3g+K) \\
& - (-1,3,11)\cos(3g+2K) \\
& - (-1,3,12)\cos(3g+2\Pi)
\end{aligned}
$$

wo wie früher

$$K = \Pi - \Pi'$$

ist.

## 60.

Die Substitution der im Art. 41 gegebenen Ausdrücke der eben angewandten Coefficienten giebt ferner

$$\Gamma = -\Big\{e'm'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1+\frac{1}{8}e^2e'm'\alpha\{(4)+6(3)+8(2)+8(1)-8(0)\}A_1+$$
$$+\frac{1}{8}e'^3m'\alpha\{(4)+10(3)+22(2)+4(1)-4(0)\}A_1-$$
$$-\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}\{B_0+B_2\}\Big\}\sin K$$
$$+\frac{1}{8}ee'^2m'\alpha\{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\}A_2\sin 2K$$
$$+\frac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\sin 2\Pi$$
$$-\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\sin(\Pi+\Pi')$$
$$+\Big\{2m'\alpha(1)A_0+\frac{1}{4}e^2m'\alpha\{(3)+2(2)-3(1)\}A_0+$$
$$+\frac{1}{2}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0-2\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+(0)\}B_1\Big\}\sin g$$
$$+ee'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1\sin(g+K)$$
$$-\frac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1\sin(g-K)$$
$$-\frac{1}{4}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)-8(1)+8(0)\}A_2\sin(g+2K)$$
$$-\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\sin(g+2\Pi)$$
$$-em'\alpha\{(2)-2(1)\}A_0\sin 2g$$
$$+e'm'\alpha\{(2)-2(1)+2(0)\}A_1\sin(2g+K)$$
$$+\frac{1}{4}e^2m'\alpha\{(3)-6(2)+9(1)\}A_0\sin 3g$$
$$-\frac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)-5(2)+9(1)-9(0)\}A_1\sin(3g+K)$$
$$+\frac{1}{4}e'^2m'\alpha\{(3)-4(2)+8(1)-8(0)\}A_2\sin(3g+2K)$$
$$+\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)-3(0)\}B_1\sin(3g+2\Pi)$$

$$\Theta = \Big\{em'\alpha\{(2)+2(1)\}A_0+\frac{1}{8}e^3m'\alpha\{(4)+4(3)+4(2)+8(1)\}A_0+$$
$$+\frac{1}{4}ee'^2m'\alpha\{(4)+8(3)+14(2)+4(1)\}A_0-e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1\Big\}$$
$$-\Big\{e'm'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1+\frac{1}{8}e^2e'm'\alpha\{3(4)+18(3)+16(2)+8(1)-8(0)\}A_1+$$
$$+\frac{1}{8}e'^3m'\alpha\{(4)+10(3)+22(2)+4(1)-4(0)\}A_1-$$
$$-\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}\{B_0+B_2\}\Big\}\cos K$$
$$+\frac{1}{8}ee'^2m'\alpha\{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\}A_2\cos 2K$$
$$+\frac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\cos 2\Pi$$
$$-\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\cos(\Pi+\Pi')$$
$$-\Big\{2m'\alpha(1)A_0+\frac{1}{4}e^2m'\alpha\{3(3)+6(2)-5(1)\}A_0+$$
$$+\frac{1}{2}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0-2\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+(0)\}B_1\Big\}\cos g$$
$$+ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-4(1)+4(0)\}A_1\cos(g+K)$$

$$+\frac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1\cos(g-K)$$
$$-\frac{1}{4}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)-8(1)+8(0)\}A_2\cos(g+2K)$$
$$-\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\cos(g+2\Pi)$$
$$+e\,m'\alpha\{(2)-2(1)\}A_0\cos 2g$$
$$-e'm'\alpha\{(2)-2(1)+2(0)\}A_1\cos(2g+K)$$
$$-\frac{1}{4}e^2m'\alpha\{(3)-6(2)+9(1)\}A_0\cos 3g$$
$$+\frac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)-5(2)+9(1)-9(0)\}A_1\cos(3g+K)$$
$$-\frac{1}{4}e'^2m'\alpha\{(3)-4(2)+8(1)-8(0)\}A_2\cos(3g+2K)$$
$$-\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)-3(0)\}B_1\cos(3g+2\Pi)$$

und hieraus folgt

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial e}\right)=-\frac{1}{4}ee'm'\alpha\{(4)+6(3)+8(2)+8(1)-8(0)\}A_1\sin K$$
$$+\frac{1}{8}e'^2m'\alpha\{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\}A_2\sin 2K$$
$$+\frac{1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\sin 2\Pi$$
$$+\frac{1}{2}e\,m'\alpha\{(3)+2(2)-3(1)\}A_0\sin g$$
$$+e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1\sin(g+K)$$
$$-\frac{1}{2}e'm'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1\sin(g-K)$$
$$-m'\alpha\{(2)-2(1)\}A_0\sin 2g$$
$$+\frac{1}{2}e\,m'\alpha\{(3)-6(2)+9(1)\}A_0\sin 3g$$
$$-\frac{1}{2}e'm'\alpha\{(3)-5(2)+9(1)-9(0)\}A_1\sin(3g+K)$$

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi}\right)=-\Big\{e'm'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1+\frac{1}{8}e^2e'm'\alpha\{(4)+6(3)+8(2)+8(1)-8(0)\}A_1+$$
$$+\frac{1}{8}e'^3m'\alpha\{(4)+10(3)+22(2)+4(1)-4(0)\}A_1-$$
$$-\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}\{B_0+B_2\}\Big\}\cos K$$
$$+\frac{1}{4}ee'^2m'\alpha\{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\}A_2\cos 2K$$
$$+e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\cos 2\Pi$$
$$-\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\cos(\Pi+\Pi')$$
$$+ee'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1\cos(g+K)$$
$$+\frac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1\cos(g-K)$$
$$-\frac{1}{2}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)-8(1)+8(0)\}A_2\cos(g+2K)$$

$$- 2\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\cos(g+2\Pi)$$
$$+ e'm'\alpha\{(2)-2(1)+2(0)\}A_1\cos(2g+K)$$
$$- \tfrac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)-5(2)+9(1)-9(0)\}A_1\cos(3g+K)$$
$$+ \tfrac{1}{2}e'^2m'\alpha\{(3)-4(2)+8(1)-8(0)\}A_2\cos(3g+2K)$$
$$+ 2\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)-3(0)\}B_1\cos(3g+2\Pi)$$

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g}\right) = \Big\{2m'\alpha(1)A_0+\tfrac{1}{4}e^2m'\alpha\{(3)+2(2)-3(1)\}A_0+$$
$$+\tfrac{1}{2}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0-2\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+(0)\}B_1\Big\}\cos g$$
$$+ ee'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1\cos(g+K)$$
$$- \tfrac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1\cos(g-K)$$
$$- \tfrac{1}{4}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)-8(1)+8(0)\}A_2\cos(g+2K)$$
$$- \sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\cos(g+2\Pi)$$
$$- 2em'\alpha\{(2)-2(1)\}A_0\cos 2g$$
$$+ 2e'm'\alpha\{(2)-2(1)+2(0)\}A_1\cos(2g+K)$$
$$+ \tfrac{3}{4}e^2m'\alpha\{(3)-6(2)+9(1)\}A_0\cos 3g$$
$$- \tfrac{3}{2}ee'm'\alpha\{(3)-5(2)+9(1)-9(0)\}A_1\cos(3g+K)$$
$$+ \tfrac{3}{4}e'^2m'\alpha\{(3)-4(2)+8(1)-8(0)\}A_2\cos(3g+2K)$$
$$+ 3\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)-3(0)\}B_1\cos(3g+2\Pi)$$

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial e}\right) = \Big\{m'\alpha\{(2)+2(1)\}A_0+\tfrac{3}{8}e^2m'\alpha\{(4)+4(3)+4(2)+8(1)\}A_0+$$
$$+\tfrac{1}{4}e'^2m'\alpha\{(4)+8(3)+14(2)+4(1)\}A_0-\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1\Big\}$$
$$- \tfrac{1}{4}ee'm'\alpha\{3(4)+18(3)+16(2)+8(1)-8(0)\}A_1\cos K$$
$$+ \tfrac{1}{8}e'^2m'\alpha\{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\}A_2\cos 2K$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\cos 2\Pi$$
$$- \tfrac{1}{2}em'\alpha\{3(3)+6(2)-5(1)\}A_0\cos g$$
$$+ e'm'\alpha\{(3)+3(2)-4(1)+4(0)\}A_1\cos(g+K)$$
$$+ \tfrac{1}{2}e'm'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1\cos(g-K)$$
$$+ m'\alpha\{(2)-2(1)\}A_0\cos 2g$$
$$- \tfrac{1}{2}em'\alpha\{(3)-6(2)+9(1)\}A_0\cos 3g$$
$$+ \tfrac{1}{2}e'm'\alpha\{(3)-5(2)+9(1)-9(0)\}A_1\cos(3g+K)$$

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\Pi}\right) = \Big\{e'm'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1 + \frac{1}{8}e^2e'm'\alpha\{3(4)+18(3)+16(2)+8(1)-8(0)\}A_1 +$$

$$+\frac{1}{8}e'^3m'\alpha\{(4)+10(3)+22(2)+4(1)-4(0)\}A_1 -$$

$$-\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}\{B_0+B_2\}\Big\}\sin K$$

$$-\frac{1}{4}ee'^2m'\alpha\{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\}A_2\sin 2K$$

$$-e\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\sin 2\Pi$$

$$+\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\sin(\Pi+\Pi')$$

$$-ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-4(1)+4(0)\}A_1\sin(g+K)$$

$$+\frac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1\sin(g-K)$$

$$+\frac{1}{2}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)-8(1)+8(0)\}A_2\sin(g+2K)$$

$$+2\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\sin(g+2\Pi)$$

$$+e'm'\alpha\{(2)-2(1)+2(0)\}A_1\sin(2g+K)$$

$$-\frac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)-5(2)+9(1)-9(0)\}A_1\sin(3g+K)$$

$$+\frac{1}{2}e'^2m'\alpha\{(3)-4(2)+8(1)-8(0)\}A_2\sin(3g+2K)$$

$$+2\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)-3(0)\}B_1\sin(3g+2\Pi)$$

$$\left(\frac{\partial\Theta}{\partial g}\right) = \Big\{2m'\alpha(1)A_0 + \frac{1}{4}e^2m'\alpha\{3(3)+6(2)-5(1)\}A_0 +$$

$$+\frac{1}{2}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0 - 2\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+(0)\}B_1\Big\}\sin g$$

$$-ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-4(1)+4(0)\}A_1\sin(g+K)$$

$$-\frac{1}{2}ee'm'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1\sin(g-K)$$

$$+\frac{1}{4}e'^2m'\alpha\{(3)+4(2)-8(1)+8(0)\}A_2\sin(g+2K)$$

$$+\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\sin(g+2\Pi)$$

$$-2em'\alpha\{(2)-2(1)\}A_0\sin 2g$$

$$+2e'm'\alpha\{(2)-2(1)+2(0)\}A_1\sin(2g+K)$$

$$+\frac{3}{4}e^2m'\alpha\{(3)-6(2)+9(1)\}A_0\sin 3g$$

$$-\frac{3}{2}ee'm'\alpha\{(3)-5(2)+9(1)-9(0)\}A_1\sin(3g+K)$$

$$+\frac{3}{4}e'^2m'\alpha\{(3)-4(2)+8(1)-8(0)\}A_2\sin(3g+2K)$$

$$+3\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\{(1)-3(0)\}B_1\sin(3g+2\Pi)$$

$$a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial g}\right) = em'\alpha(1)A_0\sin g$$

$$-e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1\sin(g+K)$$

Die im Art. 58 entwickelten Ausdrücke geben nun leicht:

$$\begin{aligned}
M = & -\tfrac{1}{8}ee'((5))\sin K \\
& +\tfrac{1}{16}e'^2((6))\sin 2K \\
& +\tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\sin 2\Pi \\
& +\tfrac{1}{4}e((8))\sin g \\
& +\tfrac{3}{2}e'((9))\sin(g+K) \\
& -\tfrac{1}{4}e'((10))\sin(g-K) \\
& -\tfrac{1}{2}((11))\sin 2g \\
& +\tfrac{1}{4}e((12))\sin 3g \\
& -\tfrac{1}{4}e'((13))\sin(3g+K)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
N = & -\{\tfrac{1}{2}((1))+\tfrac{1}{16}e^2((2))+\tfrac{1}{8}e'^2((3))-\tfrac{1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J((4))\} \\
& +\tfrac{1}{8}ee'((5))'\cos K \\
& +\tfrac{1}{16}e'^2((6))\cos 2K \\
& +\tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\cos 2\Pi \\
& +\tfrac{1}{4}e((8))'\cos g \\
& -\tfrac{1}{2}e'((9))'\cos(g+K) \\
& +\tfrac{1}{4}e'((10))\cos(g-K) \\
& +\tfrac{1}{2}((11))\cos 2g \\
& -\tfrac{1}{4}e((12))\cos 3g \\
& +\tfrac{1}{4}e'((13))\cos(3g+K)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P = & \{\tfrac{1}{2}((1))+\tfrac{1}{16}e^2((2))'+\tfrac{1}{8}e'^2((3))-\tfrac{1}{2}\sin^2\tfrac{1}{2}J((4))\} \\
& -\tfrac{3}{8}ee'((5))'\cos K \\
& +\tfrac{1}{16}e'^2((6))\cos 2K \\
& +\tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\cos 2\Pi \\
& -\tfrac{3}{4}e((8))''\cos g \\
& +\tfrac{1}{2}e'((9))'\cos(g+K) \\
& +\tfrac{1}{4}e'((10))\cos(g-K) \\
& +\tfrac{1}{2}((11))\cos 2g \\
& -\tfrac{1}{4}e((12))\cos 3g \\
& +\tfrac{1}{4}e'((13))\cos(3g+K)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Q = & \tfrac{1}{8} e e' ((5))'' \sin K \\
& - \tfrac{1}{16} e'^2 ((6)) \sin 2K \\
& - \tfrac{1}{4} \sin^2 \tfrac{1}{2} J ((7)) \sin 2\Pi \\
& - \tfrac{1}{4} e ((8))''' \sin g \\
& + \tfrac{3}{2} e' ((9)) \sin (g+K) \\
& + \tfrac{1}{4} e' ((10)) \sin (g-K) \\
& + \tfrac{1}{2} ((11)) \sin 2g \\
& - \tfrac{1}{4} e ((12)) \sin 3g \\
& + \tfrac{1}{4} e' ((13)) \sin (3g+K)
\end{aligned}
$$

wo zur Abkürzung

$$
\begin{aligned}
((1)) &= m'\alpha \{(2)+2(1)\} A_0 \\
((2)) &= m'\alpha \{(4)+4(3)-4(2)-8(1)\} A_0 \\
((2))' &= m'\alpha \{3(4)+12(3)-4(2)-8(1)\} A_0 \\
((3)) &= m'\alpha \{(4)+8(3)+14(2)+4(1)\} A_0 \\
((4)) &= m'\alpha \{(2)+4(1)+2(0)\} B_1 \\
((5)) &= m'\alpha \{(4)+6(3)+8(2)+8(1)-8(0)\} A_1 \\
((5))' &= m'\alpha \{(4)+6(3)+4(2)\} A_1 \\
((5))'' &= m'\alpha \{(4)+6(3) \quad -8(1)+8(0)\} A_1 \\
((6)) &= m'\alpha \{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\} A_2 \\
((7)) &= m'\alpha \{(2)+8(1)+12(0)\} B_1 \\
((8)) &= m'\alpha \{(3)+2(2)-7(1)\} A_0 \\
((8))' &= m'\alpha \{(3)+2(2)-9(1)\} A_0 \\
((8))'' &= m'\alpha \{(3)+2(2)-3(1)\} A_0 \\
((8))''' &= m'\alpha \{(3)+2(2)+7(1)\} A_0 \\
((9)) &= m'\alpha \{(1)-(0)\} A_1 \\
((9))' &= m'\alpha \{(3)+3(2)-4(1)+4(0)\} A_1 \\
((10)) &= m'\alpha \{(3)+3(2)-(1)+(0)\} A_1 \\
((11)) &= m'\alpha \{(2)-2(1)\} A_0 \\
((12)) &= m'\alpha \{(3)-6(2)+9(1)\} A_0 \\
((13)) &= m'\alpha \{(3)-5(2)+9(1)-9(0)\} A_1
\end{aligned}
$$

gesetzt worden sind.

Es wird hierauf für die hier zu entwickelnden Glieder

$$\frac{d\delta\Upsilon}{n\,dt} = M\Upsilon + N\Psi$$

$$\frac{d\delta\Psi}{n\,dt} = P\Upsilon + Q\Psi$$

da sich weiter unten zeigen wird, dass die in diesen Ausdrücken mit $X$ und $\Xi$ multiplicirten Glieder hier Nichts geben können.

## 61.

Es sind jetzt die Ausdrücke für $X$, $\Xi$, $\Upsilon$, $\Psi$ abzuleiten, und diese sollen bis zu den im zunächst Vorhergehenden beibehaltenen Ordnungen vollständig entwickelt werden, obgleich sie in dieser Vollständigkeit nicht alle gebraucht werden. Ich entnehme zuerst aus den Artt. 46 und 47 die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} n\delta z = {} & Knt\sin g + Lnt\cos g \\ & + \tfrac{1}{4}eKnt\sin 2g + \tfrac{1}{4}eLnt\cos 2g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu = {} & -\tfrac{1}{4}eKnt \\ & -\tfrac{1}{2}eKnt\cos g + \tfrac{1}{2}Lnt\sin g \\ & -\tfrac{1}{4}eKnt\cos 2g + \tfrac{1}{4}eLnt\sin 2g \\ & -\tfrac{1}{3}m'\alpha\,(1)A_0 \\ & +\tfrac{1}{2}em'\alpha\{(2)+2(1)\}A_0\cos g \\ & -\tfrac{1}{2}e'm'\alpha\{(2)+(1)-(0)\}A_1\cos(g+K) \end{aligned}$$

womit durch die Gleichung

$$S = \frac{d\delta z}{dt} + 2\nu$$

erhalten wird:

$$\begin{aligned} S = {} & -\tfrac{1}{2}eKnt \\ & -\tfrac{2}{3}m'\alpha\,(1)A_0 \\ & + e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1\cos(g+K) \end{aligned}$$

62.

Den Ausdrücken von $n\delta z$, $\nu$, $S$, die eben aufgestellt worden sind, müssen jetzt die des Art. 55 gegenüber gestellt werden. Da hier mit ausreichender Genauigkeit

$$\frac{r}{a}\cos f+\frac{3}{2}e = (1-\frac{3}{8}e^2)\cos g+\frac{1}{2}e\cos 2g$$
$$\frac{r}{a}\sin f = (1-\frac{5}{8}e^2)\sin g+\frac{1}{2}e\sin 2g$$

angesetzt werden dürfen, so werden

$$\int(\frac{r}{a}\cos f+\frac{3}{2}e)\,dg = \frac{\sqrt{1-e^2}}{2}\left(\frac{r}{a}+\frac{r^2}{a^2(1-e^2)}\right)$$
$$= (1-\frac{3}{8}e^2)\sin g+\frac{1}{4}e\sin 2g$$

$$\int\frac{r}{a}\sin f\,dg = \frac{\sqrt{1-e^2}}{2e}\left(\frac{r^2}{a^2}-\frac{2+3e^2}{2}\right)$$
$$= -(1-\frac{5}{8}e^2)\cos g-\frac{1}{4}e\cos 2g$$

und die angezogenen Gleichungen des Art. 55 stellen sich unter folgender Form dar:

$$n\delta z = X+\Upsilon\{(1-\frac{3}{8}e^2)\sin g+\frac{1}{4}e\sin 2g\}$$
$$-\Psi\{(1-\frac{5}{8}e^2)\cos g+\frac{1}{4}e\cos 2g\}$$

$$\nu = -\frac{2}{3}\Xi-\Upsilon\{\frac{1}{4}e+\frac{1}{2}(1-\frac{3}{8}e^2)\cos g+\frac{1}{4}e\cos 2g\}$$
$$-\Psi\{\frac{1}{2}(1-\frac{5}{8}e^2)\sin g+\frac{1}{4}e\sin 2g\}$$

$$S = -\frac{1}{3}\Xi-\frac{1}{2}e\Upsilon$$

$$\frac{dX}{ndt} = \Xi-\frac{d\Upsilon}{ndt}\{(1-\frac{3}{8}e^2)\sin g+\frac{1}{4}e\sin 2g\}$$
$$+\frac{d\Psi}{ndt}\{(1-\frac{5}{8}e^2)\cos g+\frac{1}{4}e\cos 2g\}$$

Durch Vergleichung mit den Ausdrücken des vor. Art. gehen die folgenden Werthe hervor:

$$X = \frac{1}{2}em'\alpha\{4(2)+5(1)\}A_0\sin g$$
$$-e'm'\alpha\{2(2)+3(1)-3(0)\}A_1\sin(g+K)$$

$$\Xi = 2m'\alpha(1)A_0$$
$$+3em'\alpha(1)A_0\cos g$$
$$-3e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1\cos(g+K)$$

$$\Upsilon = (1+\tfrac{3}{8}e^2)\,Knt$$
$$-\tfrac{3}{2}e\,m'\alpha\{(2)+2(1)\}A_0$$
$$+\tfrac{1}{2}e'm'\alpha\{3(2)+8(1)-8(0)\}A_1\cos K$$
$$-2m'\alpha\,(1)A_0\cos g$$
$$+\tfrac{1}{2}e\,m'\alpha\{(2)-2(1)\}A_0\cos 2g$$
$$-\tfrac{1}{2}e'm'\alpha\{(2)-2(1)+2(0)\}A_1\cos(2g+K)$$

$$\Psi = -(1+\tfrac{5}{8}e^2)\,Lnt$$
$$-\tfrac{1}{2}e'm'\alpha\{3(2)+8(1)-8(0)\}A_1\sin K$$
$$-2m'\alpha\,(1)A_0\sin g$$
$$+\tfrac{1}{2}e\,m'\alpha\{(2)-2(1)\}A_0\sin 2g$$
$$-\tfrac{1}{2}e'm'\alpha\{(2)-2(1)+2(0)\}A_1\sin(2g+K)$$

von deren Richtigkeit man sich jedenfalls durch die Rücksubstitution überzeugen kann.

## 63.

Da in den Ausdrücken von $\delta\Upsilon$ und $\delta\Psi$ hier blos die mit $t^2$ und $t$ multiplicirten Glieder verlangt werden, so braucht man in den Differentialen derselben blos die in den Ausdrücken des vor. Art. schon mit $t$ multiplicirten Glieder zu substituiren, und es fallen also $X$ und $\Xi$ weg, wie schon am Ende des Art. 60 angemerkt wurde. Die Ausführung der Substitution in die Differentialgleichungen, die am Ende des Art. 60 angeführt worden sind, und die Integration, bei welcher auch die Glieder wegzulassen sind, die den Factor $t$ nicht enthalten, giebt ohne Schwierigkeit:

$$\delta\Upsilon = (1+\tfrac{3}{8}e^2)\,CKn^2t^2 + (1+\tfrac{5}{8}e^2)\,D'Ln^2t^2$$
$$-\tfrac{1}{4}e((8))\,Knt\cos g$$
$$-\tfrac{3}{2}e'((9))\,Knt\cos(g+K)$$
$$+\tfrac{1}{4}e'((10))\,Knt\cos(g-K)$$

$$+\frac{1}{4}((11))\,Knt\cos 2g$$
$$-\frac{1}{12}e((12))\,Knt\cos 3g$$
$$+\frac{1}{12}e'((13))\,Knt\cos(3g+K)$$
$$-\frac{1}{4}e((8))'\,Lnt\sin g$$
$$+\frac{1}{2}e'((9))'\,Lnt\sin(g+K)$$
$$-\frac{1}{4}e'((10))\,Lnt\sin(g-K)$$
$$-\frac{1}{4}((11))\,Lnt\sin 2g$$
$$+\frac{1}{12}e((12))\,Lnt\sin 3g$$
$$-\frac{1}{12}e'((13))\,Lnt\sin(3g+K)$$

$$\delta\Psi = -\left(1+\frac{3}{8}e^2\right)E'Kn^2t^2-\left(1+\frac{5}{8}e^2\right)FLn^2t^2$$
$$-\frac{3}{4}e((8))''Knt\sin g$$
$$+\frac{1}{2}e'((9))'Knt\sin(g+K)$$
$$+\frac{1}{4}e'((10))\,Knt\sin(g-K)$$
$$+\frac{1}{4}((11))\,Knt\sin 2g$$
$$-\frac{1}{12}e((12))\,Knt\sin 3g$$
$$+\frac{1}{12}e'((13))\,Knt\sin(3g+K)$$
$$-\frac{1}{4}e((8))'''Lnt\cos g$$
$$+\frac{3}{2}e'((9))\,Lnt\cos(g+K)$$
$$+\frac{1}{4}e'((10))\,Lnt\cos(g-K)$$
$$+\frac{1}{4}((11))\,Lnt\cos 2g$$
$$-\frac{1}{12}e((12))\,Lnt\cos 3g$$
$$+\frac{1}{12}e'((13))\,Lnt\cos(3g+K)$$

wo

$$C = -\frac{1}{16}ee'((5))\sin K+\frac{1}{32}e'^2((6))\sin 2K+\frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\sin 2\Pi$$

$$D' = \left\{\frac{1}{4}((1))+\frac{1}{32}e^2((2))+\frac{1}{16}e'^2((3))-\frac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((4))\right\}$$
$$-\frac{1}{16}ee'((5))'\cos K-\frac{1}{32}e'^2((6))\cos 2K-\frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\cos 2\Pi$$

$$E' = -\{\tfrac{1}{4}((1)) + \tfrac{1}{32}e^2((2))' - \tfrac{1}{16}e'^2((3)) - \tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((4))\}$$
$$+ \tfrac{3}{16}ee'((5))'\cos K - \tfrac{1}{32}e'^2((6))\cos 2K - \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\cos 2\Pi$$

$$F = \tfrac{1}{16}ee'((5))''\sin K - \tfrac{1}{32}e'((6))\sin 2K - \tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\sin 2\Pi$$

gesetzt worden sind.

## 64.

Zur Entwickelung von $\delta\Xi$ könnte man die Gleichung

$$\delta\Xi = -\tfrac{3}{2}e\delta\Upsilon - 3\delta S + 2S^2$$

anwenden, die im Art. 57 abgeleitet worden ist, aber man verfährt einfacher, eine Gleichung zu benutzen, die ich schon vor vielen Jahren gegeben habe, und aus welcher im gegenwärtigen Falle $\delta\Xi$ ohne neue Integration folgt. Diese Gleichung ist

$$\frac{a_0}{a} = 1 + \tfrac{2}{3}\Xi + \tfrac{2}{3}\left(\frac{h}{h_0} - 1\right)\Xi - \tfrac{1}{3}\left(\frac{h}{h_0} - 1\right)^2 - \tfrac{1}{4}(1-e^2)(\Upsilon^2 + \Psi^2)$$

deren Ableitung man unter Anderem im § 2 der dritten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten findet. Da hier in $\delta\Xi$ nur die der Zeit $t$ und $t^2$ proportionalen Glieder verlangt werden, und solche in der grossen Halbachse $a$ nicht vorhanden sind, so wird hier

$$\frac{a_0}{a} = 1$$

mithin

$$\delta\Xi = -\left(\frac{h}{h_0} - 1\right)\Xi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{h}{h_0} - 1\right)^2 + \tfrac{3}{8}(1-e^2)(\Upsilon^2 + \Psi^2)$$

oder wegen

$$\frac{h}{h_0} - 1 = -S = \tfrac{1}{3}\Xi + \tfrac{1}{2}e\Upsilon$$

$$\delta\Xi = -\tfrac{1}{3}e\Xi\Upsilon + \tfrac{1}{8}e^2\Upsilon^2 + \tfrac{3}{8}(1-e^2)(\Upsilon^2 + \Psi^2)$$

indem die weggelassenen Glieder hier nichts Merkliches geben können. Die Ausdrücke des Art. 62 geben nun

$$\Xi\Upsilon = 2m'\alpha(1)A_0 Knt$$
$$\Upsilon^2 = K^2n^2t^2 - 3em'\alpha\{(2)+3(1)\}A_0 Knt$$
$$+ e'm'\alpha\{3(2)+8(1)-8(0)\}A_1 Knt\cos K$$
$$\Psi^2 = L^2n^2t^2 + e'm'\alpha\{3(2)+8(1)-8(0)\}A_1 Lnt\sin K$$

womit sogleich *)

$$\delta\Xi = \frac{3}{8}(K^2+L^2)n^2t^2$$
$$-\frac{1}{24}e\,m'\alpha\{27(2)+70(1)\}A_0\,Knt$$
$$+\frac{3}{8}e'm'\alpha\{3(2)+8(1)-8(0)\}A_1\,Knt\cos K$$
$$+\frac{3}{8}e'm'\alpha\{3(2)+8(1)-8(0)\}A_1\,Lnt\sin K$$

erhalten wird. Man kann die Coefficienten dieses Ausdrucks vereinfachen. Durch Hülfe der Ausdrücke des Art. 46 für $K$ und $L$ findet man leicht bis auf Grössen vierter Ordnung identisch

$$0 = e\,m'\alpha\{(2)+2(1)\}A_0\,K$$
$$-e'm'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1\,K\cos K$$
$$-e'm'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1\,L\sin K$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $\frac{9}{8}nt$, und addirt das Product zum Ausdruck für $\delta\Xi$, so wird derselbe

$$\delta\Xi = \frac{3}{8}(K^2+L^2)n^2t^2$$
$$-\frac{2}{3}e\,m'\alpha(1)A_0\,Knt$$
$$+\frac{3}{4}e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1\,Knt\cos K$$
$$+\frac{3}{4}e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1\,Lnt\sin K$$

## 65.

Die Substitution der vorstehenden Ausdrücke für $\delta\Xi$, $\delta\Upsilon$, $\delta\Psi$ in

$$\delta W = \delta\Xi+\delta\Upsilon\{(1-\tfrac{3}{8}e^2)\cos\gamma+\tfrac{1}{2}e\cos 2\gamma+\tfrac{3}{8}e^2\cos 3\gamma\}$$
$$+\delta\Psi\{(1-\tfrac{5}{8}e^2)\sin\gamma+\tfrac{1}{2}e\sin 2\gamma+\tfrac{3}{8}e^2\sin 3\gamma\}$$

giebt nun

$$\delta W = \frac{3}{8}(K^2+L^2)n^2t^2$$
$$+\{CK+DL\}n^2t^2\cos\gamma \qquad -\{EK+FL\}n^2t^2\sin\gamma$$
$$+\frac{1}{2}e\{CK+DL\}n^2t^2\cos 2\gamma - \frac{1}{2}e\{EK+FL\}n^2t^2\sin 2\gamma$$
$$+\frac{3}{8}e^2\{CK+DL\}n^2t^2\cos 3\gamma - \frac{3}{8}e^2\{EK+FL\}n^2t^2\sin 3\gamma$$

---

*) Wir erinnern an die Anmerkung zu Art. 46, S. 353.

$$
\begin{aligned}
&-\tfrac{2}{3}em'\alpha(1)A_0 Knt \\
&+\tfrac{3}{4}e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1 Knt\cos K \\
&+\tfrac{3}{4}e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1 Lnt\sin K \\
&-\tfrac{1}{8}e\{((8))+3((8))''\}Knt\cos(-\gamma+g) \\
&-\tfrac{1}{8}e\{((8))'-((8))'''\}Lnt\sin(-\gamma+g) \\
&-\tfrac{1}{4}e'\{3((9))-((9))'\}Knt\cos(-\gamma+g+K) \\
&+\tfrac{1}{4}e'\{((9))'-3((9))\}Lnt\sin(-\gamma+g+K) \\
&+\tfrac{1}{4}e'((10))Knt\cos(-\gamma+g-K) \\
&-\tfrac{1}{4}e'((10))Lnt\sin(-\gamma+g-K) \\
&+\tfrac{1}{8}e((11))Knt\cos(-2\gamma+2g) \\
&-\tfrac{1}{8}e((11))Lnt\sin(-2\gamma+2g)
\end{aligned}
$$

wo die Glieder weggelassen worden sind, die hier nichts Merkliches geben können. Die Coefficienten $C$ und $F$ sind dieselben wie in Art. 63, während

$$
\begin{aligned}
D &= (1+\tfrac{1}{4}e^2)\,D' \\
E &= (1-\tfrac{1}{4}e^2)\,E'
\end{aligned}
$$

Aus dem vorstehenden Ausdrucke bekommt man nun auf bekannte Art

$$
\begin{aligned}
\delta W = &\ \tfrac{3}{8}(K^2+L^2)\,n^2t^2 \\
&+\{CK+DL\}n^2t^2\cos g \qquad -\{EK+FL\}n^2t^2\sin g \\
&+\tfrac{1}{2}e\{CK+DL\}n^2t^2\cos 2g -\tfrac{1}{2}e\{EK+FL\}n^2t^2\sin 2g \\
&+\tfrac{3}{8}e^2\{CK+DL\}n^2t^2\cos 3g -\tfrac{3}{8}e^2\{EK+FL\}n^2t^2\sin 3g \\
&+\{A'K+B'L\}nt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta\left(\frac{\overline{\delta W}}{\delta\gamma}\right) = &-\{CK+DL\}n^2t^2\sin g \qquad -\{EK+FL\}n^2t^2\cos g \\
&-e\{CK+DL\}n^2t^2\sin 2g \qquad -e\{EK+FL\}n^2t^2\cos 2g \\
&-\tfrac{9}{8}e^2\{CK+DL\}n^2t^2\sin 3g -\tfrac{9}{8}e^2\{EK+FL\}n^2t^2\cos 3g \\
&+\{A''K+B''L\}nt
\end{aligned}
$$

wo

$$A' = -\frac{2}{3}e\,m'\alpha\,(1)A_0 - \frac{1}{8}e\{((8))+3((8))''\} + \frac{1}{8}e((11))$$
$$+\left\{\frac{3}{4}e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1 - \frac{1}{4}e'\{3((9))-((9))'\} + \frac{1}{4}e'((10))\right\}\cos K$$

$$B' = \left\{\frac{3}{4}e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1 - \frac{1}{4}e'\{3((9))-((9))'\} + \frac{1}{4}e'((10))\right\}\sin K$$

$$A'' = \left\{-\frac{1}{4}e'\{3((9))-((9))'\} - \frac{1}{4}e'((10))\right\}\sin K$$

$$B'' = \left\{\frac{1}{8}e\{((8))'-((8))'''\} + \frac{1}{4}e((11))\right\}$$
$$+\left\{\frac{1}{4}e'\{3((9))-((9))'\} + \frac{1}{4}e'((10))\right\}\cos K$$

oder, wenn man die Coefficienten durch ihre im Art. 60 gegebenen Werthe auf die $A_i$ hinführt:

$$A' = -\frac{1}{24}e\,m'\alpha\{12(3)+21(2)-26(1)\}A_0$$
$$+\frac{1}{4}e'm'\alpha\{2(3)+6(2)-5(1)+5(0)\}A_1\cos K$$

$$B' = \frac{1}{4}e'm'\alpha\{2(3)+6(2)-5(1)+5(0)\}A_1\sin K$$

$$A'' = -\frac{3}{2}e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1\sin K$$

$$B'' = \frac{1}{4}e\,m'\alpha\{(2)-10(1)\}A_0$$
$$+\frac{3}{2}e'm'\alpha\{(1)-(0)\}A_1\cos K$$

## 66.

Die Gleichungen

$$\left(\frac{\overline{\partial W}}{\partial\gamma}\right) = -\Upsilon(\sin g + e\sin 2g) + \Psi(\cos g + e\cos 2g)$$
$$\left(\frac{\overline{\partial^2 W}}{\partial\gamma^2}\right) = -\Upsilon(\cos g + 2e\cos 2g) - \Psi(\sin g + 2e\sin 2g)$$

gehen durch die Substitution der Ausdrücke des Art. 62 für $\Upsilon$ und $\Psi$ in die folgenden über

$$\left(\frac{\overline{\partial W}}{\partial\gamma}\right) = -Knt\sin g - Lnt\cos g$$
$$-eKnt\sin 2g - eLnt\cos 2g$$
$$+2e\,m'\alpha\{(2)+2(1)\}A_0\sin g$$
$$-e'm'\alpha\{2(2)+3(1)-3(0)\}A_1\sin(g+K)$$

$$\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\gamma^2}\right) = -Knt\cos g + Lnt\sin g$$
$$-2eKnt\cos 2g + 2eLnt\sin 2g$$
$$+2m'\alpha(1)A_0$$
$$+em'\alpha\{(2)+8(1)\}A_0\cos g$$
$$-e'm'\alpha\{(2)+5(1)-5(0)\}A_1\cos(g+K)$$

Durch Multiplication mit

$$n\delta z = Knt\sin g + Lnt\cos g$$
$$+\frac{1}{4}eKnt\sin 2g + \frac{1}{4}eLnt\cos 2g$$

erhält man:

$$\left(\frac{\delta W}{\delta\gamma}\right)n\delta z = -\frac{1}{2}(K^2+L^2)n^2t^2$$
$$-\frac{5}{8}e(K^2+L^2)n^2t^2\cos g$$
$$+\frac{1}{2}(K^2-L^2)n^2t^2\cos 2g \quad -KLn^2t^2\sin 2g$$
$$+\frac{5}{8}e(K^2-L^2)n^2t^2\cos 3g - \frac{5}{4}eKLn^2t^2\sin 3g$$
$$+em'\alpha\{(2)+2(1)\}A_0Knt$$
$$-\frac{1}{2}e'm'\alpha\{2(2)+3(1)-3(0)\}A_1Knt\cos K$$
$$-\frac{1}{2}e'm'\alpha\{2(2)+3(1)-3(0)\}A_1Lnt\sin K$$

$$\left(\frac{\delta^2 W}{\delta\gamma^2}\right)n\delta z = \frac{7}{8}e(K^2+L^2)n^2t^2\sin g$$
$$-\frac{1}{2}(K^2-L^2)n^2t^2\sin 2g \quad -KLn^2t^2\cos 2g$$
$$-\frac{9}{8}e(K^2-L^2)n^2t^2\sin 3g - \frac{9}{4}eKLn^2t^2\cos 3g$$
$$+\frac{1}{2}e'm'\alpha\{(2)+5(1)-5(0)\}A_1Knt\sin K$$
$$+\frac{1}{2}em'\alpha\{(2)+8(1)\}A_0Lnt$$
$$-\frac{1}{2}e'm'\alpha\{(2)+5(1)-5(0)\}A_1Lnt\cos K$$

wenn von den mit $t$ multiplicirten Gliedern nur die aufgenommen werden, die im Uebrigen constant sind. Der Ausdruck für $\nu$ im Art. 61 giebt mit derselben Beschränkung

$$\begin{aligned}
\nu^2 = \; & \tfrac{1}{8}(K^2+L^2)\,n^2t^2 \\
& +\tfrac{1}{8}e(3K^2+L^2)\,n^2t^2\cos g - \tfrac{1}{4}eKLn^2t^2\sin g \\
& +\tfrac{1}{8}(K^2-L^2)\,n^2t^2\cos 2g - \tfrac{1}{4}KLn^2t^2\sin 2g \\
& +\tfrac{1}{8}e(K^2-L^2)\,n^2t^2\cos 3g - \tfrac{1}{4}eKLn^2t^2\sin 3g \\
& -\tfrac{1}{12}em'\alpha\{3(2)+4(1)\}A_0Knt \\
& +\tfrac{1}{4}e'm'\alpha\{(2)+(1)-(0)\}A_1Knt\cos K \\
& +\tfrac{1}{4}e'm'\alpha\{(2)+(1)-(0)\}A_1Lnt\sin K
\end{aligned}$$

## 67.

Da nun die im Art. 54 angeführten allgemeinen Ausdrücke, mit blosser Rücksicht auf das Quadrat der störenden Kraft

$$n\delta z = n\int\left\{\delta\overline{W}+\delta\left(\frac{\delta\overline{W}}{\delta\gamma}\right).n\delta z+\nu^2\right\}dt$$

$$\nu = -\tfrac{1}{2}n\int\left\{\delta\left(\frac{\delta\overline{W}}{\delta\gamma}\right)+\delta\left(\frac{\delta^2\overline{W}}{\delta\gamma^2}\right).n\delta z\right\}dt$$

geben, so erhält man aus den vorstehenden Entwickelungen leicht:

$$\begin{aligned}
n\delta z = \; & \{AK+BL\}\,n^2t^2 \\
& +\{(CK+DL)-\tfrac{1}{4}e(K^2+2L^2)\}\,n^2t^2\sin g \\
& +\{(EK+FL)+\tfrac{1}{4}eKL\}\,n^2t^2\cos g \\
& +\{\tfrac{1}{4}e(CK+DL)+\tfrac{5}{16}(K^2-L^2)\}\,n^2t^2\sin 2g \\
& +\{\tfrac{1}{4}e(EK+FL)+\tfrac{5}{8}KL\}\,n^2t^2\cos 2g \\
& +\{\tfrac{1}{8}e^2(CK+DL)+\tfrac{1}{4}e(K^2-L^2)\}\,n^2t^2\sin 3g \\
& +\{\tfrac{1}{8}e^2(EK+FL)+\tfrac{1}{2}eKL\}\,n^2t^2\cos 3g
\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}
A = \; & \tfrac{1}{2}A'+\tfrac{1}{24}em'\alpha\{9(2)+20(1)\}A_0 \\
& -\tfrac{1}{8}e'm'\alpha\{3(2)+5(1)-5(0)\}A_1\cos K
\end{aligned}$$

$$B = \tfrac{1}{2}B'-\tfrac{1}{8}e'm'\alpha\{3(2)+5(1)-5(0)\}A_1\sin K$$

ferner

$$\nu = \{\tfrac{1}{8}(K^2+L^2) - GL\} n^2 t^2$$
$$+\{-\tfrac{1}{2}(CK+DL)+\tfrac{7}{16}e(K^2+L^2)\} n^2 t^2 \cos g$$
$$+\{\tfrac{1}{2}(EK+FL) \qquad \} n^2 t^2 \sin g$$
$$+\{-\tfrac{1}{4}e(CK+DL)-\tfrac{1}{8}(K^2-L^2)\} n^2 t^2 \cos 2g$$
$$+\{\tfrac{1}{4}e(EK+FL)+\tfrac{1}{4}KL\} n^2 t^2 \sin 2g$$
$$+\{-\tfrac{3}{16}e^2(CK+DL)-\tfrac{3}{16}e(K^2-L^2)\} n^2 t^2 \cos 3g$$
$$+\{\tfrac{3}{16}e^2(EK+FL)+\tfrac{3}{8}eKL\} n^2 t^2 \sin 3g$$

nebst

$$G = \tfrac{1}{16} e m'\alpha\{(2)+(1)\} A_0$$

## 68.

Führt man nun alle Coefficienten der beiden eben erhaltenen Ausdrücke für $n\delta z$ und $\nu$ auf die $A_i$ und $B_i$ hin, so ergeben sich die Gleichungen:

$$A = -\tfrac{1}{16}e\{1\}+\tfrac{1}{8}e'\{2\}\cos K$$
$$B = \tfrac{1}{8}e'\{2\}\sin K$$
$$C = -\tfrac{1}{16}ee'\{7\}\sin K+\tfrac{1}{32}e'^2\{8\}\sin 2K+\tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{9\}\sin 2\Pi$$
$$D = \left\{\tfrac{1}{4}\{3\}+\tfrac{1}{32}e^2\{4\}+\tfrac{1}{16}e'^2\{5\}-\tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{6\}\right\}$$
$$-\left\{\tfrac{1}{16}ee'\{7\}'\cos K+\tfrac{1}{32}e'^2\{8\}\cos 2K+\tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{9\}\cos 2\Pi\right\}$$
$$E = -\left\{\tfrac{1}{4}\{3\}+\tfrac{3}{32}e^2\{4\}+\tfrac{1}{16}e'^2\{5\}-\tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{6\}\right\}$$
$$+\left\{\tfrac{3}{16}ee'\{7\}'\cos K-\tfrac{1}{32}e'^2\{8\}\cos 2K-\tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{9\}\cos 2\Pi\right\}$$
$$F = \tfrac{1}{16}ee'\{7\}''\sin K-\tfrac{1}{32}e'^2\{8\}\sin 2K-\tfrac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{9\}\sin 2\Pi$$
$$G = \tfrac{1}{16}e\{3\}$$

in welchen

$$\{1\} = m'\alpha\{4(3)+(2)-22(1)\}A_0$$
$$\{2\} = m'\alpha\{2(3)+3(2)-10(1)+10(0)\}A_1$$
$$\{3\} = m'\alpha\{(2)+2(1)\}A_0$$
$$\{4\} = m'\alpha\{(4)+4(3)-2(2)-4(1)\}A_0$$

$$\{5\} = m'\alpha\{(4)+8(3)+14(2)+4(1)\}A_0$$
$$\{6\} = m'\alpha\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1$$
$$\{7\} = m'\alpha\{(4)+6(3)+8(2)+8(1)-8(0)\}A_1$$
$$\{7\}' = m'\alpha\{(4)+6(3)+4(2)\}A_1$$
$$\{7\}'' = m'\alpha\{(4)+6(3) \quad -8(1)+8(0)\}A_1$$
$$\{8\} = m'\alpha\{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\}A_2$$
$$\{9\} = m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1$$

gesetzt worden sind. Um Alles beisammen zu haben, werde ich auch, nach dem Art. 46, die Ausdrücke für $K$ und $L$ in derselben Form hier anführen:

$$K = -\left\{e'[5]+\frac{1}{8}e^2e'[6]+\frac{1}{8}e'^3[7]-\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J[8]\right\}\sin K$$
$$+\frac{1}{8}ee'^2[9]\sin 2K+\frac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J[10]\sin 2\Pi-\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J[11]\sin(\Pi+\Pi')$$
$$L = -\left\{e[1]+\frac{1}{8}e^3[2]+\frac{1}{4}ee'^2[3]-e\sin^2\tfrac{1}{2}J[4]\right\}$$
$$+\left\{e'[5]+\frac{1}{8}e^2e'[6]'+\frac{1}{8}e'^3[7]-\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J[8]\right\}\cos K$$
$$-\frac{1}{8}ee'^2[9]\cos 2K-\frac{1}{2}e\sin^2\tfrac{1}{2}J[10]\cos 2\Pi+\frac{1}{2}e'\sin^2\tfrac{1}{2}J[11]\cos(\Pi+\Pi')$$

wo die Coefficienten die folgende Zusammensetzung haben:

$$[1] = \{3\}$$
$$[2] = m'\alpha\{(4)+4(3)-(2)-2(1)\}A_0$$
$$[3] = \{5\}$$
$$[4] = \{6\}$$
$$[5] = m'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1$$
$$[6] = m'\alpha\{(4)+6(3)+5(2)+2(1)-2(0)\}A_1$$
$$[6]' = m'\alpha\{3(4)+18(3)+11(2)-2(1)+2(0)\}A_1$$
$$[7] = m'\alpha\{(4)+10(3)+22(2)+4(1)-4(0)\}A_1$$
$$[8] = m'\alpha\{(2)+4(1)\}\{B_0+B_2\}$$
$$[9] = \{8\}$$
$$[10] = \{9\}$$
$$[11] = m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0$$

## β) Störungen der dritten Coordinate, die mit $t^2$ multiplicirt sind, und aus $n\delta z$ und $\nu$ entstehen.

69.

Bei der Entwickelung der in der Ueberschrift genannten Glieder werde ich von der Gleichung

$$\frac{du}{dt} = h\frac{\varrho r}{a}\sin(\varphi - f)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)\cos i$$

ausgehen, in welcher $\varrho$, $\varphi$, $f$ blos als Functionen von $n\delta z$ ($\varrho$ und $\varphi$ nach der Verwandelung von $\chi$ in $g$) zu betrachten sind. Setzt man

$$\frac{dR}{dt} = h\frac{\varrho r}{a}\sin(\varphi - f)\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)\cos i$$

wo $\varrho$ und $\varphi$ blos als Functionen von $\gamma$ zu betrachten sind, so wird, wie ich früher gezeigt habe

$$u = \overline{R} + \left(\frac{\overline{\partial R}}{\partial\gamma}\right) n\delta z$$

Man findet leicht, dass $R$ zwei elliptische Elemente in sich fasst, die man auf verschiedene Arten aufstellen kann. Nennt man dieselben $P$ und $Q$, so kann man sie durch die folgenden Gleichungen definiren:

$$\frac{dP}{dt} = hr\cos f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)\cos i$$
$$\frac{dQ}{dt} = -hr\sin f\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)\cos i$$
$$R = P\frac{\varrho}{a}\sin\varphi + Q\frac{\varrho}{a}\cos\varphi$$

von deren letzter das Differential nach $t$ mit dem obigen Ausdruck für $\frac{dR}{dt}$ identisch wird. Nach der Entwickelung der Factoren wird

$$R = P\{\sin\gamma + \tfrac{1}{2}e\sin 2\gamma\} + Q\{-\tfrac{3}{2}e + \cos\gamma + \tfrac{1}{2}e\cos 2\gamma\}$$

mit hier ausreichender Genauigkeit.

70.

Bezeichnet man den Theil der Differentiale von $P$ und $Q$, welcher die Glieder der ersten Ordnung in Bezug auf die störenden Massen enthält, mit $M$ und $N$, so werden

$$M = \frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\frac{r}{a}\cos f a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)$$

$$N = -\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}\frac{r}{a}\sin f a\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)$$

und die Vergleichung dieser Ausdrücke mit den strengen Formeln des vor. Art. giebt sogleich

$$\frac{d\delta P}{n\,dt}\sec i = \left(\frac{\partial M}{\partial g}\right)n\delta z + r\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)\nu - MS$$

$$\frac{d\delta Q}{n\,dt}\sec i = \left(\frac{\partial N}{\partial g}\right)n\delta z + r\left(\frac{\partial N}{\partial r}\right)\nu - NS$$

indem

$$h = h_0 - h_0 S$$

ist. Eliminirt man $n\delta z$, $\nu$; $S$ durch ihre im Art. 55 gegebenen Werthe, so entstehen

$$\frac{d\delta P}{n\,dt}\sec i = \left(\frac{\partial M}{\partial g}\right)X + \frac{1}{3}\left\{M - 2r\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)\right\}\Xi + A\Upsilon + B\Psi$$

$$\frac{d\delta Q}{n\,dt}\sec i = \left(\frac{\partial N}{\partial g}\right)X + \frac{1}{3}\left\{N - 2r\left(\frac{\partial N}{\partial r}\right)\right\}\Xi + C\Upsilon + D\Psi$$

wo

$$A = \left(\frac{\partial M}{\partial g}\right)\frac{\sqrt{1-e^2}}{2}\left(\frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2(1-e^2)}\right)\sin f - r\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)\left(\frac{r}{2a}\cos f + e\right) + \frac{1}{2}eM$$

$$B = \left(\frac{\partial M}{\partial g}\right)\frac{\sqrt{1-e^2}}{2e}\left(\frac{r^2}{a^2} - \frac{2+3e^2}{2}\right) - r\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)\frac{r}{2a}\sin f$$

und $C$ und $D$ aus $N$ eben so zusammen gesetzt sind, wie bez. $A$ und $B$ aus $M$.

## 71.

Die eben erhaltenen Ausdrücke können auf ähnliche Weise umgeformt werden, wie die Functionen von $\Gamma$ und $\Theta$. Zufolge des Art. 58 bekommt man hier

$$\left(\frac{\partial M}{\partial e}\right) = \left(\frac{\partial M}{\partial f}\right)\left(\frac{a}{r} + \frac{1}{1-e^2}\right)\sin f - r\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)\frac{a}{r}\cos f + \frac{e}{1-e^2}M$$

Diese Formel lässt sich mit Hülfe der Gleichung

$$\left(\frac{\partial M}{\partial f}\right) = \left(\frac{\partial M}{\partial g}\right)\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}} - r\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)\frac{re\sin f}{a(1-e^2)}$$

in die folgende verwandeln

$$\left(\frac{\partial M}{\partial e}\right) = \left(\frac{\partial M}{\partial g}\right)\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a} + \frac{r^2}{a^2(1-e^2)}\right)\sin f - r\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)\frac{r\cos f + 2ae}{a(1-e^2)} + \frac{e}{1-e^2}M$$

Es wird ferner

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \Pi}\right) = \left(\frac{\partial M}{\partial f}\right) - N$$

oder

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \Pi}\right) = \left(\frac{\partial M}{\partial g}\right)\frac{r^2}{a^2\sqrt{1-e^2}} - r\left(\frac{\partial M}{\partial r}\right)\frac{re\sin f}{a(1-e^2)} - N$$

Hiermit ergiebt sich sogleich

$$A = \frac{1-e^2}{2}\left(\frac{\partial M}{\partial e}\right)$$

$$B = \frac{1-e^2}{2e}\left(\frac{\partial M}{\partial \Pi}\right) + \frac{1-e^2}{2e}N - \frac{2+3e^2}{4e}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{\partial M}{\partial g}\right)$$

und auf dieselbe Weise erhält man

$$C = \frac{1-e^2}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial e}\right)$$

$$D = \frac{1-e^2}{2e}\left(\frac{\partial N}{\partial \Pi}\right) - \frac{1-e^2}{2e}M - \frac{2+3e^2}{4e}\sqrt{1-e^2}\left(\frac{\partial N}{\partial g}\right)$$

womit diese Entwickelungen beendigt sind, da die Coefficienten von $X$ und $\Xi$ wieder nicht gebraucht werden.

## 72.

Die Functionen $M$ und $N$ kann man auf mehr wie eine Weise entwickeln. Man kann sie aus dem Differential des im Art. 49 enthaltenen Integrals auf ähnliche Weise ableiten, wie durch die Analyse des Art. 59 $\Gamma$ und $\Theta$ aus $dW$ erhalten wurden. Man kann sie ferner dadurch ableiten, dass man die Entwickelung von $a^2\left(\frac{\partial \Omega}{\partial Z}\right)$ in Art. 48 mit den Entwickelungen von $\frac{r\cos f}{a\sqrt{1-e^2}}$ und $-\frac{r\sin f}{a\sqrt{1-e^2}}$ multiplicirt, und man kann sie endlich durch Differentiationen der Störungsfunction nach $J$, $\Pi$, $\Pi'$ erhalten. Da hier in $M$ und $N$ nur die constanten Glieder verlangt werden, so führt das zweite Verfahren auf einfache Weise zum Ziele, und dieses soll daher angewandt werden. Zu diesem Zweck bekommt man aus dem Vorhergehenden

$$\frac{r\cos f}{a\sqrt{1-e^2}} = -\frac{3}{2}e + (1+\frac{1}{8}e^2)\cos g + \frac{1}{2}e\cos 2g$$
$$\frac{r\sin f}{a\sqrt{1-e^2}} = (1-\frac{1}{8}e^2)\sin g + \frac{1}{2}e\sin 2g$$

und die Multiplication giebt

$$\begin{aligned} M = & \{-\tfrac{3}{2}e(1) + (\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{16}e^2)(5) - \tfrac{1}{2}(8) + \tfrac{1}{4}(11)\}\sin\Pi \\ & + \{-\tfrac{3}{2}e(2) + \tfrac{1}{2}(7) - \tfrac{1}{2}(9)\}\sin\Pi' \\ & + \{\tfrac{1}{2}(6) + \tfrac{1}{4}e(12)\}\sin(2\Pi-\Pi') \\ & + \tfrac{1}{2}(10)\sin(\Pi-2\Pi') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N = & -\{(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{16}e^2)(5) + \tfrac{1}{2}(8) + \tfrac{1}{4}e(11)\}\cos\Pi \\ & - \{\tfrac{1}{2}(7) + \tfrac{1}{2}(9)\}\cos\Pi' \\ & - \{\tfrac{1}{2}(6) + \tfrac{1}{4}e(12)\}\cos(2\Pi-\Pi') \\ & - \tfrac{1}{2}(10)\cos(\Pi-2\Pi') \end{aligned}$$

oder wenn man die $B_i$ einführt:

$$\begin{aligned} M = & -\Big\{\tfrac{1}{2}m'\alpha\sin J(0)B_1 + \tfrac{1}{16}e^2 m'\alpha\sin J\{3(2)+16(1)+20(0)\}B_1 + \\ & \quad + \tfrac{1}{8}e'^2 m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1 - \tfrac{3}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha\sin J(0)\{2C_0+C_2\}\Big\}\sin\Pi \\ & + \tfrac{1}{4}ee'm'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_0\sin\Pi' \\ & + \tfrac{1}{8}ee'm'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_2\sin(2\Pi-\Pi') \\ & + \tfrac{1}{16}e'^2 m'\alpha\sin J(2)B_1\sin(\Pi-2\Pi') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N = & \Big\{\tfrac{1}{2}m'\alpha\sin J(0)B_1 + \tfrac{1}{16}e^2 m'\alpha\sin J\{(2) \quad -4(0)\}B_1 + \\ & \quad + \tfrac{1}{8}e'^2 m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1 - \tfrac{3}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha\sin J(0)\{2C_0+C_2\}\Big\}\cos\Pi \\ & - \tfrac{1}{8}ee'm'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_2\cos(2\Pi-\Pi') \\ & - \tfrac{1}{16}e'^2 m'\alpha\sin J(2)B_1\cos(\Pi-2\Pi') \end{aligned}$$

## 73.

Die vorstehenden Entwickelungen geben nun die folgenden Ausdrücke der Coefficienten $A$, $B$, $C$, $D$:

$$A = -\frac{1}{16}e\,m'\alpha\sin J\{3(2)+16(1)+20(0)\}B_1\sin\Pi$$
$$+\frac{1}{8}e'm'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_0\sin\Pi'$$
$$+\frac{1}{16}e'm'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_2\sin(2\Pi-\Pi')$$

$$B = -\frac{1}{16}e\,m'\alpha\sin J\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\cos\Pi$$
$$+\frac{1}{16}e'm'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_2\cos(2\Pi-\Pi')$$

$$C = \frac{1}{16}e\,m'\alpha\sin J\{(2)\quad -4(0)\}B_1\cos\Pi$$
$$-\frac{1}{16}e'm'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_2\cos(2\Pi-\Pi')$$

$$D = \frac{1}{16}e\,m'\alpha\sin J\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\sin\Pi$$
$$-\frac{1}{8}e'm'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_0\sin\Pi'$$
$$+\frac{1}{16}e'm'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_2\sin(2\Pi-\Pi')$$

Da nun hier

$$\Gamma = Knt, \qquad \Psi = -Lnt$$

gesetzt werden darf, so erhält man, nachdem damit multiplicirt und integrirt worden ist:

$$\frac{\delta P}{\cos i} = \frac{1}{2}\{AK-BL\}n^2t^2$$
$$\frac{\delta Q}{\cos i} = \frac{1}{2}\{CK-DL\}n^2t^2$$

woraus

$$\frac{\delta \bar{R}}{\cos i} = \qquad -\frac{3}{4}e\{CK-DL\}n^2t^2$$
$$+\frac{1}{2}\{AK-BL\}n^2t^2\sin g \quad +\frac{1}{2}\{CK-DL\}n^2t^2\cos g$$
$$+\frac{1}{4}e\{AK-BL\}n^2t^2\sin 2g+\frac{1}{4}e\{CK-DL\}n^2t^2\cos 2g$$

folgt. In diesem Ausdruck hätten das erste und die beiden letzten Glieder weggelassen werden können, da sie von der vierten Ordnung sind; ihre Mitnahme kann aber der Genauigkeit keinen Abbruch thun.

## 74.

Multiplicirt man die Glieder erster Ordnung der Werthe für $M$ und $N$ in Art. 72 mit $ndt$, integrirt und substituirt die Integrale in den Ausdruck des Art. 69 für $R$, so ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
\frac{R}{\cos i} = & \qquad\qquad\qquad\qquad -\tfrac{3}{2} e\,E n t \cos \Pi \\
& -E n t \sin \Pi \sin \gamma \quad + E n t \cos \Pi \cos \gamma \\
& -\tfrac{1}{2} e E n t \sin \Pi \sin 2\gamma + \tfrac{1}{2} e\,E n t \cos \Pi \cos 2\gamma
\end{aligned}
$$

wo

$$E = \tfrac{1}{2} m'\alpha \sin J(0) B_1$$

ist. Es folgt hieraus

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\delta R}{\delta \gamma}\right) \sec i = & -E n t \sin \Pi \cos g \quad - E n t \cos \Pi \sin g \\
& - e E n t \sin \Pi \cos 2g - e E n t \cos \Pi \sin 2g
\end{aligned}
$$

welcher Ausdruck mit dem des Art. 61 für $n\delta z$ zu multipliciren ist. Fügt man dieses Product dem im vor. Art. erhaltenen Ausdruck für $\delta \overline{R}$ hinzu, so wird

$$
\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = & -\{\tfrac{3}{4} e (CK - DL) + \tfrac{1}{2} (GK + FL)\} n^2 t^2 \\
& + \{\tfrac{1}{2} (AK - BL) + \tfrac{3}{8} e (FK - GL)\} n^2 t^2 \sin g \\
& + \{\tfrac{1}{2} (CK - DL) - \tfrac{5}{8} e (GK + FL)\} n^2 t^2 \cos g \\
& + \{\tfrac{1}{4} e (AK - BL) - \tfrac{1}{2} (FK + GL)\} n^2 t^2 \sin 2g \\
& + \{\tfrac{1}{4} e (CK - DL) + \tfrac{1}{2} (GK - FL)\} n^2 t^2 \cos 2g \\
& \qquad\qquad - \tfrac{5}{8} e (FK + GL) n^2 t^2 \sin 3g \\
& \qquad\qquad + \tfrac{5}{8} e (GK - FL) n^2 t^2 \cos 3g
\end{aligned}
$$

Wir stellen die Werthe der Coefficienten dieses Ausdrucks in folgender Form zusammen:

$$
\begin{aligned}
A &= -\tfrac{1}{16} e \{10\} \sin \Pi + \tfrac{1}{16} e' \{11\} \sin (2\Pi - \Pi') + \tfrac{1}{8} e' \{12\} \sin \Pi' \\
B &= -\tfrac{1}{16} e \{10\}' \cos \Pi + \tfrac{1}{16} e' \{11\} \cos (2\Pi - \Pi') \\
C &= \tfrac{1}{16} e \{10\}'' \cos \Pi - \tfrac{1}{16} e' \{11\} \cos (2\Pi - \Pi') \\
D &= \tfrac{1}{16} e \{10\}' \sin \Pi + \tfrac{1}{16} e' \{11\} \sin (2\Pi - \Pi') - \tfrac{1}{8} e' \{12\} \sin \Pi' \\
F &= \tfrac{1}{2} m' \alpha \sin J(0) B_1 \sin \Pi \\
G &= \tfrac{1}{2} m' \alpha \sin J(0) B_1 \cos \Pi
\end{aligned}
$$

wo

$$\{10\} = m'\alpha \sin J\{3(2)+16(1)+20(0)\}B_1$$
$$\{10\}' = \{9\}\sin J$$
$$\{10\}'' = m'\alpha \sin J\{(2) \quad -4(0)\}B_1$$
$$\{11\} = \{[8]-[11]\}\sin J$$
$$\{12\} = [11]\sin J$$

und die Ausdrücke der $\{9\}$, $[8]$, $[11]$ aus dem Art. 68 zu entnehmen sind.

Der Cosinus der Neigung $i$ der Planetenbahn gegen die Fundamentalebene ist hier als constant zu betrachten, da dessen Ungleichheiten nicht von den hier betrachteten Veränderlichen abhängen, sondern erst weiter unten in Betracht zu ziehen sind.

## $\gamma$) Störungen der mittleren Länge und des Radius Vectors, die mit $t^2$ multiplicirt sind, und von den Aenderungen der dritten Coordinate des gestörten Planeten herrühren.

### 75.

Um die in der Ueberschrift genannten Störungen zu erhalten, wollen wir uns nicht unmittelbar der Störungen der dritten Coordinate, sondern der der Elemente bedienen, die in der ersten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten $p_1$ und $q_1$ genannt worden sind, hier aber mit $k$ und $l$ bezeichnet werden sollen. Die Relationen, die zwischen diesen Elementen und der dritten Coordinate stattfinden, sind durch die Gleichungen (54) der angezogenen Abhandlung, nemlich durch

$$k = \frac{u}{1-e^2}\{\cos(f+\Pi)+e\cos\Pi\} - \frac{\frac{du}{ndt}}{\sqrt{1-e^2}}r\sin(f+\Pi)$$

$$l = \frac{u}{1-e^2}\{\sin(f+\Pi)+e\sin\Pi\} + \frac{\frac{du}{ndt}}{\sqrt{1-e^2}}r\cos(f+\Pi)$$

gegeben, und es werden hierauf

$$\delta J = \frac{l}{\cos i} - \frac{l'}{\cos i'}$$
$$\delta\Pi = \operatorname{cotg} J\frac{k}{\cos i} - \operatorname{cosec} J\frac{k'}{\cos i'}$$
$$\delta\Pi' = \operatorname{cosec} J\frac{k}{\cos i} - \operatorname{cotg} J\frac{k'}{\cos i'}$$

(Gl. (53) ders. Abh.) wo $k'$, $l'$, $i'$ sich auf den störenden Planeten eben so beziehen, wie $k$, $l$, $i$ auf den gestörten. Da die vorhergehenden Entwickelungen $J$, $\Pi$, $\Pi'$ ausdrücklich enthalten, so lassen sich die gewünschten Glieder auf diese Weise leicht berechnen.

## 76.

Sehen wir hier von $k'$ und $l'$ ab, die erst weiter unten berücksichtigt werden sollen, so bekommen wir zuerst zur Erlangung von $k$ und $l$ die folgenden, leicht zu erhaltenden Entwickelungen:

$$\frac{\cos(f+\Pi)+e\cos\Pi}{1-e^2} = -\frac{1}{8}e^2\cos(-g+\Pi)+\cos(g+\Pi)$$
$$+e\cos(2g+\Pi)+\frac{9}{8}e^2\cos(3g+\Pi)$$

$$\frac{\sin(f+\Pi)+e\sin\Pi}{1-e^2} = -\frac{1}{8}e^2\sin(-g+\Pi)+\sin(g+\Pi)$$
$$+e\sin(2g+\Pi)+\frac{9}{8}e^2\sin(3g+\Pi)$$

$$\frac{r\sin(f+\Pi)}{a\sqrt{1-e^2}} = \frac{1}{8}e^2\sin(-g+\Pi)-\frac{3}{2}e\sin\Pi+\sin(g+\Pi)$$
$$+\frac{1}{2}e\sin(2g+\Pi)+\frac{3}{8}e^2\sin(3g+\Pi)$$

$$\frac{r\cos(f+\Pi)}{a\sqrt{1-e^2}} = \frac{1}{8}e^2\cos(-g+\Pi)-\frac{3}{2}e\cos\Pi+\cos(g+\Pi)$$
$$+\frac{1}{2}e\cos(2g+\Pi)+\frac{3}{8}e^2\cos(3g+\Pi)$$

Multiplicirt man diese mit den Ausdrücken von $u$ und $\frac{du}{ndt}$, die aus dem Art. 52 zu entnehmen sind, und behält nur die mit $t$ multiplicirten, übrigens constanten, Glieder bei, so bekommt man

$$\frac{k}{\cos i} = -\left(1+\frac{5}{8}e^2\right)Mnt\sin\Pi+\left(1+\frac{3}{8}e^2\right)Nnt\cos\Pi$$
$$\frac{l}{\cos i} = \left(1+\frac{5}{8}e^2\right)Mnt\cos\Pi+\left(1+\frac{3}{8}e^2\right)Nnt\sin\Pi$$

Setzt man daher zur Abkürzung

$$\frac{k}{\cos i} = Tnt, \qquad \frac{l}{\cos i} = Unt$$

so werden

$$T = -\left(1+\frac{5}{8}e^2\right)M\sin\Pi+\left(1+\frac{3}{8}e^2\right)N\cos\Pi$$
$$U = \left(1+\frac{5}{8}e^2\right)M\cos\Pi+\left(1+\frac{3}{8}e^2\right)N\sin\Pi$$

oder, nachdem die Ausdrücke des angeführten Art. für $M$ und $N$ substituirt worden sind:

$$T = \Big\{\tfrac{1}{2}m'\alpha \sin J\,(0)B_1 + \tfrac{1}{8}e^2 m'\alpha \sin J\{(2)+4(1)+4(0)\}B_1 +$$
$$+\tfrac{1}{8}e'^2 m'\alpha \sin J\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1 - \tfrac{3}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha \sin J\,(0)\{2C_0+C_2\}\Big\}$$
$$-\tfrac{1}{8}ee'm'\alpha \sin J\{(2)+4(1)\}\{B_0+B_2\}\cos(\Pi-\Pi')$$
$$-\tfrac{1}{16}e^2 m'\alpha \sin J\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1 \cos 2\Pi$$
$$+\tfrac{1}{8}ee'm'\alpha \sin J\{(2)+4(1)\}B_0 \cos(\Pi+\Pi')$$
$$-\tfrac{1}{16}e'^2 m'\alpha \sin J\,(2)B_1 \cos 2\Pi'$$

$$U = -\tfrac{1}{8}ee'm'\alpha \sin J\{(2)+4(1)\}\{B_0-B_2\}\sin(\Pi-\Pi')$$
$$-\tfrac{1}{16}e^2 m'\alpha \sin J\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1 \sin 2\Pi$$
$$+\tfrac{1}{8}ee'm'\alpha \sin J\{(2)+4(1)\}B_0 \sin(\Pi+\Pi')$$
$$-\tfrac{1}{16}e'^2 m'\alpha \sin J\,(2)B_1 \sin 2\Pi'$$

Man kann bemerken, dass zwar $T$ von der ersten, aber $U$ nur von der dritten Ordnung ist, und weiter unten wird man sehen, dass im gegenwärtigen Falle von diesen Grössen nur die Glieder erster Ordnung gebraucht werden. Da jedoch in zweien der folgenden Abschnitte auch die Glieder dritter Ordnung nicht entbehrt werden können, so habe ich sie sogleich mit aufgenommen.

## 77.

Es wird nun im gegenwärtigen Falle

$$\delta\Pi = \operatorname{cotg} J.Tnt$$
$$\delta\Pi' = \operatorname{cosec} J.Tnt$$
$$\delta J = Unt$$

und da $J$, $\Pi$, $\Pi'$ nur in den Differentialquotienten von $\Omega$ enthalten sind, so erhält man

$$\frac{d\delta\Upsilon}{ndt} = \Big\{\Big(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi}\Big)\operatorname{cotg} J + \Big(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi'}\Big)\operatorname{cosec} J\Big\}\,Tnt + \Big(\frac{\partial\Gamma}{\partial J}\Big)Unt$$
$$\frac{d\delta\Psi'}{ndt} = \Big\{\Big(\frac{\partial\Theta}{\partial\Pi}\Big)\operatorname{cotg} J + \Big(\frac{\partial\Theta}{\partial\Pi'}\Big)\operatorname{cosec} J\Big\}\,Tnt + \Big(\frac{\partial\Theta}{\partial J}\Big)Unt$$

Hier sind die Entwickelungen des Art. 60 für $\Gamma$ und $\Theta$ anzuwenden. Diese geben soweit wie hier erforderlich ist:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\Pi}\right)\operatorname{cotg} J + \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\Pi'}\right)\operatorname{cosec} J = {} & e'\sin\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1\cos K \\ & +\tfrac{1}{2}e\sin\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\cos 2\Pi \\ & -\tfrac{1}{2}e'\sin\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\cos(\Pi+\Pi') \\ & -\sin\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\cos(g+2\Pi)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\delta\Theta}{\delta\Pi}\right)\operatorname{cotg} J + \left(\frac{\delta\Theta}{\delta\Pi'}\right)\operatorname{cosec} J = {} & -e'\sin\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1\sin K \\ & -\tfrac{1}{2}e\sin\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\sin 2\Pi \\ & +\tfrac{1}{2}e'\sin\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\sin(\Pi+\Pi') \\ & +\sin\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\sin(g+2\Pi)\end{aligned}$$

und da $U$ von der dritten Ordnung ist, so sind hier

$$\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta J}\right) = 0\,, \qquad \left(\frac{\delta\Theta}{\delta J}\right) = 0$$

zu setzen.

## 78.

Die Substitution der eben erhaltenen Ausdrücke in die Werthe der Differentiale von $\delta\Upsilon$ und $\delta\Psi$, und deren Integration giebt nun

$$\delta\Upsilon = \left\{\begin{aligned} & \tfrac{1}{2}e'\sin\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1\cos(\Pi-\Pi') \\ & +\tfrac{1}{4}e\sin\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\cos 2\Pi \\ & -\tfrac{1}{4}e'\sin\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\cos(\Pi+\Pi')\end{aligned}\right\} Tn^2t^2$$
$$-\sin\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\, Tnt\sin(g+2\Pi)$$

$$\delta\Psi = \left\{\begin{aligned} & -\tfrac{1}{2}e'\sin\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1\sin(\Pi-\Pi') \\ & -\tfrac{1}{4}e\sin\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\sin 2\Pi \\ & +\tfrac{1}{4}e'\sin\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\sin(\Pi+\Pi')\end{aligned}\right\} Tn^2t^2$$
$$-\sin\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\, Tnt\cos(g+2\Pi)$$

Eine leichte Entwickelung zeigt, dass die Variation $\delta\Xi$ gar keine, aus der gegenwärtig betrachteten Quelle entspringenden Glieder der Form enthält, die hier gebraucht wird. Letzeres geht auch schon

aus der Integralgleichung hervor, die im Art. 64 angewandt wurde. Denn diese Gleichung, die strenge stattfindet, enthält weder Variationen der dritten Coordinate, noch Variationen der Elemente des störenden Planeten. Es ist daher nicht nur hier, sondern auch in allen folgenden Abschnitten

$$\delta\Xi = 0$$

zu setzen.

79.

Die eben erhaltenen Ausdrücke geben

$$\begin{aligned}\delta W &= C T n^2 t^2 \cos\gamma - D T n^2 t^2 \sin\gamma \\ &\quad - \sin\tfrac{1}{2}J m' a \{(1) + 5(0)\} B_1 T n t \sin(\gamma + g + 2\Pi)\end{aligned}$$

Da nun hier die Gleichungen

$$n\delta z = n\int \delta W dt$$

$$\nu = -\frac{1}{2} n \int \delta\left(\frac{\overline{\delta W}}{\delta\gamma}\right) dt$$

statt finden, und der Anblick lehrt, dass das letzte Glied von $\delta W$ kein mit $t^2$ multiplicirtes Glied hervorbringen kann, so bekommt man ohne Mühe

$$n\delta z = C T n^2 t^2 \sin g + D T n^2 t^2 \cos g$$

$$\nu = -\frac{1}{2} C T n^2 t^2 \cos g + \frac{1}{2} D T n^2 t^2 \sin g$$

in welchen Ausdrücken

$$C = \frac{1}{4} e' \sin\tfrac{1}{2}J \{13\} \cos(\Pi - \Pi') + \frac{1}{4} e \sin\tfrac{1}{2}J \{14\} \cos 2\Pi - \frac{1}{4} e' \sin\tfrac{1}{2}J \{15\} \cos(\Pi + \Pi')$$

$$D = \frac{1}{4} e' \sin\tfrac{1}{2}J \{13\} \sin(\Pi - \Pi') + \frac{1}{4} e \sin\tfrac{1}{2}J \{14\} \sin 2\Pi - \frac{1}{4} e' \sin\tfrac{1}{2}J \{15\} \sin(\Pi + \Pi')$$

sind. Wegen der bekannten Gleichung

$$2(0) A_1 = (0) B_0 - (0) B_2$$

woraus

$$2\{(2) + 2(1) - (0)\} A_1 = \{(2) + 4(1)\}\{B_0 - B_2\}$$

folgt, ergeben sich

$$\{13\} = 2[11] - [8]$$
$$\{14\} = \{9\}$$
$$\{15\} = [11]$$

und man kann hier

$$T = \frac{1}{2} m'\alpha \sin J (0) B_1$$

setzen. Es darf indess auch der genauere Werth von $T$ angewandt werden.

## δ) Störungen der dritten Coordinate, die mit $t^2$ multiplicirt sind, und von den Aenderungen der dritten Coordinate des gestörten Planeten abhängen.

80.

Erwägt man, dass den Artt. 69 und 70 zufolge

$$\frac{dP}{ndt}\sec i = M, \qquad \frac{dQ}{ndt}\sec i = N$$

sind, so bekommt man sogleich in Bezug auf den ersten Theil der hier zu entwickelnden Glieder

$$\frac{d\delta P}{ndt}\sec i = \left\{\left(\frac{\partial M}{\partial \Pi}\right)\operatorname{cotg} J + \left(\frac{\partial M}{\partial \Pi'}\right)\operatorname{cosec} J\right\} Tnt + \left(\frac{\partial M}{\partial J}\right) Unt$$
$$\frac{d\delta Q}{ndt}\sec i = \left\{\left(\frac{\partial N}{\partial \Pi}\right)\operatorname{cotg} J + \left(\frac{\partial N}{\partial \Pi'}\right)\operatorname{cosec} J\right\} Tnt + \left(\frac{\partial N}{\partial J}\right) Unt$$

wo $T$ und $U$ dieselbe Bedeutung haben, wie im vorigen Abschnitt.

81.

Die Entwickelungen der hier mit $M$ und $N$ bezeichneten Functionen sind im Art. 72 gegeben, und man erhält daraus

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \Pi}\right)\operatorname{cotg} J + \left(\frac{\partial M}{\partial \Pi'}\right)\operatorname{cosec} J = 2C_1 =$$
$$-\left\{\frac{1}{2}m'\alpha(0)B_1 + \frac{1}{16}e^2 m'\alpha\{3(2)+16(1)+20(0)\}B_1 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{8}e'^2 m'\alpha\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1 - \frac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\, m'\alpha(0)\{6C_0+3C_2+4B_1\}\right\}\cos\Pi$$
$$+ \frac{1}{4}ee'm'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\cos\Pi'$$
$$+ \frac{1}{8}ee'm'\alpha\{(2)+4(1)\}B_2\cos(2\Pi-\Pi')$$
$$- \frac{1}{16}e'^2 m'\alpha(2)B_1\cos(\Pi-2\Pi')$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial \Pi}\right)\text{cotg}\,J + \left(\frac{\partial N}{\partial \Pi'}\right)\text{cosec}\,J = 2E_1 =$$

$$-\Big\{\tfrac{1}{2}m'\alpha\,(0)B_1 + \tfrac{1}{16}e^2 m'\alpha\{(2) \quad -4\,(0)\}B_1 +$$

$$+\tfrac{1}{8}e'^2 m'\alpha\{(2)+4\,(1)+2\,(0)\}B_1 - \tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,(0)\{6C_0+3C_2+4B_1\}\Big\}\sin\Pi$$

$$+\tfrac{1}{8}e\,e'm'\alpha\{(2)+4\,(1)\}B_2\sin(2\Pi-\Pi')$$

$$-\tfrac{1}{16}e'^2 m'\alpha\,(2)B_1\sin(\Pi-2\Pi')$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial J}\right) = -\tfrac{1}{2}m'\alpha\,(0)B_1\sin\Pi = 2D$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial J}\right) = -\tfrac{1}{2}m'\alpha\,(0)B_1\cos\Pi = 2F$$

letztere weil $U$ von der dritten Ordnung ist.

## 82.

Man bekommt hieraus sogleich

$$\frac{\delta P}{\cos i} = (C_1 T + D U)\,n^2 t^2$$

$$\frac{\delta Q}{\cos i} = (E_1 T + F U)\,n^2 t^2$$

und da hier wie im Folgenden

$$\left(\frac{\delta R}{\delta \gamma}\right) n\,\delta z = 0$$

ist, also

$$u = \delta P \frac{r}{a}\sin f + \delta Q\frac{r}{a}\cos f$$

wird, so geht durch die Multiplication mit

$$\frac{r}{a}\sin f = \qquad (1-\tfrac{5}{8}e^2)\sin g + \tfrac{1}{2}e\sin 2g + \tfrac{3}{8}e^2\sin 3g$$

$$\frac{r}{a}\cos f = -\tfrac{3}{2}e + (1-\tfrac{3}{8}e^2)\cos g + \tfrac{1}{2}e\cos 2g + \tfrac{3}{8}e^2\cos 3g$$

das Resultat

$$\frac{u}{\cos i} = \qquad -\tfrac{3}{2}e\,(ET+FU)\,n^2t^2$$

$$+\,(CT+DU)\,n^2t^2\sin g \qquad + (ET+FU)\,n^2t^2\cos g$$

$$+\tfrac{1}{2}e\,(CT+DU)\,n^2t^2\sin 2g + \tfrac{1}{2}e\,(ET+FU)\,n^2t^2\cos 2g$$

$$+\tfrac{3}{8}e^2\,(CT+DU)\,n^2t^2\sin 3g + \tfrac{3}{8}e^2\,(ET+FU)\,n^2t^2\cos 3g$$

hervor, wo

$$C = (1 - \frac{5}{8}e^2)\, C_1$$

$$E = (1 - \frac{3}{8}e^2)\, E_1$$

sind.

### 83.

Der zweite Theil der zu diesem Abschnitt gehörigen Glieder besteht aus denen, die die Veränderlichkeit von $\cos i$ hervorbringt. Bezeichnet man diese mit $\delta u$, so findet man im §. 8 der zweiten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten einen Ausdruck dafür, der sich mit einer kleinen Veränderung in der äusseren Form so schreiben lässt:

$$\delta u = -\frac{u^2}{2\cos^2 i} \cdot \frac{\sin(f+\pi-\theta) + e\sin(\pi-\theta)}{1-e^2} \sin i$$
$$- \left\{\frac{u\frac{du}{ndt}}{2\cos^2 i} - \Gamma\right\} \frac{r\cos(f+\pi-\theta)}{a\sqrt{1-e^2}} \sin i$$

wo

$$\Gamma = \frac{1}{2}\int \frac{u}{\cos i} a^2 \left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right) dt$$

ist.

### 84.

Der im Art. 52 erhaltene Ausdruck für $u$ stellt sich, wenn blos die Glieder desselben berücksichtigt werden, die hier erforderlich sind, wie folgt:

$$\frac{u}{\cos i} = -\frac{3}{2} e\, Vnt \cos\Pi$$
$$+ Vnt \cos(g+\Pi)$$
$$+ \frac{1}{2} e\, Vnt \cos(2g+\Pi)$$

wo zur Abkürzung

$$V = \frac{1}{2}\, m'\alpha \sin J(0)\, B_1$$

geschrieben worden ist. Durch die Quadrirung erhält man hieraus

$$\frac{u^2}{2\cos^2 i} = \begin{aligned}[t] &\tfrac{1}{4} V^2 n^2 t^2 \\ &-\tfrac{1}{2} e V^2 n^2 t^2 \cos g \\ &-\tfrac{3}{4} e V^2 n^2 t^2 \cos(g+2\Pi) \\ &+\tfrac{1}{4} V^2 n^2 t^2 \cos(2g+2\Pi) \\ &+\tfrac{1}{4} e V^2 n^2 t^2 \cos(3g+2\Pi) \end{aligned}$$

und durch Differentiation

$$\frac{u\frac{du}{ndt}}{2\cos^2 i} = \begin{aligned}[t] &\tfrac{1}{4} e V^2 n^2 t^2 \sin g \\ &+\tfrac{3}{8} e V^2 n^2 t^2 \sin(g+2\Pi) \\ &-\tfrac{1}{4} V^2 n^2 t^2 \sin(2g+2\Pi) \\ &-\tfrac{3}{8} e V^2 n^2 t^2 \sin(3g+2\Pi) \end{aligned}$$

Geht man den im Art. 48 gegebenen Ausdruck von $a^2\left(\frac{\delta\Omega}{\delta Z}\right)$ durch, so findet man leicht, dass die Glieder des Products desselben mit $u$, welche die hier verlangte Form haben, mindestens von der vierten Ordnung in Bezug auf die Excentricitäten und die Neigung sind, und wir haben demzufolge hier

$$\Gamma = 0$$

zu setzen.

## 85.

Aus dem Art. 1 ergiebt sich, dass

$$\pi - \theta = \Pi + \Phi$$

ist, und die betreffenden Ausdrücke des Art. 76 geben daher

$$\frac{\sin(f+\pi-\theta) + e\sin(\pi-\theta)}{1-e^2} = \begin{aligned}[t] &\sin(g+\Pi+\Phi) \\ &+ e\sin(2g+\Pi+\Phi) \end{aligned}$$

$$\frac{r\cos(f+\pi-\theta)}{a\sqrt{1-e^2}} = \begin{aligned}[t] &-\tfrac{3}{2} e\cos(\Pi+\Phi) \\ &+\cos(g+\Pi+\Phi) \\ &+\tfrac{1}{2} e\cos(2g+\Pi+\Phi) \end{aligned}$$

Hiermit erhält man die folgenden Ausdrücke:

$$\frac{u^2}{2\cos^2 i}\cdot\frac{\sin(f+\pi-\theta)+e\sin(\pi-\theta)}{1-e^2} = -\frac{1}{4}eV^2n^2t^2\sin(\Pi+\Phi)$$
$$+\frac{1}{4}eV^2n^2t^2\sin(\Pi-\Phi)$$
$$+\frac{1}{4}V^2n^2t^2\sin(g+\Pi+\Phi)$$
$$-\frac{1}{8}V^2n^2t^2\sin(g+\Pi-\Phi)$$
$$-\frac{3}{8}eV^2n^2t^2\sin(2g+3\Pi+\Phi)$$
$$-\frac{1}{8}eV^2n^2t^2\sin(2g+\Pi-\Phi)$$
$$+\frac{1}{8}V^2n^2t^2\sin(3g+3\Pi+\Phi)$$
$$+\frac{1}{4}eV^2n^2t^2\sin(4g+3\Pi+\Phi)$$

$$\frac{u\frac{du}{ndt}}{2\cos^2 i}\cdot\frac{r\cos(f+\pi-\theta)}{a\sqrt{1-e^2}} = -\frac{1}{8}eV^2n^2t^2\sin(\Pi+\Phi)$$
$$+\frac{1}{8}eV^2n^2t^2\sin(\Pi-\Phi)$$
$$-\frac{1}{8}V^2n^2t^2\sin(g+\Pi-\Phi)$$
$$+\frac{3}{8}eV^2n^2t^2\sin(2g+3\Pi+\Phi)$$
$$+\frac{1}{8}eV^2n^2t^2\sin(2g+\Pi+\Phi)$$
$$-\frac{1}{8}V^2n^2t^2\sin(3g+3\Pi+\Phi)$$
$$-\frac{1}{4}eV^2n^2t^2\sin(4g+3\Pi+\Phi)$$

durch deren Summirung

$$\frac{\delta u}{\sin i} = \frac{3}{8}eV^2n^2t^2\sin(\Pi+\Phi)$$
$$-\frac{3}{8}eV^2n^2t^2\sin(\Pi-\Phi)$$
$$-\frac{1}{4}V^2n^2t^2\sin(g+\Pi+\Phi)$$
$$+\frac{1}{4}V^2n^2t^2\sin(g+\Pi-\Phi)$$
$$-\frac{1}{8}eV^2n^2t^2\sin(2g+\Pi+\Phi)$$
$$+\frac{1}{8}eV^2n^2t^2\sin(2g+\Pi-\Phi)$$

oder, wenn man möglichst zusammen zieht,

$$\frac{\delta u}{\sin i} = \frac{3}{4}eV^2\cos\Pi\sin\Phi\,.\,n^2t^2$$
$$+\frac{1}{2}V^2\sin\Pi\sin\Phi\,.\,n^2t^2\sin g \quad -\frac{1}{2}V^2\cos\Pi\sin\Phi\,.\,n^2t^2\cos g$$
$$+\frac{1}{4}eV^2\sin\Pi\sin\Phi\,.\,n^2t^2\sin 2g \quad -\frac{1}{4}eV^2\cos\Pi\sin\Phi\,.\,n^2t^2\cos 2g$$

hervorgeht.

86.

Fügt man nun dem eben erhaltenen Resultat das des Art. 82 hinzu, so wird das vollständige Resultat dieses Abschnittes

$$u = -\frac{3}{2}e\{(ET+FU)\cos i - \frac{1}{2}V^2\cos\Pi\sin\Phi\sin i\}n^2t^2$$
$$+\{(CT+DU)\cos i + \frac{1}{2}V^2\sin\Pi\sin\Phi\sin i\}n^2t^2\sin g$$
$$+\{(ET+FU)\cos i - \frac{1}{2}V^2\cos\Pi\sin\Phi\sin i\}n^2t^2\cos g$$
$$+\frac{1}{2}e\{(CT+DU)\cos i + \frac{1}{2}V^2\sin\Pi\sin\Phi\sin i\}n^2t^2\sin 2g$$
$$+\frac{1}{2}e\{(ET+FU)\cos i - \frac{1}{2}V^2\cos\Pi\sin\Phi\sin i\}n^2t^2\cos 2g$$
$$+\frac{3}{8}e^2(CT+DU)\cos i\,.\,n^2t^2\sin 3g$$
$$+\frac{3}{8}e^2(ET+FU)\cos i\,.\,n^2t^2\cos 3g$$

in welchem die Coefficienten folgendermassen stehen:

$$C = -\left\{\frac{1}{4}\{16\} + \frac{1}{32}e^2\{17\} + \frac{1}{16}e'^2\{18\} - \frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{19\}\right\}\cos\Pi$$
$$+\frac{1}{8}ee'\{20\}\cos\Pi' + \frac{1}{16}ee'\{21\}\cos(2\Pi-\Pi') - \frac{1}{32}e'^2\{22\}\cos(\Pi-2\Pi')$$

$$D = -\frac{1}{4}\{16\}\sin\Pi$$

$$E = -\left\{\frac{1}{4}\{16\} + \frac{1}{32}e^2\{17\}' + \frac{1}{16}e'^2\{18\} - \frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{19\}\right\}\sin\Pi$$
$$+\frac{1}{16}ee'\{21\}\sin(2\Pi-\Pi') - \frac{1}{32}e'^2\{22\}\sin(\Pi-2\Pi')$$

$$F = \frac{1}{4}\{16\}\cos\Pi$$

$$V = \frac{1}{2}\{16\}\sin J$$

nebst

$$\{16\} = m'\alpha(0)B_1$$
$$\{17\} = m'\alpha\{3(2)+16(1)+15(0)\}B_1$$
$$\{17\}' = m'\alpha\{(2)\quad -7(0)\}B_1$$
$$\{18\} = \{6\}$$
$$\{19\} = m'\alpha(0)\{6C_0+3C_2+4B_1\}$$
$$\{20\} = [11]$$
$$\{21\} = [8]-[11]$$
$$\{22\} = m'\alpha(2)B_1$$

Die im Art. 76 gegebenen Ausdrücke für $T$ und $U$ lassen sich wie folgt stellen:

$$T = \left\{\tfrac{1}{2}[12] + \tfrac{1}{8}e^2[13] + \tfrac{1}{8}e'^2[14] - \tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J[15]\right\}$$
$$- \tfrac{1}{8}ee'[16]\cos(\Pi-\Pi') - \tfrac{1}{16}e^2[17]\cos 2\Pi$$
$$+ \tfrac{1}{8}ee'[18]\cos(\Pi+\Pi') - \tfrac{1}{16}e'^2[19]\cos 2\Pi'$$
$$U = -\tfrac{1}{8}ee'[16]'\sin(\Pi-\Pi') - \tfrac{1}{16}e^2[17]\sin 2\Pi$$
$$+ \tfrac{1}{8}ee'[18]\sin(\Pi+\Pi') - \tfrac{1}{16}e'^2[19]\sin 2\Pi'$$

wo

$$[12] = \{16\}\sin J$$
$$[13] = m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)+4(0)\}B_1$$
$$[14] = m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1$$
$$[15] = m'\alpha\sin J\,(0)\{6C_0+3C_2\}$$
$$[16] = [8]\sin J$$
$$[16]' = \{2[11]-[8]\}\sin J$$
$$[17] = [10]\sin J$$
$$[18] = [11]\sin J$$
$$[19] = \{22\}\sin J$$

Statt dessen kann man auch

$$T = -(1+\tfrac{5}{8}e^2)M\sin\Pi + (1+\tfrac{3}{8}e^2)N\cos\Pi$$
$$U = \quad (1+\tfrac{5}{8}e^2)M\cos\Pi + (1+\tfrac{3}{8}e^2)N\sin\Pi$$

anwenden, wenn $M$ und $N$ vorher berechnet worden sind.

## 87.

Bevor wir zur Entwickelung der Wirkung der Aenderungen der Coordinaten des störenden Planeten übergehen, muss angegeben werden, wie die bis jetzt entwickelten Ausdrücke zu behandeln sind, wenn mehr wie Ein störender Planet vorhanden ist.

Da in diesem Falle jeder vorhandene störende Planet einen Beitrag liefert, sowohl zu den mit $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$, $G$, $V$ bezeichneten Coefficienten, wie zu denen, welchen die Bezeichnung $K$, $L$, $T$, $U$ gegeben worden ist, so müssen diese Beiträge zu jedem

einzelnen Coefficienten vor allem Anderen addirt, und erst darauf die Multiplicationen vorgenommen werden. Man kann daher in allen bis jetzt erhaltenen Resultaten jeden Coefficienten mit dem auf alle vorhandenen, störenden Planeten sich beziehenden Summenzeichen $\Sigma$ versehen, und z. B. für das Resultat des Abschnittes $\alpha$) oder des Art. 67 schreiben:

$$\begin{aligned} n\delta z = & \{\Sigma A.\Sigma K + \Sigma B.\Sigma L\} n^2 t^2 \\ & + \{(\Sigma C.\Sigma K + \Sigma D.\Sigma L) - \tfrac{1}{4} e((\Sigma K)^2 + 2(\Sigma L)^2)\} n^2 t^2 \sin g \\ & \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

Auf dieselbe Art müssen alle bis jetzt erhaltenen Resultate behandelt werden, wenn mehr wie Ein störender Planet Einfluss auf sie ausübt.

## $\varepsilon$) Störungen der mittleren Länge und des Radius Vectors, die mit $t^2$ multiplicirt sind, und von den Störungen der mittleren Länge und des Radius Vectors des störenden Planeten herrühren.

88.

Nehmen wir wieder die Elemente $\Upsilon$ und $\Psi$ vor, und betrachten sie als Functionen von $n'\delta z'$ und $\nu'$, die dem störenden Planeten angehören. Hiermit ergeben sich zuerst

$$\frac{d\delta\Upsilon}{ndt} = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g'}\right) n'\delta z' + r'\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r'}\right)\nu'$$

$$\frac{d\delta\Psi}{ndt} = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial g'}\right) n'\delta z' + r'\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r'}\right)\nu'$$

Aber da man in Bezug auf den störenden Planeten setzen kann

$$n'\delta z' = X' + \Upsilon' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{2}\left(\frac{r'}{a'} + \frac{r'^2}{a'^2(1-e'^2)}\right) + \Psi' \frac{\sqrt{1-e'^2}}{2e'}\left(\frac{r'^2}{a'^2} - \frac{2+3e'^2}{2}\right)$$

$$\nu' = -\tfrac{2}{3}\Xi' - \tfrac{1}{2}\Upsilon'\left(\frac{r'}{a'}\cos f' + 2e'\right) - \tfrac{1}{2}\Psi'\frac{r'}{a'}\sin f'$$

so werden die vorstehenden Gleichungen:

$$\frac{d\delta\Upsilon}{ndt} = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g'}\right) X' - \tfrac{2}{3} r'\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r'}\right)\Xi' + M'\Upsilon' + N'\Psi'$$

$$\frac{d\delta\Psi}{ndt} = \left(\frac{\partial\Theta}{\partial g'}\right) X' - \tfrac{2}{3} r'\left(\frac{\partial\Theta}{\partial r'}\right)\Xi' + P'\Upsilon' + Q'\Psi'$$

wo

$$M' = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g'}\right)\frac{\sqrt{1-e'^2}}{2}\left(\frac{r'}{a'}+\frac{r'^2}{a'^2(1-e'^2)}\right)-r'\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r'}\right)\left(\frac{r'}{2a'}\cos f'+e'\right)$$

$$N' = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g'}\right)\frac{\sqrt{1-e'^2}}{2e'}\left(\frac{r'^2}{a'^2}-\frac{2+8e'^2}{2}\right)-r'\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r'}\right)\frac{r'}{2a'}\sin f'$$

und $P'$ und $Q'$ eben so aus $\Theta$ zusammengesetzt sind. Die Differentiale des Art. 58 geben, wenn man sie auf den störenden Planeten anwendet, durch dieselbe Analyse, die dort angewendet wurde:

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial e'}\right) = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g'}\right)\left(\frac{r'}{a'}+\frac{r'^2}{a'^2(1-e'^2)}\right)\frac{\sin f'}{\sqrt{1-e'^2}}-r'\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r'}\right)\frac{r'\cos f'+2a'e'}{a'(1-e'^2)}$$

$$\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi'}\right) = \left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g'}\right)\frac{r'^2}{a'^2\sqrt{1-e'^2}}-r'\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial r'}\right)\frac{r'e'\sin f'}{a'(1-e'^2)}$$

wodurch

$$M' = \frac{1-e'^2}{2}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial e'}\right)$$

$$N' = \frac{1-e'^2}{2e'}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi'}\right)-\frac{2+8e'^2}{4e'}\sqrt{1-e'^2}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial g'}\right)$$

werden, und eben so erhält man

$$P' = \frac{1-e'^2}{2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial e'}\right)$$

$$Q' = \frac{1-e'^2}{2e'}\left(\frac{\partial\Gamma}{\partial\Pi'}\right)-\frac{2+8e'^2}{4e'}\sqrt{1-e'^2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial g'}\right)$$

Die Factoren, womit diese Ausdrücke zu multipliciren sind, bestimmen sich wie in den Artt. 62 und 63, nemlich

$$X' = 0,\quad \Xi' = 0,\quad \Upsilon' = (1+\tfrac{3}{8}e'^2)K'n't,\quad \Psi' = -(1+\tfrac{5}{8}e'^2)L'n't$$

wo $K'$ und $L'$ in der Theorie des störenden Planeten den $K$ und $L$ in der Theorie des gestörten völlig analog sind.

## 89.

Die Entwickelungen des Art. 60 geben nun ohne Mühe

$$\begin{aligned}M' = &-\left\{\tfrac{1}{2}((2))+\tfrac{1}{16}e^2((3))+\tfrac{1}{16}e'^2((4))-\tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((5))\right\}\sin K\\ &+\tfrac{1}{8}ee'((6))\sin 2K\\ &-\tfrac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\sin(\Pi+\Pi')\\ &+\tfrac{1}{2}e'((8))\sin g\\ &+\tfrac{1}{2}e((9))\sin(g+K)\\ &-\tfrac{1}{4}e((10))\sin(g-K)\\ &-\tfrac{1}{4}e'((11))\sin(g+2K)\\ &+\tfrac{1}{2}((12))\sin(2g+K)\end{aligned}$$

$$N' = \left\{\frac{1}{2}((2)) + \frac{1}{16}e^2((3)) + \frac{1}{16}e'^2((4))' - \frac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((5))\right\}\cos K$$
$$-\frac{1}{8}ee'((6))\cos 2K$$
$$-\frac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\cos(\Pi+\Pi')$$
$$-\frac{1}{2}e((9))\cos(g+K)$$
$$-\frac{1}{4}e((10))\cos(g-K)$$
$$+\frac{1}{4}e'((11))\cos(g+2K)$$
$$-\frac{1}{2}((12))\cos(2g+K)$$

$$P' = \frac{1}{4}ee'((1))$$
$$-\left\{\frac{1}{2}((2)) + \frac{1}{16}e^2((3))' + \frac{1}{16}e'^2((4)) - \frac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((5))\right\}\cos K$$
$$+\frac{1}{8}ee'((6))\cos 2K$$
$$-\frac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\cos(\Pi+\Pi')$$
$$-\frac{1}{2}e'((8))\cos g$$
$$+\frac{1}{2}e((9))'\cos(g+K)$$
$$+\frac{1}{4}e((10))\cos(g-K)$$
$$-\frac{1}{4}e'((11))\cos(g+2K)$$
$$-\frac{1}{2}((12))\cos(2g+K)$$

$$Q' = -\left\{\frac{1}{2}((2)) + \frac{1}{16}e^2((3))' + \frac{1}{16}e'^2((4))' - \frac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((5))\right\}\sin K$$
$$+\frac{1}{8}((6))\sin 2K$$
$$+\frac{1}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\sin(\Pi+\Pi')$$
$$+\frac{1}{2}e((9))'\sin(g+K)$$
$$-\frac{1}{4}e((10))\sin(g-K)$$
$$-\frac{1}{4}e'((11))\sin(g+2K)$$
$$-\frac{1}{2}((12))\sin(2g+K)$$

wo zur Abkürzung

$$((1)) = m'\alpha\{(4)+8(3)+14(2)+4(1)\}A_0$$
$$((2)) = m'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1$$
$$((3)) = m'\alpha\{(4)+6(3)+8(2)+8(1)-8(0)\}A_1$$

$$((3))' = m'\alpha\{3(4)+18(3)+16(2)+8(1)-8(0)\}A_1$$

$$((4)) = m'\alpha\{3(4)+30(3)+58(2)-4(1)+4(0)\}A_1$$

$$((4))' = m'\alpha\{(4)+10(3)+14(2)-12(1)+12(0)\}A_1$$

$$((5)) = m'\alpha\{(2)+4(1)\}\{B_0+B_2\}$$

$$((6)) = m'\alpha\{(4)+8(3)+6(2)-12(1)+12(0)\}A_2$$

$$((7)) = m'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0$$

$$((8)) = m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0$$

$$((9)) = m'\alpha\{(1)-(0)\}A_1$$

$$((9))' = m'\alpha\{(3)+3(2)-4(1)+4(0)\}A_1$$

$$((10)) = m'\alpha\{(3)+3(2)-(1)+(0)\}A_1$$

$$((11)) = m'\alpha\{(3)+4(2)-8(1)+8(0)\}A_2$$

$$((12)) = m'\alpha\{(2)-2(1)+2(0)\}A_1$$

gesetzt worden sind.

## 90.

Die Multiplication der eben erhaltenen Entwickelungen mit den oben gegebenen Ausdrücken für $\Upsilon'$ und $\Psi'$, nebst der darauf folgenden Integration giebt

$$\begin{aligned}\delta\Upsilon = {} & C_1'K'nn't^2 + D_1'L'nn't^2 \\ & -\Big\{\tfrac{1}{2}e'((8))\cos g + \tfrac{1}{2}e((9))\cos(g+K) - \tfrac{1}{4}e((10))\cos(g-K) - \\ & \qquad -\tfrac{1}{4}e'((11))\cos(g+2K) + \tfrac{1}{4}((12))\cos(2g+K)\Big\}K'n't \\ & +\Big\{\tfrac{1}{2}e((9))\sin(g+K) + \tfrac{1}{4}e((10))\sin(g-K) - \\ & \qquad -\tfrac{1}{4}e'((11))\sin(g+2K) + \tfrac{1}{4}((12))\sin(2g+K)\Big\}L'n't\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\Psi = {} & -E_1'K'nn't^2 - F_1'L'nn't^2 \\ & -\Big\{\tfrac{1}{2}e'((8))\sin g - \tfrac{1}{2}e((9))'\sin(g+K) - \tfrac{1}{4}e((10))\sin(g-K) + \\ & \qquad +\tfrac{1}{4}e'((11))\sin(g+2K) + \tfrac{1}{4}((12))\sin(2g+K)\Big\}K'n't \\ & +\Big\{\tfrac{1}{2}e((9))'\cos(g+K) - \tfrac{1}{4}e((10))\cos(g-K) - \\ & \qquad -\tfrac{1}{4}e'((11))\cos(g+2K) - \tfrac{1}{4}((12))\cos(2g+K)\Big\}L'n't\end{aligned}$$

wo

$$C_1' = -\left\{\frac{1}{4}((2))+\frac{1}{32}e^2((3))+\frac{1}{32}e'^2\{((4))+3((2))\}-\frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((5))\right\}\sin K$$
$$+\frac{1}{16}ee'((6))\sin 2K-\frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\sin(\Pi+\Pi')$$

$$D_1' = -\left\{\frac{1}{4}((2))+\frac{1}{32}e^2((3))+\frac{1}{32}e'^2\{((4))'+5((2))\}-\frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((5))\right\}\cos K$$
$$+\frac{1}{16}ee'((6))\cos 2K+\frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\cos(\Pi+\Pi')$$

$$E_1' = -\frac{1}{8}ee'((1))$$
$$+\left\{\frac{1}{4}((2))+\frac{1}{32}e^2((3))'+\frac{1}{32}e'^2\{((4))+3((2))\}-\frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((5))\right\}\cos K$$
$$-\frac{1}{16}ee'((6))\cos 2K+\frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\cos(\Pi+\Pi')$$

$$F_1' = -\left\{\frac{1}{4}((2))+\frac{1}{32}e^2((3))'+\frac{1}{32}e'^2\{((4))'+5((2))\}-\frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((5))\right\}\sin K$$
$$+\frac{1}{16}ee'((6))\sin 2K+\frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J((7))\sin(\Pi+\Pi')$$

## 91.

Hieraus ergiebt sich durch dasselbe Verfahren wie oben

$$\delta W = (C'K'+D'L')\,nn't^2\cos\gamma \qquad -(E'K'+F'L')\,nn't^2\sin\gamma$$
$$+\frac{1}{2}e(C'K'+D'L')\,nn't^2\cos 2\gamma \; -\frac{1}{2}e(E'K'+F'L')\,nn't^2\sin 2\gamma$$
$$+\frac{3}{8}e^2(C'K'+D'L')\,nn't^2\cos 3\gamma \; -\frac{3}{8}e^2(E'K'+F'L')\,nn't^2\sin 3\gamma$$
$$+\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2}e'((8))\cos(-\gamma+g) \\ +\frac{1}{4}e\{((9))'-((9))\}\cos(-\gamma+g+K) \\ +\frac{1}{4}e((10))\cos(-\gamma+g-K) \\ -\frac{1}{8}e((12))\cos(-2\gamma+2g+K) \end{array}\right\}K'n't$$
$$+\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{4}e\{((9))'-((9))\}\sin(-\gamma+g+K) \\ +\frac{1}{4}e((10))\sin(-\gamma+g-K) \\ +\frac{1}{8}e((12))\sin(-2\gamma+2g+K) \end{array}\right\}L'n't$$

nebst

$$C' = (1-\tfrac{3}{8}e^2)C_1', \qquad D' = (1-\tfrac{3}{8}e^2)D_1'$$
$$E' = (1-\tfrac{5}{8}e^2)E_1', \qquad F' = (1-\tfrac{5}{8}e^2)F_1'$$

Damit folgen weiter

$$n\delta z = (A'K' + B'L')\,nn't^2$$
$$+ (C'K' + D'L')\,nn't^2 \sin g \quad + (E'K' + F'L')\,nn't^2 \cos g$$
$$+ \frac{1}{4}e\,(C'K' + D'L')\,nn't^2 \sin 2g \quad + \frac{1}{4}e\,(E'K' + F'L')\,nn't^2 \cos 2g$$
$$+ \frac{1}{8}e^2\,(C'K' + D'L')\,nn't^2 \sin 3g \quad + \frac{1}{8}e^2\,(E'K' + F'L')\,nn't^2 \cos 3g$$

$$\nu = -\frac{1}{4}e\,(C'K' + D'L')\,nn't^2$$
$$-\frac{1}{2}(C'K' + D'L')\,nn't^2 \cos g \quad + \frac{1}{2}(E'K' + F'L')\,nn't^2 \sin g$$
$$-\frac{1}{4}e\,(C'K' + D'L')\,nn't^2 \cos 2g \quad + \frac{1}{4}e\,(E'K' + F'L')\,nn't^2 \sin 2g$$
$$-\frac{3}{16}e^2\,(C'K' + D'L')\,nn't^2 \cos 3g \quad + \frac{3}{16}e^2\,(E'K' + F'L')\,nn't^2 \sin 3g$$

wo

$$A' = -\frac{1}{4}e'((8)) + e\left\{\frac{1}{8}((9))' - \frac{1}{8}((9)) + \frac{1}{8}((10)) - \frac{1}{16}((12))\right\}\cos K$$
$$B' = -e\left\{\frac{1}{8}((9))' - \frac{1}{8}((9)) + \frac{1}{8}((10)) - \frac{1}{16}((12))\right\}\sin K$$

gesetzt worden sind. Führt man nun alle Coefficienten auf die $A_i$ und $B_i$ hin, so bekommt man

$$A' = -\frac{1}{4}e'\{23\} + \frac{1}{16}e\{24\}\cos K$$
$$B' = -\frac{1}{16}e\{24\}\sin K$$
$$C' = -\left\{\frac{1}{4}\{26\} + \frac{1}{32}e^2\{27\} + \frac{1}{32}e'^2\{28\} - \frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{29\}\right\}\sin K$$
$$+ \frac{1}{16}ee'\{30\}\sin 2K - \frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{31\}\sin(\Pi + \Pi')$$
$$D' = -\left\{\frac{1}{4}\{26\} + \frac{1}{32}e^2\{27\} + \frac{1}{32}e'^2\{28\}' - \frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{29\}\right\}\cos K$$
$$+ \frac{1}{16}ee'\{30\}\cos 2K + \frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{31\}\cos(\Pi + \Pi')$$
$$E' = -\frac{1}{8}ee'\{25\}$$
$$+ \left\{\frac{1}{4}\{26\} + \frac{1}{32}e^2\{27\}' + \frac{1}{32}e'^2\{28\} - \frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{29\}\right\}\cos K$$
$$- \frac{1}{16}ee'\{30\}\cos 2K + \frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{31\}\cos(\Pi + \Pi')$$
$$F' = -\left\{\frac{1}{4}\{26\} + \frac{1}{32}e^2\{27\}' + \frac{1}{32}e'^2\{28\}' - \frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{29\}\right\}\sin K$$
$$+ \frac{1}{16}ee'\{30\}\sin 2K + \frac{1}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{31\}\sin(\Pi + \Pi')$$

wo

$\{23\} = m'\alpha\{(3)+4(2)+2(1)\}A_0$

$\{24\} = m'\alpha\{4(3)+11(2)-10(1)+10(0)\}A_1$

$\{25\} = \{5\}$

$\{26\} = [5]$

$\{27\} = [6]$

$\{27\}' = [6]'$

$\{28\} = m'\alpha\{3(4)+30(3)+61(2)+2(1)-2(0)\}A_1$

$\{28\}' = m'\alpha\{(4)+10(3)+19(2)-2(1)+2(0)\}A_1$

$\{29\} = [8]$

$\{30\} = \{8\}$

$\{31\} = [11]$

## ζ) Störungen der dritten Coordinate, die mit $t^2$ multiplicirt sind, und von $n'\delta z'$ und $\nu'$ herrühren.

### 92.

Es ergeben sich hier, zufolge der Artt. 69 und 70, zuerst

$$\frac{d\delta P}{n\,dt}\sec i = \left(\frac{\partial M}{\partial g'}\right)n'\delta z' + r'\left(\frac{\partial M}{\partial r'}\right)\nu'$$

$$\frac{d\delta Q}{n\,dt}\sec i = \left(\frac{\partial N}{\partial g'}\right)n'\delta z' + r'\left(\frac{\partial N}{\partial r'}\right)\nu'$$

und setzt man, mit Weglassung der mit $X'$ und $\Xi'$ multiplicirten Glieder, die auch hier Nichts geben können,

$$\frac{d\delta P}{n\,dt}\sec i = A'\Upsilon' + B'\Psi'$$

$$\frac{d\delta Q}{n\,dt}\sec i = C'\Upsilon' + D'\Psi'$$

so bekommt man auf die nemliche Art wie im vorigen Abschnitt:

$$A' = \frac{1-e'^2}{2}\left(\frac{\partial M}{\partial e'}\right)$$

$$B' = \frac{1-e'^2}{2e'}\left(\frac{\partial M}{\partial \Pi'}\right) - \frac{2+3e'^2}{4e'}\sqrt{1-e'^2}\left(\frac{\partial M}{\partial g'}\right)$$

$$C' = \frac{1-e'^2}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial e'}\right)$$

$$D' = \frac{1-e'^2}{2e'}\left(\frac{\partial N}{\partial \Pi'}\right) - \frac{2+3e'^2}{4e'}\sqrt{1-e'^2}\left(\frac{\partial N}{\partial g'}\right)$$

Mit hinreichender Genauigkeit werden hier

$$\Upsilon' = K'n't, \qquad \Psi' = -L'n't$$

93.

Die Entwickelungen des Art. 72 geben nun

$$A' = -\tfrac{1}{8}e'm'\alpha\sin J\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1\sin\Pi$$
$$+\tfrac{1}{8}e\,m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_0\sin\Pi'$$
$$+\tfrac{1}{16}e\,m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_2\sin(2\Pi-\Pi')$$
$$+\tfrac{1}{16}e'm'\alpha\sin J\,(2)B_1\sin(\Pi-2\Pi')$$

$$B' = \tfrac{1}{8}e\,m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_0\cos\Pi'$$
$$-\tfrac{1}{16}e\,m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_2\cos(2\Pi-\Pi')$$
$$-\tfrac{1}{16}e'm'\alpha\sin J\,(2)B_1\cos(\Pi-2\Pi')$$

$$C' = \tfrac{1}{8}e'm'\alpha\sin J\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1\cos\Pi$$
$$-\tfrac{1}{16}e\,m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_2\cos(2\Pi-\Pi')$$
$$-\tfrac{1}{16}e'm'\alpha\sin J\,(2)B_1\cos(\Pi-2\Pi')$$

$$D' = -\tfrac{1}{16}e\,m'\alpha\sin J\{(2)+4(1)\}B_2\sin(2\Pi-\Pi')$$
$$-\tfrac{1}{16}e'm'\alpha\sin J\,(2)B_1\sin(\Pi-2\Pi')$$

94.

Multiplicirt man hierauf mit den oben angegebenen Werthen von $\Upsilon'$ und $\Psi'$, und integrirt, so bekommt man

$$\frac{\delta P}{\cos i} = \tfrac{1}{2}(A'K'-B'L')\,nn't^2$$
$$\frac{\delta Q}{\cos i} = \tfrac{1}{2}(C'K'-D'L')\,nn't^2$$

woraus, da hier wieder

$$\left(\frac{\delta R}{\delta\gamma}\right)n\delta z = 0$$

ist, zufolge des Art. 73 hervorgeht:

$$\frac{u}{\cos i} = -\tfrac{3}{4}e\,(C'K'-D'L')\,nn't^2$$
$$+\tfrac{1}{2}(A'K'-B'L')\,nn't^2\sin g+\tfrac{1}{2}(C'K'-D'L')\,nn't^2\cos g$$
$$+\tfrac{1}{4}e\,(A'K'-B'L')\,nn't^2\sin 2g+\tfrac{1}{4}e\,(C'K'-D'L')\,nn't^2\cos 2g$$

Wie in dem angeführten Art. hätten auch hier das erste und die beiden letzten Glieder weggelassen werden können, da sie von der vierten Ordnung sind.

Bringt man die Coefficienten auf die im Vorhergehenden eingeführte Form, so werden

$$A' = -\frac{1}{8}e'\{32\}\sin\Pi + \frac{1}{8}e\{33\}\sin\Pi' + \frac{1}{16}e\{34\}\sin(2\Pi-\Pi')$$
$$+\frac{1}{16}e'\{35\}\sin(\Pi-2\Pi')$$

$$B' = \frac{1}{8}e\{33\}\cos\Pi' - \frac{1}{16}e\{34\}\cos(2\Pi-\Pi') - \frac{1}{16}e'\{35\}\cos(\Pi-2\Pi')$$

$$C' = \frac{1}{8}e'\{32\}\cos\Pi - \frac{1}{16}e\{34\}\cos(2\Pi-\Pi') - \frac{1}{16}e'\{35\}\cos(\Pi-2\Pi')$$

$$D' = -\frac{1}{16}e\{34\}\sin(2\Pi-\Pi') - \frac{1}{16}e'\{35\}\sin(\Pi-2\Pi')$$

wo

$$\{32\} = [14]$$
$$\{33\} = [18]$$
$$\{34\} = [16]-[18]$$
$$\{35\} = [19]$$

## $\eta$) Störungen der mittleren Länge und des Radius Vectors, die mit $t^2$ multiplicirt sind, und von der dritten Coordinate des störenden Planeten herrühren.

### 95.

Vor allen Dingen müssen wir jetzt die Functionen $T'$ und $U'$ einführen, die dem störenden Planeten zukommen, und den $T$ und $U$ der Artt. 76 oder 86 völlig analog sind. Es werden hiermit in den Bezeichnungen des Art. 75

$$\frac{k'}{\cos i'} = T'n't, \qquad \frac{l'}{\cos i'} = U'n't$$

und

$$\delta J = -U'n't$$
$$\delta\Pi = -\operatorname{cosec} J.T'n't$$
$$\delta\Pi' = -\operatorname{cotg} J.T'n't$$

Ferner sind jetzt

$$\frac{d\delta\Gamma}{ndt} = -\left\{\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\Pi}\right)\operatorname{cosec} J + \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\Pi'}\right)\operatorname{cotg} J\right\} T'n't - \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta J}\right) U'n't$$

$$\frac{d\delta\Psi}{ndt} = -\left\{\left(\frac{\delta\Theta}{\delta\Pi}\right)\operatorname{cosec} J + \left(\frac{\delta\Theta}{\delta\Pi'}\right)\operatorname{cotg} J\right\} T'n't - \left(\frac{\delta\Theta}{\delta J}\right) U'n't$$

96.

Aus dem Art. 60 bekommt man hierauf

$$\begin{aligned}
-\left\{\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\Pi}\right)\operatorname{cosec} J + \left(\frac{\delta\Gamma}{\delta\Pi'}\right)\operatorname{cotg} J\right\} = {} & e'\sin\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1\cos(\Pi-\Pi') \\
& -\tfrac{1}{2}e\sin\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\cos 2\Pi \\
& +\tfrac{1}{2}e'\sin\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\cos(\Pi+\Pi') \\
& +\sin\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\cos(g+2\Pi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\left\{\left(\frac{\delta\Theta}{\delta\Pi}\right)\operatorname{cosec} J + \left(\frac{\delta\Theta}{\delta\Pi'}\right)\operatorname{cotg} J\right\} = {} & -e'\sin\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1\sin(\Pi-\Pi') \\
& +\tfrac{1}{2}e\sin\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\sin 2\Pi \\
& -\tfrac{1}{2}e'\sin\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\sin(\Pi+\Pi') \\
& -\sin\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(1)+5(0)\}B_1\sin(g+2\Pi)
\end{aligned}$$

und es sind wieder

$$\left(\frac{\delta\Gamma}{\delta J}\right) = 0, \qquad \left(\frac{\delta\Theta}{\delta J}\right) = 0$$

zu setzen.

97.

Substituirt und integrirt man, so erhält man, da wieder die Glieder, die $g$ enthalten, Nichts geben können:

$$\delta\Gamma = \left\{\begin{aligned}
& \tfrac{1}{2}e'\sin\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1\cos(\Pi-\Pi') \\
& -\tfrac{1}{4}e\sin\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\cos 2\Pi \\
& +\tfrac{1}{4}e'\sin\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\cos(\Pi+\Pi')
\end{aligned}\right\} T'nn't^2$$

$$\delta\Psi = \left\{\begin{aligned}
& -\tfrac{1}{2}e'\sin\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)+2(1)-2(0)\}A_1\sin(\Pi-\Pi') \\
& +\tfrac{1}{4}e\sin\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)+8(1)+12(0)\}B_1\sin 2\Pi \\
& -\tfrac{1}{4}e'\sin\tfrac{1}{2}Jm'\alpha\{(2)+4(1)\}B_0\sin(\Pi+\Pi')
\end{aligned}\right\} T'nn't^2$$

und hiermit auf dieselbe Weise wie früher

$$n\delta z = C'T'nn't^2 \sin g + D'T'nn't^2 \cos g$$

$$\nu = -\tfrac{1}{2} C'T'nn't^2 \cos g + \tfrac{1}{2} D'T'nn't^2 \sin g$$

Die Coefficienten haben hier die folgenden Ausdrücke:

$$C' = \tfrac{1}{4} e' \sin\tfrac{1}{2}J\{36\}\cos(\Pi-\Pi') - \tfrac{1}{4} e \sin\tfrac{1}{2}J\{37\}\cos 2\Pi + \tfrac{1}{4} e' \sin\tfrac{1}{2}J\{38\}\cos(\Pi+\Pi')$$

$$D' = \tfrac{1}{4} e' \sin\tfrac{1}{2}J\{36\}\sin(\Pi-\Pi') - \tfrac{1}{4} e \sin\tfrac{1}{2}J\{37\}\sin 2\Pi + \tfrac{1}{4} e' \sin\tfrac{1}{2}J\{38\}\sin(\Pi+\Pi')$$

in welchen die Coefficienten dieselben sind, wie im Art. 79, nemlich

$$\{36\} = 2[11] - [8]$$
$$\{37\} = \{9\}$$
$$\{38\} = [11]$$

## θ) Störungen der dritten Coordinate, die mit $t^2$ multiplicirt sind, und von den Störungen der dritten Coordinate des störenden Planeten herrühren.

98.

Dem Vorhergehenden analog sind jetzt die Functionen

$$\frac{d\delta P}{n\,dt}\sec i = -\left\{\left(\frac{\partial M}{\partial \Pi}\right)\operatorname{cosec} J + \left(\frac{\partial M}{\partial \Pi'}\right)\operatorname{cotg} J\right\} T'n't - \left(\frac{\partial M}{\partial J}\right) U'n't$$

$$\frac{d\delta Q}{n\,dt}\sec i = -\left\{\left(\frac{\partial N}{\partial \Pi}\right)\operatorname{cosec} J + \left(\frac{\partial N}{\partial \Pi'}\right)\operatorname{cotg} J\right\} T'n't - \left(\frac{\partial N}{\partial J}\right) U'n't$$

zu entwickeln. Zu dem Ende giebt der Art. 72

$$-\left\{\left(\frac{\partial M}{\partial \Pi}\right)\operatorname{cosec} J + \left(\frac{\partial M}{\partial \Pi'}\right)\operatorname{cotg} J\right\} = 2C_1' =$$

$$\Big\{\tfrac{1}{2} m'\alpha\,(0) B_1 + \tfrac{1}{16} e^2 m'\alpha\,\{3(2) + 16(1) + 20(0)\} B_1 +$$
$$+ \tfrac{1}{8} e'^2 m'\alpha\,\{(2) + 1(1) + 2(0)\} B_1 - \tfrac{3}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\,(0)\{2C_0 + C_2\}\Big\}\cos\Pi$$
$$- \tfrac{1}{4} e e' m'\alpha\,\{(2) + 4(1)\} B_0 \cos\Pi'$$
$$- \tfrac{1}{8} e e' m'\alpha\,\{(2) + 4(1)\} B_2 \cos(2\Pi - \Pi')$$
$$+ \tfrac{1}{16} e'^2 m'\alpha\,(2)\, B_1 \cos(\Pi - 2\Pi')$$

$$-\left\{\left(\frac{\partial N}{\partial \Pi}\right)\operatorname{cosec} J + \left(\frac{\partial N}{\partial \Pi'}\right)\operatorname{cotg} J\right\} = 2E_1' =$$

$$\left\{\tfrac{1}{2}m'\alpha\,(0)B_1 + \tfrac{1}{16}e^2 m'\alpha\{(2) \quad -4(0)\}B_1 + \right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{8}e'^2 m'\alpha\{(2)+4(1)+2(0)\}B_1 - \tfrac{3}{4}\sin^2\tfrac{1}{2}J\,m'\alpha\,(0)\{2C_0+C_2\}\right\}\sin\Pi$$

$$-\tfrac{1}{8}ee'm'\alpha\{(2)+4(1)\}B_2\sin(2\Pi-\Pi')$$

$$+\tfrac{1}{16}e'^2 m'\alpha\,(2)B_1\sin(\Pi-2\Pi')$$

$$-\left(\frac{\partial M}{\partial J}\right) = \tfrac{1}{2}m'\alpha\,(0)B_1\sin\Pi = 2D'$$

$$-\left(\frac{\partial N}{\partial J}\right) = \tfrac{1}{2}m'\alpha\,(0)B_1\cos\Pi = 2F'$$

woraus

$$\frac{\delta P}{\cos i} = (C_1'T' + D'U')\,nn't^2$$

$$\frac{\delta Q}{\cos i} = (E_1'T' + F'U')\,nn't^2$$

folgen.

## 99.

Auf dieselbe Weise wie im Art. 82 geht hieraus hervor

$$\begin{aligned}\frac{u}{\cos i} = & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\tfrac{3}{2}e\,(E'T'+F'U')\,nn't^2\\ & + (C'T'+D'U')\,nn't^2\sin g \quad + (E'T'+F'U')\,nn't^2\cos g\\ & + \tfrac{1}{2}e\,(C'T'+D'U')\,nn't^2\sin 2g \;+ \tfrac{1}{2}e\,(E'T'+F'U')\,nn't^2\cos 2g\\ & + \tfrac{3}{8}e^2\,(C'T'+D'U')\,nn't^2\sin 3g + \tfrac{3}{8}e^2\,(E'T'+F'U')\,nn't^2\cos 3g\end{aligned}$$

in welchem Ausdruck die Coefficienten wie folgt zusammen gesetzt sind:

$$C' = \left\{\tfrac{1}{4}\{39\} + \tfrac{1}{32}e^2\{40\} + \tfrac{1}{16}e'^2\{41\} - \tfrac{3}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{42\}\right\}\cos\Pi$$

$$-\tfrac{1}{8}ee'\{43\}\cos\Pi' - \tfrac{1}{16}ee'\{44\}\cos(2\Pi-\Pi') + \tfrac{1}{32}e'^2\{45\}\cos(\Pi-2\Pi')$$

$$D' = \tfrac{1}{4}\{39\}\sin\Pi$$

$$E' = \left\{\tfrac{1}{4}\{39\} + \tfrac{1}{32}e^2\{40\}' + \tfrac{1}{16}e'^2\{41\} - \tfrac{3}{8}\sin^2\tfrac{1}{2}J\{42\}\right\}\sin\Pi$$

$$-\tfrac{1}{16}ee'\{44\}\sin(2\Pi-\Pi') + \tfrac{1}{32}e'^2\{45\}\sin(\Pi-2\Pi')$$

$$F' = -\tfrac{1}{4}\{39\}\cos\Pi$$

wo

$$\{39\} = \{16\}$$
$$\{40\} = \{17\}$$
$$\{40\}' = \{17\}'$$
$$\{41\} = \{18\}$$
$$\{42\} = m'\alpha\,(0)\{2C_0+C_2\}$$
$$\{43\} = \{20\}$$
$$\{44\} = \{21\}$$
$$\{45\} = \{22\}$$

Hiemit sind alle mit $t^2$ multiplicirten Glieder entwickelt.

100.

Die Behandlung der von den Coordinaten des störenden Planeten abhängigen Glieder ist in dem Falle, in welchem mehr wie ein störender Planet vorhanden ist, etwas anders wie die im Art. 87 erklärte Behandlung der Glieder, die von den Coordinaten des gestörten Planeten herrühren. In Bezug auf die erstgenannten Glieder ist Nichts weiter zu bemerken, als dass jeder störende Planet, welcher Einfluss äussert, Glieder hinzufügt, die den hier entwickelten völlig ähnlich sind, und dass von allen diesen Gliedern schliesslich die Summe zu bilden ist. Selbstverständlich ist, dass man in den mit $K'$, $L'$, $T'$, $U'$ bezeichneten Functionen alle Glieder aufnehmen muss, die auf den betreffenden störenden Planeten merkliche Wirkung äussern.

---

# §. 7. Anwendung der vorhergehenden Entwickelungen auf den Jupiter.

## Berechnung der vom Saturn bewirkten Breitenstörungen des Jupiters.

101.

Die Anwendung der im Vorhergehenden entwickelten Störungen der Länge und des Radius Vectors auf die vom Saturn bewirkten

Störungen des Jupiters würde nur ein unvollkommenes Resultat geben. Für diesen Zweck hätten noch viele Glieder höherer Ordnungen entwickelt werden müssen, auch hat auf diese Störungen das Quadrat der störenden Kraft nicht unmerklichen Einfluss. Die Fortsetzung des hier angewandten Verfahrens würde aber auf unübersehbare Weitläufigkeiten führen, und es ist daher am zweckmässigsten, diese Störungen so zu berechnen, wie ich es früher in meiner Berliner Preisschrift angegeben habe, wobei die Vereinfachungen, die ich später veröffentlicht habe, mit benutzt werden können. Die Entwickelung der Störungsglieder nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen der excentrischen Anomalie, die für die kleinen Planeten von wesentlichem Nutzen ist, braucht der Kleinheit der betreffenden Excentricitäten wegen beim Jupiter nicht in Anwendung gebracht zu werden, sondern man kann hier statt dessen die mittleren Anomalien anwenden.

Obgleich nun zwar die hier entwickelten Ausdrücke auf die vom Saturn in der Länge und dem Radius Vector des Jupiters bewirkten Störungen nicht anwendbar sind, so ist doch bei den übrigen Störungen des Jupiters das Verhältniss ein anderes. Alle übrigen Störungen dieses Planeten, die vom Saturn bewirkten Breitenstörungen eingeschlossen, können durch die hier entwickelten Ausdrücke mit wünschenswerther Genauigkeit berechnet werden.

## 102.

Die elliptischen Elemente, die den Rechnungen zu Grunde gelegt werden sollen, sind die folgenden:

| Jupiter | Saturn |
|---|---|
| $m = \frac{1}{1050}$ | $m' = \frac{1}{3500}$ |
| $n = 109256''.72$ | $n' = 43996''.127$ |
| $e = 0.0481621$ | $e' = 0.0561505$ |
| $\pi = 11^\circ\ 7'\ 38''$ | $\pi' = 89^\circ\ 8'\ 20''$ |
| $i = 1\ 18\ 51.6$ | $i' = 2\ 29\ 35.9$ |
| $\theta = 98\ 25\ 45$ | $\theta' = 111\ 56\ 7$ |
| $\lg a = 0.7162371$ | $\lg a' = 0.9794963$ |

Sie sind auf den Anfang des Jahres 1800 bezogen, und die Einheit der Zeit ist Ein Julianisches Jahr. Durch die Ausdrücke des Art. 1 erhielt ich hieraus

$$J = 1^\circ 15' 12''.5$$

$$\Phi = 207^\circ 40' 28''.4\,, \qquad \Psi = 194^\circ 10' 30''.2$$

$$\Pi = 65\ \ 1\ \ 25\,, \qquad \Pi' = 143\ \ 1\ \ 43$$

## 103.

Die Entwickelungscoefficienten $A_i$, $B_i$, $C_i$ habe ich nach den in der ersten Abhandlung über die Störungen der kleinen Planeten, und die Differentialquotienten derselben nach den von Legendre in den »Exercices« gegebenen Formeln berechnet, und die folgenden Werthe gefunden:

$(0)A_0 = 1.090165$, $(1)A_0 = 0.22067$
$(0)A_1 = 0.31041$, $(1)A_1 = 0.40456$
$(0)A_2 = 0.12889$, $(1)A_2 = 0.30151$

$(2)A_0 = 0.42790$, $(3)A_0 = 0.9848$
$(2)A_1 = 0.37995$, $(3)A_1 = 1.0457$
$(2)A_2 = 0.52397$, $(3)A_2 = 1.0163$

$(4)A_0 = 3.7383$
$(4)A_1 = 3.7169$
$(4)A_2 = 3.9953$

$(0)B_0 = 1.18907$ $(1)B_0 = 2.18551$
$(0)B_1 = 0.86922$ $(1)B_1 = 2.26850$
$(0)B_2 = 0.56825$ $(1)B_2 = 1.99721$
$(0)B_3 = 0.35368$ $(1)B_3 = 1.57801$
$(0)B_4 = 0.21406$ $(1)B_4 = 1.16192$
$(0)B_5 = 0.12724$ $(1)B_5 = 0.81483$
$(0)B_6 = 0.07467$ $(1)B_6 = 0.55165$
$(0)B_7 = 0.04341$ $(1)B_7 = 0.3635$
$(0)B_8 = 0.02506$ $(1)B_8 = 0.210$ *)

*) Durch Induction aus den vorhergehenden berechnet.

| | |
|---|---|
| $(2)B_0 = 7.89952$ | $(3)B_0 = 36.7145$ |
| $(2)B_1 = 7.67757$ | $(3)B_1 = 36.7265$ |
| $(2)B_2 = 7.51623$ | $(3)B_2 = 35.773$ |
| $(2)B_3 = 6.96268$ | $(3)B_3 = 34.806$ |
| $(2)B_4 = 6.03106$ | $(3)B_4 = 32.70$ |
| $(2)B_5 = 4.94174$ | $(3)B_5 = 29.71$ |
| $(2)B_6 = 3.8221$ | $(3)B_6 = 27.70$ *) |
| $(2)B_7 = 2.874$ | $(3)B_7 = 25.7$ *) |
| $(2)B_8 = 1.97$ *) | |

| | |
|---|---|
| $(0)C_0 = 2.055$ | $(1)C_0 = 8.657$ |
| $(0)C_1 = 1.849$ | $(1)C_1 = 8.476$ |
| $(0)C_2 = 1.475$ | $(1)C_2 = 7.724$ |
| $(0)C_3 = 1.091$ | $(1)C_3 = 6.571$ |
| $(0)C_4 = 0.768$ | $(1)C_4 = 5.275$ |
| $(0)C_5 = 0.521$ | $(1)C_5 = 4.180$ |
| $(0)C_6 = 0.344$ | |

Diese Werthe stimmen, soweit die Vergleichung möglich ist, mit denen der Méc. cél. nahe überein. Zur Berücksichtigung des zweiten Gliedes der Störungsfunction geben die obigen Elemente

$$\alpha = 0.54543$$

und zufolge des Art. 9 sind es also die Werthe

$$(0)A_1 = 0.03769\,, \qquad (1)A_1 = 0.13484$$
$$(0)B_0 = 0.64364$$

die statt der oben angesetzten in den Rechnungen angewandt werden müssen.

## 104.

Die obigen Elemente geben, wenn die Secunde zur Einheit gemacht wird

$$\lg m'\alpha \sin J = 9.84706$$

und die Substitution sowohl dieses Werthes, wie der des vor. Art. in die Ausdrücke des Art. 18 gab die folgenden Zahlen, von welchen die in Klammern eingeschlossenen die Logarithmen bedeuten:

---

*) S. die vor. Anm.

für $i = -1$

(1) = (8.5683)
(2) = (8.0209 $n$)
(5) = − 0″.4654
(6) = (8.0292)
(7) = (7.4879)
(8) = (7.6692)
(9) = (8.0293 $n$)
(10) = (7.6804)
(11) = (8.5683)
(12) = (8.8983 $n$)
(21) = (6.857 $n$)
(22) = (7.488)
(23) = (7.649 $n$)
(24) = (6.368 $n$)

für $i = 1$

(1) = (8.8594)
(2) = (8.8983 $n$)
(5) = − 0″.4047
(6) = (7.703)
(7) = (7.488)
(8) = (6.857)
(9) = (7.346 $n$)
(10) = (6.987)
(11) = (7.6696 $n$)
(12) = (8.2355 $n$)

für $i = -2$

(1) = (7.954)
(2) = (7.736)
(5) = − 0″.6168
(6) = (7.952)
(7) = (6.299)
(8) = (7.789)
(9) = (8.216 $n$)
(10) = (7.981)
(11) = (8.8315)
(12) = (8.9731 $n$)
(21) = (7.364 $n$)
(22) = (7.952)
(23) = (7.981 $n$)
(24) = (6.414 $n$)

für $i = 2$

(1) = (8.7969)
(2) = (8.9259 $n$)
(5) = − 0″.2517
(6) = (7.376)
(7) = (6.300)
(8) = (6.586)
(9) = (7.097 $n$)
(10) = (6.769)
(11) = (7.964 $n$)
(12) = (7.781 $n$)

für $i = -3$

(1) = (7.670 $n$)
(2) = (8.0311)
(5) = − 0″.3979
(6) = (7.611)
(7) = (7.299 $n$)
(8) = (7.811)

für $i = 3$

(1) = (8.6872)
(2) = (8.8637 $n$)
(5) = − 0″.1499
(6) = (6.818)
(7) = (7.300 $n$)
(8) = (6.674)

(9) = (8.281 *n*)
(10) = (8.113)
(11) = (8.8591)
(12) = (9.1696 *n*)
(21) = (7.669 *n*)
(22) = (8.263)
(23) = (8.144 *n*)
(24) = (6.368 *n*)

(9) = (7.046 *n*)
(10) = (6.679)
(11) = (7.969 *n*)
(12) = (7.011 *n*)

für $i = -4$

(1) = (7.964 *n*)
(2) = (8.036)
(5) = − 0.″2424
(6) = (6.512 *n*)
(7) = (7.491 *n*)
(8) = (7.774 *n*)
(9) = (8.274 *n*)
(10) = (8.147)
(11) = (8.7969)
(12) = (9.1113 *n*)
(21) = (7.789 *n*)
(22) = (8.3903)
(23) = (8.3930 *n*)
(24) = (6.270 *n*)

für $i = 4$

(1) = (8.5482)
(2) = (8.7540 *n*)
(5) = − 0.″0869
(6) = (6.447 *n*)
(7) = (7.491 *n*)
(8) = (6.773)
(9) = (7.040 *n*)
(10) = (6.639)
(11) = (7.855 *n*)
(12) = (6.949)

für $i = -5$

(1) = (7.969 *n*)
(2) = (7.955)
(5) = − 0.″1423
(6) = (7.481 *n*)
(7) = (7.520 *n*)
(8) = (7.698)
(9) = (8.219 *n*)
(10) = (8.119)
(11) = + 0.″04678
(12) = − 0.″09935
(13) = (6.698)
(14) = (6.682 *n*)
(15) = (5.001)

für $i = 5$

(1) = (8.3892)
(2) = (8.6150 *n*)
(5) = − 0.″0492
(6) = (6.820 *n*)
(7) = (7.520 *n*)
(8) = (6.700)
(9) = (7.016 *n*)
(10) = (6.086)
(11) = (7.764 *n*)
(12) = (7.141)

(16) = (4.764)
(17) = (6.766 n)
(18) = (7.4529)
(19) = (7.6486 n)
(20) = (7.3460)
(21) = (7.8104 n)
(22) = (8.4176)
(23) = (8.4241 n)
(24) = (6.139 n)
(25) = (6.658)
(26) = (7.4288 n)
(27) = (7.7241)
(28) = (7.5470 n)
(29) = (5.563)
(30) = (5.929 n)

für $i = -6$

(1) = (7.888 n)
(2) = (7.832)
(5) = − 0.″0813
(6) = (7.617 n)
(7) = (7.483 n)
(8) = (7.579)
(9) = (8.130 n)
(10) = (8.051)
(11) = (8.5482)
(12) = (8.8672 n)
(21) = (7.773 n)
(22) = (8.385)
(23) = (8.394 n)
(24) = (5.986 n)

für $i = 6$

(1) = (8.2164)
(2) = (8.4563 n)
(5) = (8.4847 n)
(11) = (7.616 n)
(12) = (7.254)

für $i = -7$

(1) = (7.765 n)
(2) = (7.683)
(5) = − 0.″0453
(6) = (7.622 n)
(7) = (7.401 n)
(8) = (7.446)

für $i = 7$

(1) = (8.0140)
(2) = (8.2832 n)
(5) = (8.2460 n)

| | |
|---|---|
| (9) = (8.017 *n*) | |
| (10) = (7.953) | |
| (11) = (8.3895) | (11) = (7.508 *n*) |
| (12) = (8.7099 *n*) | (12) = (7.269) |
| (21) = (7.698 *n*) | |
| (22) = (8.311) | |
| (23) = (8.324 *n*) | |
| (24) = (5.818 *n*) | |
| (25) = (6.765) | |
| (26) = (7.546 *n*) | |
| (27) = (7.850) | |
| (28) = (7.680 *n*) | |
| (29) = (5.43) | |
| (30) = (5.77 *n*) | |

Ich habe diese Grössen einzeln angeführt, damit man erkennen könne, welche Glieder ich aufgenommen, und welche ich übergangen habe. Die wichtigeren derselben habe ich zweimal, die unwichtigen aber nur einmal gerechnet.

Zur Ermittelung des Grades der Genauigkeit, die in den Coefficienten der verschiedenen Abtheilungen erforderlich ist, dienten die folgenden, vorher berechneten Werthe:

$$1 - \frac{n'}{n} = \mu = 0.59731$$
$$2\mu = 1.1946$$
$$3\mu = 1.7919$$
$$4\mu = 2.3893$$
$$5\mu = 2.9866$$
$$6\mu = 3.5839$$
$$7\mu = 4.1812$$

welche die Integrationsdivisoren geben.

## 105.

Zieht man nun die im vor. Art. berechneten Coefficienten nach den Angaben des Art. 35 zusammen, so bekommt man das folgende Resultat, welches in tabellarischer Form zusammen gestellt ist:

$$a^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial z}\right)$$

| g,Γ | sin | cos |
|---|---|---|
| −3,1 | +0".002 | +0".003 |
| −2,1 | +0.063 | −0.049 |
| −1,1 | −0.370 | −0.264 |
| 0,1 | +0.059 | −0.069 |
| 1,1 | −0.395 | +0.089 |
| 2,1 | −0.009 | +0.018 |
| −3,2 | +0.009 | −0.002 |
| −2,2 | −0.0239 | −0.1010 |
| −1,2 | −0.446 | +0.404 |
| 0,2 | −0.0791 | −0.0545 |
| 1,2 | −0.001 | +0.250 |
| 2,2 | +0.006 | +0.010 |
| −3,3 | +0.0050 | −0.0159 |
| −2,3 | −0.147 | +0.034 |
| −1,3 | +0.1915 | +0.3297 |
| 0,3 | −0.055 | +0.071 |
| 1,3 | +0.146 | +0.031 |
| 2,3 | +0.010 | +0.001 |
| −3,4 | −0.025 | −0.007 |
| −2,4 | +0.003 | +0.131 |
| −1,4 | +0.216 | −0.069 |
| 0,4 | +0.052 | +0.051 |
| 1,4 | +0.037 | −0.079 |
| 2,4 | +0.004 | −0.006 |

| g,Γ | sin | cos |
|---|---|---|
| −4,5 | −0".00266 | −0".00274 |
| −3,5 | −0.01280 | +0.02455 |
| −2,5 | +0.09701 | +0.01703 |
| −1,5 | −0.0099 | −0.1282 |
| 0,5 | +0.044 | −0.032 |
| 1,5 | −0.039 | −0.031 |
| 2,5 | −0.004 | −0.004 |
| −3,6 | +0.020 | +0.016 |
| −2,6 | +0.029 | −0.069 |
| −1,6 | −0.070 | −0.011 |
| 0,6 | −0.017 | −0.035 |
| 1,6 | −0.022 | +0.021 |
| 2,6 | −0.004 | +0.001 |
| −4,7 | +0.002 | +0.005 |
| −3,7 | +0.0168 | −0.0138 |
| −2,7 | −0.043 | −0.029 |
| −1,7 | −0.015 | +0.034 |
| 0,7 | −0.025 | +0.007 |
| 1,7 | +0.009 | +0.015 |
| 2,7 | 0.000 | +0.003 |

Der Factor $C$ des Art. 34 erhält den Werth

$$\begin{aligned} C = & \quad 2\,(9.6985)\sin(\gamma-g) \\ & + 2\,(8.0798)\sin(\gamma-2g) \\ & + 2\,(8.5576\,n)\sin\gamma \\ & + 2\,(6.6383)\sin(\gamma-3g) \\ & + 2\,(5.2696)\sin(\gamma-4g) \\ & + 2\,(4.065\,n)\sin(\gamma-2g) \end{aligned}$$

und die Coefficienten der Artt. 28 und 33 haben die folgenden Werthe:

$$\eta^{(2)} = (8.3813) \qquad \theta^{(2)} = (4.366\,n)$$
$$\eta^{(3)} = (6.939)$$
$$\eta^{(4)} = (5.571)$$
$$\eta^{(0)} = (8.8590\,n)$$

wo wieder die in Klammern eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen der Coefficienten sind. Die vorstehenden Glieder sind zwar vollständig angeführt, aber man braucht viele davon ihrer Kleinheit wegen im gegenwärtigen Falle nicht.

## 106.

Die Multiplication und die Integration gab nun das in folgender Tafel zusammengestellte Resultat:

| $\gamma,\ g, \Gamma$ | sin | cos |
|---|---|---|
| 0,−3,1 | −0″.001 | +0″.001 |
| −1,−2,1 | +0.001 | −0.002 |
| −2,−1,1 | −0.003 | +0.001 |
| 1,−4,1 | +0.001 | 0.000 |
| 0,−2,1 | +0.010 | +0.007 |
| −1,−1,1 | −0.112 | +0.037 |
| −2, 0,1 | −0.007 | −0.005 |
| 1,−3,1 | +0.011 | −0.011 |
| 0,−1,1 | +0.001 | +0.001 |
| −1, 0,1 | −0.312 | −0.217 |
| −2, 1,1 | 0.000 | −0.001 |
| 1,−2,1 | −0.133 | −0.093 |
| 0, 0,1 | −0.001 | +0.022 |
| −1, 1,1 | +0.025 | −0.025 |
| −2, 2,1 | −0.002 | 0.000 |
| 1,−1,1 | +0.095 | −0.059 |
| 2,−2,1 | −0.003 | −0.002 |
| 0, 1,1 | 0.000 | +0.002 |
| −1, 2,1 | −0.076 | +0.017 |
| 1, 0,1 | +0.334 | −0.079 |
| 2,−1,1 | +0.002 | 0.000 |
| 0, 2,1 | +0.005 | −0.001 |
| −1, 3,1 | −0.002 | +0.003 |
| 1, 1,1 | −0.006 | −0.004 |
| 2, 0,1 | +0.008 | −0.002 |
| 0,−3,2 | +0.001 | +0.002 |
| −1,−2,2 | −0.007 | −0.003 |
| −2,−1,2 | 0.000 | −0.008 |
| 1,−4,2 | +0.001 | −0.001 |
| 0,−2,2 | +0.020 | −0.018 |
| −1,−1,2 | +0.022 | −0.334 |
| −2, 0,2 | −0.004 | +0.004 |
| 1,−3,2 | −0.010 | −0.025 |
| 0,−1,2 | −0.011 | +0.010 |
| −1, 0,2 | −0.184 | +0.170 |
| 1,−2,2 | −0.277 | +0.254 |

| $\gamma,\ g, \Gamma$ | sin | cos |
|---|---|---|
| 0, 0,2 | +0″.013 | −0″.004 |
| −1, 1,2 | −0.020 | −0.014 |
| −2, 2,2 | 0.000 | +0.001 |
| 1,−1,2 | +0.120 | +0.200 |
| 2,−2,2 | −0.007 | +0.006 |
| 0, 1,2 | +0.001 | +0.001 |
| −1, 2,2 | −0.001 | +0.039 |
| 1, 0,2 | −0.002 | −0.107 |
| 2,−1,2 | +0.003 | +0.005 |
| 0,−3,3 | +0.004 | −0.001 |
| −1,−2,3 | −0.037 | +0.044 |
| −2,−1,3 | −0.002 | 0.000 |
| 1,−4,3 | 0.000 | −0.003 |
| 0,−2,3 | −0.032 | −0.060 |
| −1,−1,3 | −0.101 | +0.006 |
| −2, 0,3 | +0.001 | +0.002 |
| 1,−3,3 | −0.059 | +0.018 |
| 0,−1,3 | +0.004 | +0.002 |
| −1, 0,3 | +0.054 | +0.091 |
| 1,−2,3 | +0.482 | +0.790 |
| 2,−3,3 | −0.001 | 0.000 |
| 0, 0,3 | −0.001 | −0.006 |
| −1, 1,3 | −0.011 | +0.014 |
| 1,−1,3 | +0.043 | −0.030 |
| 2,−2,3 | +0.012 | +0.019 |
| 0, 1,3 | +0.001 | −0.001 |
| −1, 2,3 | +0.019 | +0.004 |
| 1, 0,3 | −0.043 | −0.007 |
| 2,−1,3 | +0.001 | −0.001 |
| 0,−3,4 | −0.001 | −0.008 |
| −1,−2,4 | −0.032 | −0.021 |
| −2,−1,4 | 0.000 | +0.001 |
| 1,−4,4 | −0.008 | −0.001 |
| 0,−2,4 | +0.022 | −0.005 |
| −1,−1,4 | −0.005 | +0.049 |
| −2, 0,4 | +0.001 | 0.000 |
| 1,−3,4 | +0.008 | +0.106 |

| $\gamma,\ g,\Gamma$ | sin | cos |
|---|---|---|
| 0,−1,4 | +0″001 | −0″003 |
| −1, 0,4 | +0.044 | −0.015 |
| 1,−2,4 | −0.279 | +0.099 |
| 2,−3,4 | 0.000 | +0.003 |
| | | |
| 0, 0,4 | −0.002 | 0.000 |
| −1, 1,4 | +0.008 | +0.008 |
| 1,−1,4 | −0.013 | −0.019 |
| 2,−2,4 | −0.007 | +0.002 |
| | | |
| 0, 1,4 | −0.001 | −0.001 |
| −1, 2,4 | +0.004 | −0.009 |
| 1, 0,4 | −0.007 | +0.017 |
| | | |
| 0,−4,5 | 0.000 | −0.001 |
| −1,−3,5 | +0.065 | +0.168 |
| 1,−5,5 | −0.001 | −0.001 |
| | | |
| 0,−3,5 | −0.268 | −0.045 |
| −1,−2,5 | −0.010 | +0.013 |
| −2,−1,5 | +0.001 | 0.000 |
| 1,−4,5 | −0.005 | +0.012 |
| | | |
| 0,−2,5 | 0.000 | −0.006 |
| −1,−1,5 | +0.025 | +0.007 |
| 1,−3,5 | +3.635 | +0.452 |
| | | |
| 0,−1,5 | −0.001 | 0.000 |
| −1, 0,5 | −0.002 | −0.021 |
| 1,−2,5 | +0.008 | +0.066 |
| 2,−3,5 | +0.087 | +0.011 |
| | | |
| 0, 0,5 | −0.001 | +0.002 |
| −1, 1,5 | +0.006 | −0.004 |
| 1,−1,5 | −0.011 | +0.006 |
| 2,−2,5 | 0.000 | +0.002 |
| 3,−3,5 | +0.003 | 0.000 |
| | | |
| 0, 1,5 | 0.000 | 0.000 |
| −1, 2,5 | −0.004 | −0.003 |
| 1, 0,5 | +0.007 | +0.005 |

| $\gamma,\ g,\Gamma$ | sin | cos |
|---|---|---|
| 0,−3,6 | +0″002 | −0″004 |
| −1,−2,6 | +0.006 | +0.007 |
| 1,−4,6 | +0.025 | +0.017 |
| | | |
| 0,−2,6 | −0.002 | 0.000 |
| −1,−1,6 | +0.007 | −0.013 |
| 1,−3,6 | −0.022 | +0.060 |
| 2,−4,6 | +0.001 | 0.000 |
| | | |
| 0,−1,6 | 0.000 | +0.001 |
| −1, 0,6 | −0.010 | −0.001 |
| 1,−2,6 | +0.023 | +0.002 |
| 2,−3,6 | −0.001 | +0.001 |
| | | |
| 0, 0,6 | +0.001 | 0.000 |
| −1, 1,6 | −0.002 | −0.004 |
| 1,−1,6 | +0.002 | +0.007 |
| 2,−2,6 | +0.001 | 0.000 |
| | | |
| 0,−4,7 | +0.003 | −0.003 |
| −1,−3,7 | 0.000 | +0.003 |
| 1,−5,7 | +0.001 | +0.003 |
| | | |
| 0,−3,7 | −0.001 | −0.001 |
| −1,−2,7 | +0.005 | −0.003 |
| 1,−4,7 | −0.043 | +0.041 |
| | | |
| 0,−2,7 | 0.000 | +0.001 |
| −1,−1,7 | −0.007 | −0.005 |
| 1,−3,7 | +0.019 | +0.012 |
| 2,−4,7 | −0.001 | +0.001 |
| | | |
| 0,−1,7 | 0.000 | 0.000 |
| −1, 0,7 | −0.002 | +0.004 |
| 1,−2,7 | +0.003 | −0.008 |
| | | |
| 0, 0,7 | 0.000 | 0.000 |
| −1, 1,7 | −0.003 | +0.001 |
| 1,−1,7 | +0.004 | −0.001 |

Die Summen der Coefficienten einer jeden Abtheilung dieser Tafel sind die Coefficienten von $u:\cos i$. Ehe ich dieselben anführe, will ich als Beispiel der Rechnung, die die vorstehende Tafel gegeben hat, die der Abtheilung, welche die grössten Coefficienten enthält, ausführlich und genau in der Form, wie ich sie geführt habe, angeben. Es ist dies die Sinusabtheilung für $5\Gamma$.

Die Logarithmen der betreffenden Integrationsfactoren sind die folgenden,

| −5,5 | −4,5 | −3,5 | −2,5 | −1,5 | 0,5 | 1,5 | 2,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9.6932*n*, | 9.9945*n*, | 1.8719*n*, | 0.0059, | 9.7018, | 9.5248, | 9.3993, | 9.3022 |

die gleichwie die Coefficienten von *C* auf den unteren Rand eines Blattes Papier geschrieben worden waren. Die vollständige Rechnung steht nun so:

| | sin | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | −4,5 | −3,5 | −2,5 | −1,5 | 0,5 | 1,5 |
| $\gamma$, $g$ | 7.425*n* | 8.1072*n* | 8.9868 | 7.996*n* | 8.643 | 8.591*n* |
| 1,−1 | 7.121*n* | 7.8057*n* | 8.6853 | 7.695*n* | 8.342 | 8.290*n* |
| 1,−2 | | 6.187*n* | 7.066 | 6.075*n* | 6.723 | 6.671*n* |
| 1, 0 | 5.98 | 6.665 | 7.544*n* | 6.554 | 7.201*n* | 7.149 |
| 1,−3 | | | | | 5.281 | |
| | −1,−3,5 | −1,−2,5 | −1,−1,5 | −1,0,5 | −1,1,5 | −1,2,5 |
| | −0.00133 | −0.0064 | +0.0485 | −0.0049 | +0.0220 | −0.0195 |
| | | | − 2 | + 12 | − 1 | + 5 |
| | + 46 | − 35 | + 4 | − 16 | + 14 | |
| | −0.00087 | −0.0099 | +0.0487 | −0.0053 | +0.0233 | −0.0190 |
| | 6.940*n* | 7.996*n* | 8.688 | 7.724*n* | 8.367 | 8.279*n* |
| | 8.812 | 8.002*n* | 8.390 | 7.249*n* | 7.766 | 7.581*n* |
| $\eta^{(2)}$ | 7.193 | — | 6.77 | — | — | — |
| $\eta^{(0)}$ | 7.671*n* | 6.86 | 7.249*n* | — | — | — |
| | 1,−5,5 | 1,−4,5 | 1,−3,5 | 1,−2,5 | 1,−1,5 | 1,0,5 |
| | +0.0013 | +0.0064 | −0.04846 | +0.0049 | −0.0220 | +0.0195 |
| | + 2 | − 12 | + 12 | − 5 | + 5 | |
| | | − 1 | − 46 | + 35 | − 4 | + 16 |
| | | | − 2 | | | |
| | +0.0015 | +0.0051 | −0.04882 | +0.0079 | −0.0219 | +0.0211 |
| | 7.176 | 7.708 | 8.6886*n* | 7.898 | 8.340*n* | 8.324 |
| | 6.869*n* | 7.703*n* | 0.5605 | 7.904 | 8.042*n* | 7.849 |
| $\eta^{(2)}$ | — | — | 8.942 | — | — | — |
| $\eta^{(3)}$ | — | — | 7.500 | — | — | — |
| $\eta^{(0)}$ | — | — | 9.420*n* | 6.76*n* | 6.90 | 6.708*n* |
| | 0,−4,5 | 0,−3,5 | 0,−2,5 | 0,−1,5 | 0,0,5 | 0,1,5 |
| { | — | −0.005 | +0.001 | −0.002 | — | — |
| | — | −0.263 | −0.001 | +0.001 | −0.001 | — |

Zuerst stehen die Logarithmen der betreff. Coefficienten von $a^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)$ mit darüber geschriebenen Indices. Hierauf folgen die Logg. der einzelnen Producte derselben mit den Coefficienten von $C$, deren Indices in der ersten Columne angegeben sind. Es schliessen sich an die Zahlen dieser einzelnen Producte, und zwar zuerst für die Glieder, die $-\gamma$ haben, wie die darüber stehenden Indices anzeigen. Hierauf kommen die Summen dieser Producte, die Logarithmen derselben und ihrer Producte mit den Integrationsfactoren, nebst den Producten dieser letzteren mit den $\eta^{(2)}$ und $\eta^{(1)}$. Es folgt darauf dasselbe für die Glieder, die $+\gamma$ in ihren Argumenten haben, wie durch die Ueberschriften angezeigt wird. Endlich enthält die letzte Abtheilung die Zahlen der Producte der Coefficienten der Integrale mit $\eta^{(0)}$, woraus die Glieder hervorgehen, in deren Argumenten $\gamma$ nicht vorhanden ist. Nimmt man die Zahlen aller vorstehenden Integralcoefficienten, so wird man sie mit den betr. Zahlen der vorstehenden Tafel übereinstimmend finden. Es ist z. B. die zum log = 8.812 gehörige Zahl der Coefficient von —1,—3,5, die zum log = 7.193 gehörige der von —2,3,5, u. s. w., die zum log = 0.5605 gehörige der von 1,—3,5, die Zahl des darunter stehenden log = 8.942 der Coefficient von 2,—3,5, die des log = 7.500 der von 3,—3,5, u. s. w.

## 107.

Man erhält jetzt aus der Tafel des vor. Art. durch die erklärten Additionen

$$
\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = & -0''.098 \sin(-g-g') && +0''.028 \cos(-g-g') \\
& -0.444 \sin(-g') && -0.310 \cos(-g') \\
& +0.114 \sin(g-g') && -0.064 \cos(g-g') \\
& +0.260 \sin(2g-g') && -0.060 \cos(2g-g') \\
& +0.005 \sin(3g-g') && -0.004 \cos(3g-g') \\
& -0.005 \sin(-g-2g') && -0.010 \cos(-g-2g') \\
& +0.028 \sin(-2g') && -0.373 \cos(-2g') \\
& -0.472 \sin(g-2g') && +0.434 \cos(g-2g') \\
& +0.106 \sin(2g-2g') && +0.189 \cos(2g-2g') \\
& +0.001 \sin(3g-2g') && -0.062 \cos(3g-2g')
\end{aligned}
$$

| | |
|---|---|
| $-0.035 \sin(-3g')$ | $+0.040 \cos(-3g')$ |
| $-0''.191 \sin(g-3g')$ | $-0''.034 \cos(g-3g')$ |
| $+0.539 \sin(2g-3g')$ | $+0.883 \cos(2g-3g')$ |
| $+0.043 \sin(3g-3g')$ | $-0.003 \cos(3g-3g')$ |
| $-0.022 \sin(4g-3g')$ | $-0.005 \cos(4g-3g')$ |
| $-0.041 \sin(g-4g')$ | $-0.029 \cos(g-4g')$ |
| $+0.026 \sin(2g-4g')$ | $+0.150 \cos(2g-4g')$ |
| $-0.234 \sin(3g-4g')$ | $+0.084 \cos(3g-4g')$ |
| $-0.014 \sin(4g-4g')$ | $-0.009 \cos(4g-4g')$ |
| $-0.004 \sin(5g-4g')$ | $+0.007 \cos(5g-4g')$ |
| $+0.064 \sin(g-5g')$ | $+0.166 \cos(g-5g')$ |
| $-0.282 \sin(2g-5g')$ | $-0.020 \cos(2g-5g')$ |
| $+3.660 \sin(3g-5g')$ | $+0.453 \cos(3g-5g')$ |
| $+0.092 \sin(4g-5g')$ | $+0.056 \cos(4g-5g')$ |
| $-0.003 \sin(5g-5g')$ | $+0.006 \cos(5g-5g')$ |
| $+0.033 \sin(3g-6g')$ | $+0.020 \cos(3g-6g')$ |
| $-0.016 \sin(4g-6g')$ | $+0.047 \cos(4g-6g')$ |
| $+0.012 \sin(5g-6g')$ | $+0.003 \cos(5g-6g')$ |
| $-0.039 \sin(4g-7g')$ | $+0.037 \cos(4g-7g')$ |
| $+0.011 \sin(5g-7g')$ | $+0.009 \cos(5g-7g')$ |

wo indess die ganz kleinen Glieder weggelassen worden sind. Die Vergleichung dieses Resultats mit demjenigen, welches ich in meiner Berliner Preisschrift erhalten habe, giebt ein befriedigendes Resultat. Die kleinen Unterschiede, die in einigen Gliedern vorhanden sind, erreichen nicht den Betrag von 0''.03.

Man braucht, um diese Vergleichung auszuführen, nicht aus den in der genannten Schrift mit $p$ und $q$ bezeichneten Grössen $u$ zu berechnen, sondern kann folgenden kürzeren Weg einschlagen. Man findet aus der genannten Preisschrift leicht, dass

$$\frac{u}{\cos i} = q\frac{r}{a}\sin(f+\Pi+180^0) - p\frac{r}{a}\cos(f+\Pi+180^0)$$

indem dort allenthalben der aufsteigende Knoten der Saturnbahn auf der Jupiterbahn zu Grunde gelegt ist, während hier der aufsteigende Knoten der letzteren auf jener angewandt worden ist. Statt des vorstehenden Ausdrucks kann man auch setzen

$$\frac{u}{\cos i} = P\frac{r}{a}\sin f + Q\frac{r}{a}\cos f$$

und hieraus folgen die Gleichungen

$$P = q\cos(180^0+\Pi) + p\sin(180^0+\Pi)$$
$$Q = q\sin(180^0+\Pi) - p\cos(180^0+\Pi)$$

die abgesondert, sowohl auf die Sinus- wie auf die Cosinuscoefficienten von $p$ und $q$ angewandt werden müssen. Setzt man aber

$$P_{,} = \Sigma(a,c)_m \cos mt + \Sigma(a,s)_m \sin mt$$
$$Q = \Sigma(b,s)_m \sin mt + \Sigma(b,c)_m \cos mt$$

so findet man durch die Analyse des Art. 59

$$(a,c)_m = (1+\tfrac{5}{8}e^2)\{-(-1,s)_m + (1,s)_m\}$$
$$(b,s)_m = (1+\tfrac{3}{8}e^2)\{(-1,s)_m + (1,s)_m\}$$
$$(a,s)_m = (1+\tfrac{5}{8}e^2)\{(-1,c)_m - (1,c)_m\}$$
$$(b,c)_m = (1+\tfrac{3}{8}e^2)\{(-1,c)_m + (1,c)_m\}$$

wo $(-1,s)_m$ und $(1,s)_m$ die Coefficienten der Tafel des vor. Art. bedeuten, die mit einem Sinus multiplicirt sind, und in dem Argument, dessen Coefficienten verglichen werden sollen, bez. $-\gamma$ und $+\gamma$ haben. Die Bezeichnungen $(-1,c)_m$ und $(1,c)_m$ haben für die Coefficienten der Cosinus dieselbe Bedeutung. Es ist hierbei noch zu erwägen, dass in der Preisschrift die Saturnmasse $= \frac{1}{3512}$ angenommen, während sie hier $= \frac{1}{3500}$ gesetzt worden ist. Die Störungsglieder jener Abhandlung müssen daher, um sie mit den hier berechneten vergleichen zu können, mit

1.00343

multiplicirt werden.

Um die Vergleichung anschaulicher zu machen, werde ich sie hier für die Coefficienten der beiden grössten Glieder durchführen. Aus S. 78 und 79 der Preisschrift entnehme ich zuerst die folgenden Glieder

$$p = +0''858\sin(-2g+3(g-g')) - 0''117\cos(-2g+3(g-g'))$$
$$q = -0.091\sin(-2g+3(g-g')) - 0.973\cos(-2g+3(g-g'))$$

Hiermit und mit dem Werthe

$$180^0 + \Pi = 245^0 1' 25''$$

des Art. 102 ergeben sich

$$(a,c)_m = \begin{cases} +0''517 \\ +0.002 \end{cases}, \qquad (a,s)_m = \begin{cases} -0''740 \\ -0.002 \end{cases}$$

$$(b,s)_m = \begin{cases} +0.444 \\ +0.001 \end{cases}, \qquad (b,c)_m = \begin{cases} +0.833 \\ +0.003 \end{cases}$$

wo die unten stehenden Zahlen die Verbesserungen wegen der Masse sind. Die zur Vergleichung dienenden Glieder der Tafel sind nun die, deren Argumente mit $(\mp 1, -2, 3)$ bezeichnet sind, und geben

$$(-1,s)_m = -0''037, \qquad (-1,c)_m = +0''044$$

$$(1,s)_m = +0.482, \qquad (1,c)_m = +0.790$$

$$(a,c)_m = \begin{cases} +0''519 \\ +0.001 \end{cases}, \qquad (a,s)_m = \begin{cases} -0''746 \\ -0.001 \end{cases}$$

$$(b,s)_m = \begin{cases} +0.445 \\ +0.001 \end{cases}, \qquad (b,c)_m = \begin{cases} +0.834 \\ +0.001 \end{cases}$$

wo die untenstehenden Zahlen die Wirkungen der Factoren $\frac{5}{8}e^2$ und $\frac{3}{8}e^2$ der obigen Formeln ausdrücken. Die Unterschiede sind hier

$$0''001, \qquad 0''005$$

$$0.001, \qquad 0.001$$

Ferner entnehme ich dem a. O.

$$p = +1''794 \sin(-3g+5(g-g')) - 2''960 \cos(-3g+5(g-g'))$$

$$q = -3.220 \sin(-3g+5(g-g')) - 2.036 \cos(-3g+5(g-g'))$$

woraus

$$(a,c)_m = \begin{cases} +3''545 \\ +0.012 \end{cases}, \qquad (a,s)_m = \begin{cases} -0''267. \\ -0.001 \end{cases}$$

$$(b,s)_m = \begin{cases} +3.677 \\ +0.012 \end{cases}, \qquad (b,c)_m = \begin{cases} +0.596 \\ +0.002 \end{cases}$$

sich ergeben. Es sind hier die Coefficienten der Tafel, die zu den Argumenten $(\mp 1, +3, 5)$ gehören, anzuwenden, und diese geben

$$(-1,s)_m = +0''065, \qquad (-1,c)_m = +0''168$$

$$(1,s)_m = +3.635, \qquad (1,c)_m = +0.452$$

$$(a,c)_m = \begin{cases} +3''575 \\ +0.005 \end{cases}, \qquad (a,s)_m = \begin{cases} -0''284 \\ 0 \end{cases}$$

$$(b,s)_m = \begin{cases} +3.700 \\ +0\ 003 \end{cases}, \qquad (b,c)_m = \begin{cases} +0.620 \\ 0 \end{cases}$$

Die Unterschiede werden hier

$$\begin{array}{ll} 0''.018, & 0''.016 \\ 0.014, & 0.022 \end{array}$$

fast die grössten, die überhaupt vorkommen.

## 108.

Es sind noch die Glieder, welche $i = 0$ entsprechen, zu berechnen. Die Ausdrücke des Art. 52 geben zuerst

$$\begin{aligned} M &= -0''.31763 \sin \Pi + (7.8981) \sin \Pi' + (7.5665) \sin (2\Pi - \Pi') \\ &\quad + (7.0276) \sin (\Pi - 2\Pi') \\ N &= +0.31042 \cos \Pi - (7.5665) \cos (2\Pi - \Pi') - (7.0276) \cos (\Pi - 2\Pi') \\ (0,c) &= +(8.8315) \sin \Pi - (8.6351) \sin \Pi' \\ (2,s) &= -(8.1072) \cos \Pi + (8.1188) \cos (2\Pi - \Pi') \\ (2,c) &= -(8.1072) \sin \Pi + (8.1188) \sin (2\Pi - \Pi') \end{aligned}$$

woraus man nach den Multiplicationen

$$\begin{array}{ll} M = -0''.28329, & N = +0''.12829 \\ & (0,c) = +0.036 \\ (2,s) = +0.007, & (2,c) = -0.015 \end{array}$$

erhält. Es folgt hiermit

$$\begin{aligned} \frac{u}{\cos i} = & \qquad\qquad\qquad\qquad - 0''.00927\, nt \\ & - 0''.28329\, nt \sin g + 0.12829\, nt \cos g \\ & - 0.00682\, nt \sin 2g + 0.00309\, nt \cos 2g \\ & - 0.00025\, nt \sin 3g + 0.00011\, nt \cos 3g \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad + 0''.036 \\ & \qquad + 0''.007 \sin 2g - 0.015 \cos 2g \end{aligned}$$

welche Glieder dem Ausdruck des vor. Art. hinzuzufügen sind.

Zur Vergleichung dieser Säcularänderungen mit denen der Preisschrift entnehme ich aus letzterer

$$p = +0''.31024\, nt, \qquad q = +0''.00346\, nt$$

und damit durch die Ausdrücke des vor. Art.

$$(a,c)_m = \begin{cases} -0''.28266 \\ -0.00098 \end{cases}, \qquad (b,c)_m = \begin{cases} +0''.12785 \\ +0.00043 \end{cases}$$

Hingegen giebt der obige Ausdruck für $\frac{u}{\cos i}$

$$(a,c)_m = \begin{cases} -0''28329 \\ -0.00041 \end{cases}, \qquad (b,c)_m = \begin{cases} +0''12829 \\ +0.00011 \end{cases}$$

und die Unterschiede werden .

$$0''00006\,, \qquad 0''00012$$

die ganz befriedigend sind. Die in dem obigen Ausdrucke mit der Zeit nicht multiplicirten Glieder können selbstverständlich nicht mit den analogen der Preisschrift verglichen werden, da ich dort den betreffenden Integralen keine Constanten hinzugefügt habe.

---

## §. 8. Berechnung der Störungen des Jupiters, die vom Uranus bewirkt werden.

109.

Die Elemente des Uranus, die ich angewandt habe, sind die folgenden:

Uranus

$$m' = \frac{1}{20470}$$
$$n' = 15425''030$$
$$e' = 0.0467100$$
$$\pi' = 166^\circ 50' 36''$$
$$i' = 0\;\;46\;\;28.4$$
$$\theta' = 73\;\;2\;\;16$$
$$\log a' = 1.2829207$$

Durch die Gleichungen des Art. 1 ergaben sich hieraus die Winkel

$$J = 0^\circ 41' 55''0$$
$$\Phi = 28^\circ 23' 14'', \qquad \Psi = 53^\circ 46' 30''$$
$$\Pi = 244\;\;18\;\;39\;, \qquad \Pi' = 40\;\;1\;\;50$$

welchen ich sogleich die Werthe der Vielfachen von $\mu$ hinzufüge:

$$\mu = 0.858818$$
$$2\mu = 1.717636$$
$$3\mu = 2.576454$$
$$4\mu = 3.435272$$
$$5\mu = 4.294090$$
$$6\mu = 5.152908$$
$$7\mu = 6.011726$$

110.

Mit dem Werthe

$$\log \alpha = 9.4333164$$

ergeben sich die folgenden Grössen:

| | |
|---|---|
| $(0)A_0 = 1.01919$ | $(1)A_0 = 0.04007$ |
| $(0)A_1 = 0.00392$ | $(1)A_1 = 0.01215$ |
| $(0)A_2 = 0.02847$ | $(1)A_2 = 0.05881$ |
| $(0)A_3 = 0.00645$ | $(1)A_3 = 0.01979$ |
| $(0)A_4 = 0.00153$ | $(1)A_4 = 0.00623$ |
| $(0)A_5 = 0.00037$ | $(1)A_5 = 0.00190$ |
| $(0)A_6 = 0.00009$ | $(1)A_6 = 0.00056$ |

| | |
|---|---|
| $(2)A_0 = 0.04720$ | $(3)A_0 = 0.0237$ |
| $(2)A_1 = 0.02630$ | $(3)A_1 = 0.0350$ |
| $(2)A_2 = 0.06668$ | $(3)A_2 = 0.0261$ |
| $(2)A_3 = 0.04188$ | $(3)A_3 = 0.0519$ |
| $(2)A_4 = 0.01937$ | $(3)A_4 = 0.0123$ |
| $(2)A_5 = 0.00778$ | $(3)A_5 = 0.0246$ |
| $(2)A_6 = 0.00288$ | $(3)A_6 = 0.0119$ |

$$(4)A_0 = 0.0367$$
$$(4)A_1 = 0.0303$$
$$(4)A_2 = 0.0394$$

| | |
|---|---|
| $(0)B_0 = 0.0506$ | $(1)B_0 = 0.1139$ |
| $(0)B_1 = 0.1273$ | $(1)B_1 = 0.1654$ |
| $(0)B_2 = 0.0428$ | $(1)B_2 = 0.0975$ |
| $(0)B_3 = 0.0135$ | $(1)B_3 = 0.0440$ |
| $(0)B_4 = 0.0041$ | $(1)B_4 = 0.0175$ |

| | |
|---|---|
| $(2)B_0 = 0.1701$ | $(0)C_0 = 0.1168$ |
| $(2)B_1 = 0.1314$ | $(0)C_1 = 0.0698$ |
| $(2)B_2 = 0.1505$ | $(0)C_2 = 0.0316$ |
| $(2)B_3 = 0.1077$ | |

in welchen das zweite Glied der Störungsfunction schon berücksichtigt ist.

## 111.

Die Ausdrücke der Artt. 10 und 11 geben hiermit

| für $i = -1$ | | für $i = 1$ | |
|---|---|---|---|
| (1) = 0".0107, | (1)' = 0".0333 | (1) = 0".0107, | (1)' = 0".0333 |
| (2) = (6.592 n), | (2)' = (6.955 n) | (2) = (6.684), | (2)' = (6.958) |
| (3) = (7.407 n), | (3)' = (7.915 n) | (3) = (6.752 n), | (3)' = (7.274 n) |
| (4) = (9.1308), | (4)' = (8.2143) | (4) = (7.531 n), | (4)' = (7.813 n) |
| (9) = (5.868), | (9)' = (6.382) | (9) = (5.229 n), | (9)' = (5.732 n) |
| (10) = (6.592 n), | (10)' = (6.955 n) | (10) = (6.232 n), | (10)' = (6.537 n) |
| (11) = (5.841), | (11)' = (6.355) | (11) = (5.024), | (11)' = (5.533) |

| für $i = -2$ | | für $i = 2$ | |
|---|---|---|---|
| (1) = 0".0771, | (1)' = 0".1591 | (1) = 0".0771, | (1)' = 0".1591 |
| (2) = (5.918 n), | (2)' = (6.452 n) | (2) = (6.537), | (2)' = (7.012) |
| (3) = (8.3564 n), | (3)' = (8.6764 n) | (3) = (7.860), | (3)' = (8.1593) |
| (4) = (7.484), | (4)' = (7.978) | (4) = (7.203 n), | (4)' = (7.443 n) |
| (9) = (6.971), | (9)' = (7.302) | (9) = (6.540), | (9)' = (6.838) |
| (10) = (6.574 n), | (10)' = (7.079 n) | (10) = (6.066 n), | (10)' = (6.862 n) |
| (11) = (7.813), | (11)' = (7.078) | (11) = (4.958), | (11)' = (5.470 n) |

| für $i = -3$ | | für $i = 3$ | |
|---|---|---|---|
| (1) = 0".0171, | (1)' = 0".0527 | (1) = 0".0171, | (1)' = 0".0527 |
| (2) = (7.074), | (2)' = (7.372) | (2) = (6.211), | (2)' = (6.825) |
| (3) = (7.886 n), | (3)' = (8.3741 n) | (3) = (7.396), | (3)' = (7.874) |
| (4) = (8.4095), | (4)' = (8.7287) | (4) = (6.759 n), | (4)' = (7.356 n) |
| (9) = (6.774), | (9)' = (7.268) | (9) = (6.173), | (9)' = (6.649) |
| (10) = (7.575 n), | (10)' = (7.901 n) | (10) = (5.741 n), | (10)' = (6.343 n) |
| (11) = (6.501), | (11)' = (7.003) | (11) = (4.650), | (11)' = (5.396) |

| für $i = -4$ | | für $i = 4$ | |
|---|---|---|---|
| (1) = 0''0042, | (1)' = 0''0162 | (1) = 0''0042, | (1)' = 0''0162 |
| (2) = (6.765), | (2)' = (7.245) | (2) = (5.830), | (2)' = (6.535) |
| (3) = (7.384 n), | (3)' = (7.997 n) | (3) = (6.897), | (3)' = (7.503) |
| (4) = (7.919), | (4)' = (8.407) | (4) = (6.282 n), | (4)' = (6.975 n) |
| (9) = (6.441), | (9)' = (7.053) | | |
| (10) = (7.266 n), | (10)' = (7.751 n) | | |
| (11) = (7.468), | (11)' = (7.791) | | |

von welchen Grössen die meisten so klein sind, dass sie auch hätten weggelassen werden können. Durch die Ausdrücke des Art. 29 ergeben sich hiemit die Coefficienten, die die folgende Tafel enthält.

| | $a\Omega$ | | $ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)$ | |
|---|---|---|---|---|
| $g, \Gamma$ | cos | − sin | cos | − sin |
| −2,1 | − 0''0006 | 0''0000 | − 0''0013 | 0''0000 |
| −1,1 | + 0.1375 | + 0.0011 | + 0.0237 | + 0.0034 |
| 0,1 | − 0.0196 | − 0.0086 | − 0.0610 | − 0.0267 |
| 1,1 | − 0.0018 | − 0.0023 | − 0.0026 | − 0.0041 |
| 2,1 | − 0.0001 | − 0.0001 | − 0.0002 | − 0.0004 |
| −2,2 | + 0.0074 | + 0.0009 | + 0.0036 | + 0.0020 |
| −1,2 | − 0.0178 | − 0.0183 | − 0.0401 | − 0.0395 |
| 0,2 | + 0.1021 | + 0.1153 | + 0.2106 | + 0.2376 |
| 1,2 | + 0.0053 | + 0.0069 | + 0.0104 | + 0.0134 |
| 2,2 | + 0.0003 | + 0.0004 | + 0.0006 | + 0.0008 |
| −2,3 | − 0.0030 | − 0.0035 | − 0.0067 | − 0.0078 |
| −1,3 | + 0.0193 | + 0.0266 | + 0.0424 | + 0.0627 |
| 0,3 | − 0.0093 | − 0.0316 | − 0.0296 | − 0.0998 |
| 1,3 | − 0.0006 | − 0.0030 | − 0.0019 | − 0.0109 |
| 2,3 | 0.0000 | − 0.0002 | − 0.0001 | − 0.0006 |
| −2,4 | + 0.0023 | + 0.0043 | + 0.0057 | + 0.0111 |
| −1,4 | − 0.0022 | − 0.0104 | − 0.0063 | − 0.0343 |
| 0,4 | − 0.0012 | + 0.0076 | − 0.0045 | + 0.0319 |
| 1,4 | − 0.0002 | + 0.0010 | − 0.0009 | + 0.0040 |

## 112.

Die Factoren $A$ und $B$ des Art. 27 bekommen die folgenden Werthe:

$$
\begin{aligned}
A = &-3 \\
&+2\,(0.3015)\cos(\gamma-g) \\
&+2\,(8.3819)\cos(\gamma-2g) \\
&-2\,(9.0813)\cos\gamma \\
&+2\,(6.763)\;\cos(\gamma-3g)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
B = &-2\,(0.0005)\sin(\gamma-g) \\
&-2\,(8.3818)\sin(\gamma-2g) \\
&-2\,(8.3826)\sin\gamma \\
&-2\,(6.939)\;\sin(\gamma-3g)
\end{aligned}
$$

Die mechanische Multiplication dieser Factoren mit den Angaben der vorhergehenden Tafel, und die darauf folgende Integration gab nun den nachstehenden Werth von $W$:

$W$ und $\overline{W}$

| $\gamma$, $g, \Gamma$ | cos | − sin |
|---|---|---|
| 0, −2, 1 | + 0″002 | 0″000 |
| −1, −1, 1 | − 0.013 | + 0.001 |
| −2, 0, 1 | − 0.001 | 0.000 |
| 1, −3, 1 | 0.000 | 0.000 |
| | − 0.012 | + 0.001 |
| 0, −1, 1 | 0 | 0 |
| −1, 0, 1 | − 0.0231 | − 0.0021 |
| −2, 1, 1 | + 0.0005 | + 0.0001 |
| 1, −2, 1 | − 0.0191 | − 0.0024 |
| | − 0.0417 | − 0.0044 |
| 0, 0, 1 | + 0.068 | + 0.030 |
| −1, 1, 1 | + 0.042 | + 0.005 |
| 1, −1, 1 | + 0.708 | + 0.310 |
| | + 0.788 | + 0.345 |
| 0, 1, 1 | + 0.006 | + 0.006 |
| −1, 2, 1 | − 0.001 | − 0.001 |
| 1, 0, 1 | − 0.010 | − 0.015 |
| 2, −1, 1 | + 0.017 | + 0.008 |
| | + 0.012 | − 0.002 |
| 0, −2, 2 | 0 | 0 |
| −1, −1, 2 | − 0.001 | + 0.002 |
| 1, −3, 2 | − 0.002 | − 0.001 |
| | − 0.003 | + 0.001 |
| 0, −1, 2 | + 0.074 | + 0.077 |
| −1, 0, 2 | − 0.015 | − 0.018 |
| −2, 1, 2 | + 0.002 | + 0.002 |
| 1, −2, 2 | + 0.232 | + 0.230 |
| | + 0.293 | + 0.291 |

| $\gamma$, $g, \Gamma$ | sin | − sin |
|---|---|---|
| 0, 0, 2 | − 0″356 | − 0″403 |
| −1, 1, 2 | + 0.073 | + 0.082 |
| 1, −1, 2 | + 0.865 | + 0.978 |
| 2, −2, 2 | + 0.006 | + 0.006 |
| | + 0.588 | + 0.663 |
| 0, 1, 2 | − 0.018 | − 0.023 |
| −1, 2, 2 | + 0.006 | + 0.007 |
| 1, 0, 2 | + 0.013 | + 0.019 |
| 2, −1, 2 | + 0.021 | + 0.024 |
| | + 0.022 | + 0.027 |
| 0, −2, 3 | + 0.016 | + 0.018 |
| −1, −1, 3 | − 0.004 | − 0.005 |
| 1, −3, 3 | + 0.026 | + 0.028 |
| | + 0.038 | + 0.041 |
| 0, −1, 3 | − 0.074 | − 0.101 |
| −1, 0, 3 | + 0.015 | + 0.023 |
| 1, −2, 3 | + 0.206 | + 0.286 |
| | + 0.147 | + 0.208 |
| 0, 0, 3 | + 0.033 | + 0.111 |
| −1, 1, 3 | − 0.007 | − 0.025 |
| 1, −1, 3 | − 0.058 | − 0.187 |
| 2, −2, 3 | + 0.005 | + 0.007 |
| | − 0.027 | − 0.094 |
| 0, 1, 3 | + 0″002 | + 0.010 |
| −1, 2, 3 | − 0.001 | − 0.003 |
| 1, 0, 3 | − 0.002 | − 0.010 |
| 2, −1, 3 | − 0.001 | − 0.005 |
| | − 0.002 | − 0.008 |

| γ, g,Γ | cos | − sin |
|---|---|---|
| 0,−2,4 | −0″010 | −0″018 |
| −1,−1,4 | +0.002 | +0.004 |
| 1,−3,4 | +0.033 | +0.062 |
| | +0.025 | +0.048 |
| 0,−1,4 | +0.008 | +0.038 |
| −1, 0,4 | −0.001 | −0.010 |
| 1,−2,4 | −0.014 | −0.067 |
| 2,−3,4 | 0.000 | +0.001 |
| | −0.007 | −0.038 |

| γ, g,Γ | cos | − sin |
|---|---|---|
| 0, 0,4 | +0″004 | −0″027 |
| −1, 1,4 | −0.001 | +0.006 |
| 1,−1,4 | −0.006 | +0.039 |
| 2,−2,4 | 0.000 | −0.002 |
| | −0.003 | +0.016 |
| 0, 1,4 | +0.001 | −0.003 |
| −1, 2,4 | 0.000 | +0.001 |
| 1, 0,4 | −0.001 | +0.003 |
| 2,−1,4 | 0.000 | +0.004 |
| | 0.000 | +0.002 |

Die beiden untersten Zahlen einer jeden Abtheilung dieser Tafel sind die Summen aller Zahlen derselben Abtheilung, und folglich die Coefficienten von $\overline{W}$.

Aus den vorstehenden Angaben ergiebt sich nun ohne Mühe

$$
\begin{array}{rll}
n\delta z = & +0''009 \sin(-g-g') & -0''001 \cos(-g-g') \\
& +0.295 \sin(-g') & +0.031 \cos(-g') \\
& +0.918 \sin(g-g') & +0.402 \cos(g-g') \\
& +0.006 \sin(2g-g') & -0.001 \cos(2g-g') \\
& +0.011 \sin(-2g') & -0.004 \cos(-2g') \\
& +0.408 \sin(g-2g') & +0.406 \cos(g-2g') \\
& +0.342 \sin(2g-2g') & +0.386 \cos(2g-2g') \\
& +0.008 \sin(3g-2g') & +0.010 \cos(3g-2g') \\
& +0.066 \sin(g-3g') & +0.071 \cos(g-3g') \\
& +0.093 \sin(2g-3g') & +0.132 \cos(2g-3g') \\
& -0.010 \sin(3g-3g') & -0.038 \cos(3g-3g') \\
& -0.001 \sin(4g-3g') & -0.002 \cos(4g-3g') \\
& +0.017 \sin(2g-4g') & +0.033 \cos(2g-4g') \\
& -0.003 \sin(3g-4g') & -0.016 \cos(3g-4g') \\
& -0.001 \sin(4g-4g') & +0.005 \cos(4g-4g')
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rll}
\nu = & +0''011 \cos(-g') & +0''002 \sin(-g') \\
& -0.405 \cos(g-g') & +0.178 \sin(g-g') \\
& -0.007 \cos(2g-g') & +0.001 \sin(2g-g') \\
& -0.002 \cos(-2g') & +0.006 \sin(-2g') \\
& -0.169 \cos(g-2g') & +0.170 \sin(g-2g') \\
& -0.234 \cos(2g-2g') & +0.264 \sin(2g-2g') \\
& -0.008 \cos(3g-2g') & +0.011 \sin(3g-2g')
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
-0''024 \cos(g-3g') & +0''029 \sin(g-3g') \\
-0.061 \cos(2g-3g') & +0.084 \sin(2g-3g') \\
+0.008 \cos(3g-3g') & -0.030 \sin(3g-3g') \\
-0.011 \cos(2g-4g') & +0.020 \sin(2g-4g') \\
+0.003 \cos(3g-4g') & -0.011 \sin(3g-4g')
\end{array}
$$

Die am Ende des Art. 109 gegebene Zusammenstellung der Werthe der Vielfachen von $\mu$ zeigt, dass bei dem Argument $g-7g'$ der kleine Integrationsdivisor 0.0117 vorkommt; eine genäherte Berechnung der Coefficienten dieses Arguments hat indess gelehrt, dass sie unmerklich sind.

### 113.

Den periodischen Breitenstörungen muss einige Aufmerksamkeit geschenkt werden, obgleich sich voraussehen lässt, dass sie unmerklich sind. Durch die Ausdrücke des Art. 18 erhielt ich

| für $i=-1$ | für $i=1$ |
|---|---|
| (1) = (5.961) | (1) = (6.333) |
| (2) = (5.842) | (2) = (6.514 $n$) |
| (5) = (7.2268 $n$) | (5) = (7.1538 $n$) |
| (11) = (5.961) | (11) = (5.772 $n$) |
| (12) = (6.514 $n$) | (12) = (5.121 $n$) |

| für $i=-2$ | für $i=2$ |
|---|---|
| (1) = (5.855 $n$) | (1) = (6.001) |
| (2) = (5.758) | (2) = (6.320 $n$) |
| (5) = (7.6274 $n$) | (5) = (6.653 $n$) |
| (11) = (6.527) | (11) = (5.472 $n$) |
| (12) = (6.391) | (12) = (3.932 $n$) |

und hieraus

$$a^2\left(\frac{\partial\Omega}{\partial Z}\right)$$

| $g, \Gamma$ | sin | cos | $g, \Gamma$ | sin | cos |
|---|---|---|---|---|---|
| −2,1 | −0''0002 | +0''0004 | −2,2 | +0''0002 | +0''0002 |
| −1,1 | +0.0013 | −0.0011 | −1,2 | −0.0041 | +0.0012 |
| 0,1 | +0.0001 | +0.0004 | 0,2 | −0.0001 | −0.0003 |
| 1,1 | 0.0000 | −0.0014 | 1,2 | −0.0002 | +0.0004 |

Das grösste Glied, welches hieraus entsteht, ist

$$\frac{u}{\cos i} = -0''.008 \sin(g-2g') + 0''.002 \cos(g-2g')$$

114.

Es sind noch die Glieder zu berechnen, die von $i = 0$ abhängen. Die Berechnung von $K$ und $L$ werde ich in der Form ausführen, die diesen Grössen im Art. 68 gegeben worden ist, und bekomme zu dem Ende

| | |
|---|---|
| [1] = (9.5415) | [6]′ = (0.4837) |
| [2] = (8.099) | [7] = (0.4338) |
| [3] = (0.4570) | [8] = (0.5033) |
| [4] = (0.4570) | [9] = (9.8748) |
| [5] = (9.0676) | [10] = (0.9111) |
| [6] = (0.0256) | [11] = (0.2329) |

wodurch man

$$K = +0''.00227, \qquad L = -0''.02181$$

erhält. Aus dem Art. 47 ergeben sich ferner

$$C = -0''.037, \qquad (1,c) = +0''.010, \qquad (1,s) = -0''.001$$

während die übrigen Glieder dieser Gattung ganz unmerklich sind. Der Art. 52 giebt endlich

$$M = +0''.00193, \qquad N = -0''.00093$$

und hiemit haben wir erhalten:

$$\begin{aligned} n\delta z = &+0''.00227\, nt \sin g &&-0''.02185\, nt \cos g \\ &+0.00003\, nt \sin 2g &&-0.00026\, nt \cos 2g \\ & &&-0.00001\, nt \cos 3g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu = &-0''.00003\, nt \\ &-0.00114\, nt \cos g &&-0''.01090\, nt \sin g \\ &-0.00003\, nt \cos 2g &&-0.00026\, nt \sin 2g \\ & &&-0.00001\, nt \sin 3g \\ &-0''.037 \\ &+0.010 \cos g &&-0''.001 \sin g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u}{\cos i} = & &&+0''.00007\, nt \\ &+0''.00193\, nt \sin g &&-0.00093\, nt \cos g \\ &+0.00005\, nt \sin 2g &&-0.00002\, nt \cos 2g \end{aligned}$$

womit alle vom Uranus bewirkten Störungen gegeben sind.

## §. 9. Störungen des Jupiters, die vom Neptun bewirkt werden.

115.

Die angewandten Elemente sind die folgenden:

Neptun.

$$m' = \frac{1}{14446}$$
$$n' = 7864''.935$$
$$e' = 0.008490$$
$$\pi' = 42^0 14' 53''$$
$$i' = 1\ 47\ 18.0$$
$$\theta' = 129\ 14\ 32$$
$$\log a' = 1.47794$$

woraus sich

$$J = 0^0 56' 32''.6$$
$$\Phi = 256^0 23' 42'', \qquad \Psi = 225^0 35' 33''$$
$$\Pi = 16\ 18\ 11\ , \qquad \Pi' = 47\ 24\ 18$$
$$\mu = 0.9280$$
$$2\mu = 1.8560$$
$$3\mu = 2.7840$$
etc.

ergeben.

116.

Mit dem Werthe

$$\log \alpha = 9.23830$$

erhält man

$(0)A_0 = 1.00762$, $(1)A_0 = 0.01551$, $(2)A_0 = 0.01659$
$(0)A_1 = 0.00099$, $(1)A_1 = 0.00301$, $(2)A_1 = 0.00622$
$(0)A_2 = 0.01138$, $(1)A_2 = 0.02306$, $(2)A_2 = 0.02425$
$(3)A_0 = 0.00337$, $(0)B_1 = 0.04759$
$(3)A_1 = 0.00702$

wo das zweite Glied der Störungsfunction schon berücksichtigt ist.

### 117.

Bei der Untersuchung der periodischen Längenstörungen sind vor Allem die Glieder zu beachten, die den kleinen Integrationsdivisor

$$1 - \mu = 0.0720$$

bekommen. Es sind dies die Glieder mit den Argumenten $g - g'$, $-g'$, $-g - g'$, von welchen aber wenigstens vorläufig das letztgenannte übergangen werden kann, da es einer höheren Ordnung angehört. Es ergaben sich zu dem Ende

für $i = -1$

$(1) = (7.389)$, $(1)' = (7.8716)$

$(3)' = (7.2589\,n)$

$(4)' = (6.999)$

und hiemit nach und nach

| | $a\Omega$ | | $ar\left(\frac{\partial\Omega}{\partial r}\right)$ | |
|---|---|---|---|---|
| $g, \Gamma$ | cos | sin | cos | sin |
| 0,1 | + 0."0042 | + 0."0025 | + 0."0127 | + 0."0077 |
| −1,1 | | | − 0.0006 | − 0.0010 |

**W und $\overline{W}$**

| $\gamma,\ g, \Gamma$ | cos | sin |
|---|---|---|
| 0, −1, 1 | 0 | 0 |
| −1, 0, 1 | − 0."0002 | + 0."0006 |
| 1, −2, 1 | + 0.0004 | + 0.0008 |
| | + 0.0002 | + 0.0014 |
| 0, 0, 1 | − 0.0136 | − 0.0081 |
| −1, 1, 1 | − 0.0022 | − 0.0014 |
| 1, −1, 1 | − 0.2931 | − 0.1764 |
| | − 0.3089 | − 0.1859 |
| 2, −1, 1 | − 0.007 | − 0.004 |

$$n\delta z = -0''.003 \sin(-g') + 0''.019 \cos(-g')$$
$$-0.330 \sin(g-g') + 0.200 \cos(g-g')$$
$$-0.004 \sin(2g-g') + 0.002 \cos(2g-g')$$

$$\nu = +0''.004 \cos(-g') + 0''.001 \sin(-g')$$
$$+0.156 \cos(g-g') + 0.095 \sin(g-g')$$
$$+0.004 \cos(2g-g') + 0.002 \sin(2g-g')$$

Diese sind jedenfalls die grössten Glieder, die der Neptun in der Bewegung des Jupiters hervorbringt. Dass die Störungen der dritten Coordinate völlig unmerklich sind, zeigt sich ohne Weiteres.

## 118.

Für die Säcularänderungen bekommt man mit blosser Berücksichtigung der Glieder der niedrigsten Ordnung, da die höheren jedenfalls unmerklich sind:

$$K = +0''.00011\,, \qquad L = -0''.00548$$
$$M = -0.00027\,, \qquad N = +0.00093$$

also

$$n\delta z = +0''.00011\, nt \sin g - 0''.00548\, nt \cos g$$
$$- 0.00006\, nt \cos 2g$$

$$\nu = -0''.00001\, nt$$
$$-0''.00006\, nt \cos g - 0.00274\, nt \sin g$$
$$- 0.00006\, nt \sin 2g$$

$$\frac{u}{\cos i} = - 0''.00007\, nt$$
$$-0''.00027\, nt \sin g + 0.00093\, nt \cos g$$
$$+ 0.00002\, nt \cos 2g$$

## §. 10. Störungen des Jupiters durch den Mars.

### 119.

Die angewandten Marselemente sind die folgenden:

Mars.

$$m' = \frac{1}{3200900}$$
$$n' = 689050''.83$$
$$e' = 0.093213$$
$$\pi' = 332^0\ 22'\ 41''.2$$
$$i' = 1\ \ 51\ \ 3.5$$
$$\theta' = 48\ \ 0\ \ 33.4$$
$$\log a' = 0.18290$$

und hieraus ergab sich zuerst

$$J = 1^0\ 25'\ 58''.3$$
$$\Phi = 84^0\ 36'\ 22'', \qquad \Psi = 135^0\ \ 0'\ 35''$$
$$\Pi = 188\ \ 5\ \ 31, \qquad \Pi' = 149\ \ 21\ \ 33$$
$$\mu = -\ 5.3067$$
$$2\mu = -10.6134$$
$$3\mu = -15.9201$$
etc.

### 120.

Mit dem Werthe

$$\log \alpha' = 9.46666$$

bekam ich in der Bedeutung des Art. 19

$$(0)A'_0 = 0.02254, \quad (1)A'_0 = 0.04743, \quad (2)A'_0 = 0.05736$$
$$(0)A'_1 = 0.00498, \quad (1)A'_1 = 0.01551, \quad (2)A'_1 = 0.03405$$
$$(0)A'_2 = 0.03338, \quad (1)A'_2 = 0.06934, \quad (2)A'_2 = 0.08032$$
$$(3)A'_0 = 0.0335, \quad (4)A'_0 = 0.0558, \quad (0)B'_0 = 0.0651$$
$$(3)A'_1 = 0.0474, \quad (4)A'_1 = 0.0477, \quad (0)B'_1 = 0.1523$$
$$(3)A'_2 = 0.0370, \quad (4)A'_2 = 0.0594, \quad (0)B'_2 = 0.0551$$
$$(1)B'_0 = 0.1494, \quad (2)B'_0 = 0.237, \quad (0)C'_0 = 0.147$$
$$(1)B'_1 = 0.2059, \quad (2)B'_1 = 0.191,$$
$$(1)B'_2 = 0.1284, \quad (2)B'_2 = 0.211, \quad (0)C'_2 = 0.045$$

wo die Zusatzglieder, die im Art. 20 erklärt wurden, schon berücksichtigt sind.

Durch die Verwandelungsformeln des Art. 19 ergaben sich hieraus

| | | |
|---|---|---|
| $\alpha(0)A_0 = 0.02254$ , | $\alpha(1)A_0 = -0.06997$ , | $\alpha(2)A_0 = 0.29216$ |
| $\alpha(0)A_1 = 0.00498$ , | $\alpha(1)A_1 = -0.02049$ , | $\alpha(2)A_1 = 0.10605$ |
| $\alpha(0)A_2 = 0.03338$ , | $\alpha(1)A_2 = -0.10272$ , | $\alpha(2)A_2 = 0.42444$ |
| $\alpha(3)A_0 = -1.5386$ , | $\alpha(4)A_0 = 9.815$ , | $\alpha(0)B_0 = 0.0651$ |
| $\alpha(3)A_1 = -0.6630$ , | $\alpha(4)A_1 = 4.867$ , | $\alpha(0)B_1 = 0.1523$ |
| $\alpha(3)A_2 = -2.2083$ , | $\alpha(4)A_2 = 13.893$ , | $\alpha(0)B_2 = 0.0551$ |
| $\alpha(1)B_0 = -0.3446$ , | $\alpha(2)B_0 = 2.213$ , | $\alpha(0)C_0 = 0.147$ |
| $\alpha(1)B_1 = -0.6626$ , | $\alpha(2)B_1 = 3.665$ , | |
| $\alpha(1)B_2 = -0.2937$ , | $\alpha(2)B_2 = 1.900$ , | $\alpha(0)C_2 = 0.045$ |

## 121.

Indem wir nun fortfahren werden, das in den Artt. 21 und 22 erklärte Verfahren anzuwenden, dem die vorstehenden Vorbereitungen entsprechen, rechnen wir zuerst die Ausdrücke des Art. 21 für $n\delta z$ und $\nu$, die gemeiniglich in diesem Falle die grössten Glieder geben. Da in Secunden ausgedrückt hier

$$\log m' = 8.8092$$

ist, so geben diese Formeln, wenn nur die grössten Glieder derselben berücksichtigt werden,

$$n\delta z = -0''019 \sin(g-g'+\Pi-\Pi')$$
$$\nu = +0''022 + 0''019 \cos(g-g'+\Pi+\Pi')$$

und der Werth von $u$ ist ganz unmerklich. Diese sind die grössten periodischen Glieder, die der Mars in der Bewegung des Jupiters hervorbringt, und wir haben uns daher im Folgenden nur an die Säcularänderungen zu halten.

## 122.

Um Nichts zu übergehen, werde ich wieder alle im Vorhergehenden entwickelten Glieder angeben, obgleich der Erfolg zeigt, dass diejenigen, welche der dritten Ordnung angehören, hätten weg-

gelassen werden können. Ich werde die Form derselben anwenden, die im Art. 68 angegeben ist, und bekomme demzufolge

| | |
|---|---|
| [1] = (7.9916 , | [6'] = 9.3985 |
| [2] = 9.3544 , | [7] = 8.4794 |
| [3] = (8.9288 , | [8] = 9.0023 |
| [4] = 8.9298 , | [9] = (8.4177 |
| [5] = (7.5505 , | [10] = 8.0925) |
| [6] = 8.9453 ; | [11] = 8.7309) |

woraus

$$K = -0''.000021\,, \qquad L = -0''.000022$$

folgen. Mit blosser Rücksichtnahme auf die Glieder niedrigster Ordnung geben die Ausdrücke des Art. 52

$$M = +0''.000002\,, \qquad N = -0''.000012$$

und wir erhalten also schliesslich:

$$n\delta z = -0''.000021\, nt \sin g \;-0''.000022\, nt \cos g$$
$$\nu = +0.000011\, nt \cos g \;-0.000011\, nt \sin g$$
$$\frac{u}{\cos i} = +0.000002\, nt \sin g \;-0.000012\, nt \cos g$$

---

## §. 11. Störungen des Jupiters durch die Erde, die Venus und den Merkur.

### 123.

Die angewandten Elemente sind

| | Erde | Venus | Merkur |
|---|---|---|---|
| $m'$ | $= \frac{1}{354936}$ | $= \frac{1}{408134}$ | $= \frac{1}{3000000}$ |
| $n'$ | $= 1295977''.44$ | $= 2106641''.42$ | $= 5381016''.3$ |
| $e'$ | $= 0.016792$ | $= 0.006870$ | $= 0.2056$ |
| $\pi'$ | $= 99°30'21''$ | $= 128°46'\ 1''$ | $= 74°20'38''$ |
| $i'$ | | $= 3\ 23\ 32.6$ | $= 7\ 0\ 4.6$ |
| $\theta'$ | | $= 74\ 52\ 28$ | $= 45\ 57\ 37$ |
| $\log a'$ | $= 0$ | $= 9.85934$ | $= 9.58783$ |

woraus man

| | | |
|---|---|---|
| $J = 1°18'51''.6$ | $= 2°14'58''.8$ | $= 6°17'13''.8$ |
| $\Phi = 0$ | $= 142\ 57\ 24$ | $= 118\ 2\ 1$ |
| $\Psi$ | $= 166\ 29\ 46$ | $= 170\ 26\ 20$ |
| $\Pi = 272\ 41\ 53$ | $= 129\ 44\ 29$ | $= 154\ 39\ 52$ |
| $\Pi' = 1\ 4\ 36$ | $= 247\ 23\ 48$ | $= 217\ 56\ 41$ |

erhält.

## 124.

Da die Wirkung der jetzt in Betracht zu ziehenden Planeten auf den Jupiter so geringe ist, so sollen nur die Glieder niedrigster Ordnung berücksichtigt werden.

### Erde.

Mit dem Werthe

$$\log \alpha' = 9.28376$$

fand sich

$(0)A'_0 = 0.00943$, $(1)A'_0 = 0.01927$, $(2)A'_0 = 0.0209$
$(0)A'_1 = 0.00136$, $(1)A'_1 = 0.00415$, $(2)A'_1 = 0.0086$
$(0)A'_2 = 0.01407$, $(1)A'_2 = 0.02859$, $(2)A'_2 = 0.0304$

$(3)A'_0 = 0.0052$, $(0)B'_0 = 0.0169$, $(1)B'_0 = 0.0359$
$(3)A'_1 = 0.0100$, $(0)B'_1 = 0.0595$, $(1)B'_1 = 0.0680$
$(3)A'_2 = 0.0058$

und hieraus

$\alpha(0)A_0 = 0.00943$, $\alpha(1)A_0 = -0.02870$, $\alpha(2)A_0 = 0.1169$
$\alpha(0)A_1 = 0.00136$, $\alpha(1)A_1 = -0.00551$, $\alpha(2)A_1 = 0.0279$
$\alpha(0)A_2 = 0.00415$, $\alpha(1)A_2 = -0.04266$, $\alpha(2)A_2 = 0.1729$

$\alpha(3)A_0 = -0.5968$, $\alpha(0)B_0 = 0.0169$, $\alpha(1)B_0 = -0.0866$
$\alpha(3)A_1 = -0.1703$, $\alpha(0)B_1 = 0.0595$, $\alpha(1)B_1 = -0.2165$
$\alpha(3)A_2 = -0.8784$

## 125.

Berechnet man wieder zuerst die grössten periodischen Glieder nach den Ausdrücken des Art. 21, so findet man

$$n\delta z = -0''112 \sin(g-g'+\Pi-\Pi')$$
$$\nu = +0''194 + 0''112 \cos(g-g'+\Pi-\Pi')$$
$$\frac{u}{\cos i} = -0''003 \sin(g'+\Pi')$$

und alle übrigen periodischen Glieder sind ganz unmerklich. Man erhält ferner

$$K = +0''00014\,, \qquad L = -0''00167$$
$$M = +0.00040\,, \qquad N = +0.00002$$

also

$$n\delta z = +0''00014\,nt\sin g - 0''00167\,nt\cos g - 0.00002\,nt\cos 2g$$
$$\nu = -0''00007\,nt\cos g - 0''00084\,nt\sin g - 0.00002\,nt\sin 2g$$
$$\frac{u}{\cos i} = +0''00040\,nt\sin g + 0''00002\,nt\cos g$$

## 126.

### Venus.

Mit dem Werthe

$$\log\alpha' = 9.14310$$

fand sich

$(0)A'_0 = 0.00488$, $(1)A'_0 = 0.00988$, $(2)A'_0 = 0.01032$
$(0)A'_1 = 0.00051$, $(1)A'_1 = 0.00154$, $(2)A'_1 = 0.00315$
$(3)A'_0 = 0.0014$
$(3)A'_1 = 0.0036$, $(0)B'_1 = 0.03008$

und hieraus

$\alpha(0)A_0 = 0.00488$, $\alpha(1)A_0 = -0.01476$, $\alpha(2)A_0 = 0.05960$
$\alpha(0)A_1 = 0.00051$, $\alpha(1)A_1 = -0.00205$, $\alpha(2)A_1 = 0.01033$
$\alpha(3)A_0 = -0.3014$
$\alpha(3)A_1 = -0.0628$, $\alpha(0)B_1 = 0.03008$

## 127.

Die Ausdrücke des Art. 21 geben hier

$$n\delta z = -0''070 \sin(g-g'+\Pi-\Pi')$$
$$\nu = +0''168 + 0''070 \cos(g-g'+\Pi-\Pi')$$
$$\frac{u}{\cos i} = -0''003 \sin(g'+\Pi')$$

und man erhält ferner

$$K = +0''.00002\,, \qquad L = -0''.00074$$
$$M = -0.00023\,, \qquad N = -0.00019$$

folglich

$$n\delta z = +0''.00002\,nt\sin g - 0''.00074\,nt\cos g$$
$$- 0.00001\,nt\cos 2g$$
$$\nu = -0''.00001\,nt\cos g - 0''.00037\,nt\sin g$$
$$- 0.00001\,nt\sin 2g$$
$$\frac{u}{\cos i} = \qquad + 0''.00001\,nt$$
$$- 0''.00023\,nt\sin g - 0.00019\,nt\cos g$$

## 128.

### Merkur.

Mit dem Werthe

$$\log\alpha' = 8.87159$$

fand sich

$$(0)A'_0 = 0.001388\,, \qquad (1)A'_0 = 0.002786\,, \qquad (2)A'_0 = 0.002821$$
$$(0)A'_1 = 0.000077\,, \qquad (1)A'_1 = 0.000233\,, \qquad (2)A'_1 = 0.000469$$
$$(0)B'_1 = 0.008391$$

und hieraus

$$\alpha(0)A_0 = 0.001388\,, \qquad \alpha(1)A_0 = -0.004174\,, \qquad \alpha(2)A_0 = 0.01674$$
$$\alpha(1)A_1 = 0.000077\,, \qquad \alpha(1)A_1 = -0.000310\,, \qquad \alpha(2)A_1 = 0.00156$$
$$\alpha(0)B_1 = 0.008391$$

## 129.

Die Ausdrücke des Art. 21 geben

$$n\delta z = -0''.005\sin(g-g'+\Pi-\Pi')$$
$$\nu = +0''.023 + 0''.005\cos(g-g'+\Pi-\Pi')$$

und man erhält ferner

$$K = +0''.00001\,, \qquad L = -0''.00002$$
$$M = -0.00001\,, \qquad N = -0.00003$$

also

$$n\delta z = +0''00001\, nt \sin g - 0''00002\, nt \cos g$$
$$\nu = -0.00001\, nt \cos g - 0.00001\, nt \sin g$$
$$\frac{u}{\cos i} = -0.00001\, nt \sin g - 0.00003\, nt \cos g$$

### 130.

Bei der Zusammenstellung der im Vorhergehenden berechneten Jupiterstörungen brauchen wir die periodischen Glieder nicht wieder anzuführen; denn da diese alle von verschiedenen Argumenten abhängen, so ist eine Zusammenziehung derselben nicht möglich, es wäre denn, dass man je zwei Glieder in Eines zusammenzöge, was jedoch unwesentlich ist. Die Säcularänderungen aber, oder die mit $nt$ multiplicirten Glieder hängen alle von denselben Argumenten ab, und können also wesentlich zusammengezogen werden.

Da hier die vom Saturn bewirkten Glieder der Länge und des Radius Vectors nicht berechnet worden sind, so entnehme ich sie aus meiner mehrmals angezogenen Preisschrift*), und reducire sie auf die hier angewandte Saturnmasse. A. a. O. S. 76 findet man

$$K = +1''01786, \qquad L = -1''13539$$
$$\text{Red.} = +0.00351, \qquad\quad = -0.00391$$

wobei aber zu bemerken ist, dass die Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf die Massen, von welchen sich voraussetzen lässt, dass sie nicht unmerklich sein werden, aus dem Grunde fehlen, weil ihre Berechnung noch nicht beendigt ist. Wir erhalten nun

| | | |
|---|---|---|
| $K = +0''00001$, | $L = -0''00002$ | .... Merkur |
| $+0.00002$, | $-0.00074$ | .... Venus |
| $+0.00014$, | $-0.00167$ | .... Erde |
| $-0.00021$, | $-0.00022$ | .... Mars |
| $+1.02137$, | $-1.13930$ | .... Saturn |
| $+0.00227$, | $-0.02181$ | ... Uranus |
| $+0.00011$, | $-0.00548$ | .... Neptun |
| $K = +1''02371$, | $L = -1''16924$ | |

und mit der eben angeführten Beschränkung:

*) Untersuchung über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns. Berlin 1831.

$$n\delta z = +1''02371\,nt\sin g - 1''16928\,nt\cos g$$
$$+0.01232\,nt\sin 2g - 0.01407\,nt\cos 2g$$
$$+0.00030\,nt\sin 3g - 0.00034\,nt\sin 3g$$

$$\nu = -0''01232\,nt$$
$$-0.51186\,nt\cos g - 0''58462\,nt\sin g$$
$$-0.01232\,nt\cos 2g - 0.01407\,nt\sin 2g$$
$$-0.00045\,nt\cos 3g - 0.00051\,nt\sin 3g$$

Für die Breitenstörungen des Jupiters erhalten wir aus dem Vorhergehenden

| | | |
|---|---|---|
| $M = -0''00001$, | $N = -0''00003$ | .... Merkur |
| $-0.00023$, | $-0.00019$ | .... Venus |
| $+0.00040$, | $+0.00002$ | .... Erde |
| $+0.00002$, | $-0.00012$ | .... Mars |
| $-0.28329$, | $+0.12829$ | .... Saturn |
| $+0.00193$, | $-0.00093$ | .... Uranus |
| $-0.00027$, | $+0.00093$ | .... Neptun |
| $M = -0''28145$, | $N = +0''12797$ | |

wobei zu bemerken ist, dass die vom Saturn herrührenden Glieder auch wohl durch die Betrachtung der Störungen zweiter Ordnung in Bezug auf die Massen merkliche Zusätze bekommen werden, die aber erst später untersucht werden können. Aus den vorstehenden Werthen folgt:

$$\frac{u}{\cos i} = -0''00924\,nt$$
$$-0''28145\,nt\sin g + 0.12797\,nt\cos g$$
$$-0''00678\,nt\sin 2g + 0.00308\,nt\cos 2g$$
$$-0.00024\,nt\sin 3g + 0.00011\,nt\cos 3g$$

## §. 12. Berechnung des Theils der mit $t^2$ multiplicirten Glieder der Jupiterstörungen, welcher von den Aenderungen der Coordinaten des Jupiters abhängt.

131.

Die im vor. Art. erhaltenen Gesammtwerthe von $K$ und $L$ sind gerade diejenigen, die in den folgenden Rechnungen angewandt werden müssen, wenn in den daraus hervorgehenden Werthen der mit $t^2$ multiplicirten Glieder blos die von der zweiten Ordnung in Bezug auf die Massen aufgenommen werden sollen. Freilich ist es etwas genauer, die Glieder dritter Ordnung mit aufzunehmen, die aus den in $K$ und $L$ enthaltenen Gliedern zweiter Ordnung entstehen, aber da diese, wie oben bemerkt wurde, gegenwärtig noch nicht fertig berechnet worden sind, so müssen wir uns jedenfalls mit den genannten Werthen von $K$ und $L$ begnügen.

132.

Es sind nun zuerst, um die Glieder zu erhalten, die in § 6, $\alpha$) entwickelt worden sind, durch die Ausdrücke des Art. 68 die $A$, $B$, $C$, etc. für jeden störenden Planeten besonders zu berechnen, und in Theilen des Kreisradius auszudrücken. Um die Anzahl von Nullen linker Hand zu vermindern, sollen sie ausserdem mit $(100)^2$ multiplicirt werden, wodurch bewirkt wird, dass in den Endresultaten die Einheit von $t$ hundert Julianische Jahre beträgt. Es fanden sich

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $A =$ | $+ 0.0001$, | $B =$ | $0.0000$ | .... Neptun |
| | $+ 0.0003$, | | $0.0000$ | .... Uranus |
| | $+ 0.0075$, | | $- 0.0245$ | .... Saturn |
| | $0.0000$, | | $0.0000$ | .... Mars |
| | $+ 0.0001$, | | $0.0000$ | .... Erde |
| | $+ 0.0001$, | | $0.0000$ | .... Venus |
| | $0.0000$, | | $0.0000$ | .... Merkur |
| $A =$ | $+ 0.0081$, | $B =$ | $- 0.0245$ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $C =$ | $0.0000$, | $D = +0.0010$ | .... Neptun |
| | $0.0000$, | $+0.0042$ | .... Uranus |
| | $+0.0033$, | $+0.3460$ | .... Saturn |
| | $0.0000$, | $+0.0001$ | .... Mars |
| | $0.0000$, | $+0.0004$ | .... Erde |
| | $0.0000$, | $+0.0002$ | .... Venus |
| | $0.0000$, | $0.0000$ | .... Merkur |
| $C =$ | $+0.0033$, | $D = +0.3519$ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $E =$ | $-0.0010$, | $F = 0.0000$ | .... Neptun |
| | $-0.0042$, | $0.0000$ | .... Uranus |
| | $-0.3411$, | $-0.0021$ | .... Saturn |
| | $-0.0001$, | $0.0000$ | .... Mars |
| | $-0.0004$, | $0.0000$ | .... Erde |
| | $-0.0002$, | $0.0000$ | .... Venus |
| | $0.0000$, | $0.0000$ | .... Merkur |
| $E =$ | $-0.3470$, | $F = -0.0021$ | |

| | | |
|---|---|---|
| $G =$ | $+0.0001$ | .... Uranus |
| | $+0.0041$ | .... Saturn |
| $G =$ | $+0.0042$ | |

während die Wirkung der übrigen Planeten völlig unmerklich ist.

## 133.

Aus dem Vorstehenden fand sich

$$AK + BL = +0''.0369\,, \qquad CK + DL = -0''.4079$$
$$EK + FL = -0.3527\,, \qquad GL = -0.0049$$
$$K^2 = +0.0508\,, \qquad KL = -0.0580$$
$$L^2 = +0.0663$$

und hiermit geben die Ausdrücke des Art. 67

$$\begin{aligned} n\delta z = \quad & \qquad\qquad\qquad\qquad + 0''.0369\, n^2t^2 \\ & - 0''.4101\, n^2t^2 \sin g - 0.3534\, n^2t^2 \cos g \\ & - 0.0097\, n^2t^2 \sin 2g - 0.0405\, n^2t^2 \cos 2g \\ & - 0.0003\, n^2t^2 \sin 3g - 0.0015\, n^2t^2 \cos 3g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu = & + 0''.0195\, n^2 t^2 \\ & + 0.2065\, n^2 t^2 \cos g \quad - 0''.1763\, n^2 t^2 \sin g \\ & + 0.0069\, n^2 t^2 \cos 2g - 0.0188\, n^2 t^2 \sin 2g \\ & + 0.0003\, n^2 t^2 \cos 3g - 0.0012\, n^2 t^2 \sin 3g \end{aligned}$$

welches die Werthe der im § 6, $\alpha$) entwickelten Glieder sind.

134.

Wenden wir uns jetzt zum § 6, $\beta$) so geben die Ausdrücke des Art. 74

$$A = -0.0052\,,\qquad B = +0.0002\,,\qquad C = -0.0016$$
$$D = +0.0006\,,\qquad F = +0.0135\,,\qquad G = +0.0063$$

die vom Saturn bewirkt sind, während die übrigen Planeten hier nichts Merkliches geben. Hieraus

$$AK - BL = -0''.0050\,,\qquad CK - DL = -0''.0010$$
$$FK = +0.0109\,,\qquad GK = +0.0064$$
$$GL = -0.0073\,,\qquad FL = -0.0156$$

und schliesslich

$$\begin{aligned} \frac{u}{\cos i} = & \qquad\qquad\qquad\qquad + 0''.0047\, n^2 t^2 \\ & - 0''.0026\, n^2 t^2 \sin g \quad - 0.0002\, n^2 t^2 \cos g \\ & - 0.0019\, n^2 t^2 \sin 2g + 0.0110\, n^2 t^2 \cos 2g \\ & - 0.0001\, n^2 t^2 \sin 3g + 0.0007\, n^2 t^2 \cos 3g \end{aligned}$$

135.

Zu den unter § 6, $\gamma$) entwickelten Gliedern übergehend, sind zuerst die $T$ und $U$ zu berechnen, wozu ich die letzten Ausdrücke des Art. 86 anwenden werde, da im Vorhergehenden schon alle $M$ und $N$ berechnet worden sind. Es ergeben sich

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $T =$ | $+ 0''.0010$, | $U =$ | $0''.0000$ | .... Neptun |
| | 0.0021, | | 0 | .... Uranus |
| | 0.3114, | $=$ | $- 0.0034$ | .... Saturn |
| | 0.0001, | | 0 | .... Mars |
| | 0.0004, | | 0 | .... Erde |
| | 0.0003, | | 0 | .... Venus |
| | 0, | | 0 | .... Merkur |
| $T =$ | $0''.3153$, | $U =$ | $- 0''.0034$ | |

## 136.

Nach Art. 79 fand sich ferner

$$C = -0.0012, \qquad D = +0.0073 \ldots\ldots \text{Saturn}$$

während die übrigen Planeten nichts Merkliches geben. Hiemit werden

$$n\delta z = -0''0004\, n^2t^2 \sin g + 0''0023\, n^2t^2 \cos g$$
$$\nu = +0.0002\, n^2t^2 \cos g + 0.0012\, n^2t^2 \sin g$$

## 137.

Schliesslich geben die unter § 6, $\delta$) enthaltenen Entwickelungen zuerst (Art. 86)

| | | |
|---|---|---|
| $C = -0.0014$, | $D = -0.0004$ | .... Neptun |
| $+0.0018$, | $+0.0038$ | .... Uranus |
| $-0.1508$, | $-0.3192$ | .... Saturn |
| $+0.0001$, | $0$ | .... Mars |
| $0$, | $+0.0004$ | .... Erde |
| $+0.0001$, | $-0.0001$ | .... Venus |
| $0$, | $0$ | .... Merkur |
| $C = -0.1502$, | $D = -0.3155$ | |

| | | |
|---|---|---|
| $E = -0.0004$, | $F = +0.0014$ | .... Neptun |
| $+0.0038$, | $-0.0018$ | .... Uranus |
| $-0.3135$, | $+0.1452$ | .... Saturn |
| $0$, | $-0.0001$ | .... Mars |
| $+0.0004$, | $0$ | .... Erde |
| $-0.0001$, | $-0.0001$ | .... Venus |
| $0$, | $0$ | .... Merkur |
| $E = -0.3098$, | $F = +0.1446$ | |

woraus

$$\begin{aligned}\frac{u}{\cos i} = & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 0''0071\, n^2t^2 \\ & -0''0464\, n^2t^2 \sin g \;-0.0982\, n^2t^2 \cos g \\ & -0.0011\, n^2t^2 \sin 2g - 0.0024\, n^2t^2 \cos 2g \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - 0.0001\, n^2t^2 \cos 3g\end{aligned}$$

folgt. Die mit $\sin i$ multiplicirten Glieder des Art. 86 geben im gegenwärtigen Falle kaum 0''0001, weshalb sie zu übergehen sind.

138.

Addirt man jetzt die Einzelresultate, die im Vorhergehenden erhalten worden sind, so werden die vollständigen, von den Aenderungen der Coordinaten des Jupiters herrührenden, und mit $t^2$ multiplicirten Glieder in der Bewegung des Jupiters

$$\begin{aligned} n\delta z = & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 0''.0369\, n^2 t^2 \\ & - 0''.4105\, n^2 t^2 \sin g \;\; - 0.3511\, n^2 t^2 \cos g \\ & - 0.0097\, n^2 t^2 \sin 2g - 0.0105\, n^2 t^2 \cos 2g \\ & - 0.0003\, n^2 t^2 \sin 3g - 0.0015\, n^2 t^2 \cos 3g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu = & + 0''.0195\, n^2 t^2 \\ & + 0.2067\, n^2 t^2 \cos g \;\; - 0''.1751\, n^2 t^2 \sin g \\ & + 0.0069\, n^2 t^2 \cos 2g - 0.0188\, n^2 t^2 \sin 2g \\ & + 0.0003\, n^2 t^2 \cos 3g - 0.0012\, n^2 t^2 \sin 3g \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{u}{\cos i} = & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 0''.0118\, n^2 t^2 \\ & - 0''.0490\, n^2 t^2 \sin g \;\; - 0.0984\, n^2 t^2 \cos g \\ & - 0.0030\, n^2 t^2 \sin 2g + 0.0086\, n^2 t^2 \cos 2g \\ & - 0.0001\, n^2 t^2 \sin 3g + 0.0006\, n^2 t^2 \cos 3g \end{aligned}$$

---

## §. 13. Berechnung derjenigen Säcularänderungen der übrigen Planeten, die erforderlich sind, um den Theil der mit $t^2$ multiplicirten Jupiterstörungen zu erhalten, welcher von den Aenderungen der Coordinaten der störenden Planeten herrührt.

139.

Um die in der Ueberschrift genannten Glieder der Jupiterstörungen erhalten zu können, müssen erst die Säcularänderungen aller einwirkenden Planeten, oder vielmehr die im Vorhergehenden mit $K'$, $L'$, $T'$, $U'$ bezeichneten Grössen für jeden dieser Planeten berechnet werden. Ich werde nun diese nicht blos anführen, sondern auch einige der dazu erforderlichen Hülfsgrössen angeben.

## 140.

### Neptun vom Uranus gestört.

Da hier die Glieder dritter Ordnung mit aufgenommen werden müssen, so sind die folgenden Vorbereitungen zu treffen.

$$J = 1^{0}\ 30'\ 8''.4$$

$$\Pi = 247^{0}\ 38'\ 3'', \qquad \Pi' = 12^{0}\ 14'\ 22''$$

$\alpha(0)A_0 = 1.1349$, $\alpha(1)A_0 = -1.4994$, $\alpha(2)A_0 = 4.6446$
$\alpha(0)A_1 = 0.3858$, $\alpha(1)A_1 = -0.9569$, $\alpha(2)A_1 = 3.9214$
$\alpha(0)A_2 = 0.1888$, $\alpha(1)A_2 = -0.6682$, $\alpha(2)A_2 = 3.3598$

$\alpha(3)A_0 = -24.84$, $\alpha(4)A_0 = 197.35$
$\alpha(3)A_1 = -23.70$, $\alpha(4)A_1 = 197.06$
$\alpha(3)A_2 = -22.70$, $\alpha(4)A_2 = 198.92$

$\alpha(0)B_0 = 1.3692$, $\alpha(1)B_0 = -10.02$, $\alpha(2)B_0 = 94.61$
$\alpha(0)B_1 = 1.6458$, $\alpha(1)B_1 = -10.91$, $\alpha(2)B_1 = 98.00$
$\alpha(0)B_2 = 1.2359$, $\alpha(1)B_2 = -\ \ 9.25$, $\alpha(2)B_2 = 89.06$

$\alpha(0)C_0 = 6.43$
$\alpha(0)C_2 = 5.31$

Es ist hierbei auf das zweite Glied der Störungsfunction keine Rücksicht genommen worden, da bekannt ist, dass dasselbe zu den Säcularänderungen Nichts beitragen kann. Die obigen Data gaben mir

$$K' = +\,0''.48322, \qquad L' = -\,0''.47397$$
$$T' = 0.2186, \qquad U' = -\,0.0022$$

## 141.

### Neptun vom Saturn gestört.

$$J = 0^{0}\ 56'\ 56''.3$$

$$\Pi = 144^{0}\ 23'\ 42'', \qquad \Pi' = 191^{0}\ 17'\ 53''$$

$\alpha(0)A_0 = 1.02672$, $\alpha(1)A_0 = -1.08345$, $\alpha(2)A_0 = 2.35134$
$\alpha(0)A_1 = 0.16508$, $\alpha(1)A_1 = -0.34385$, $\alpha(2)A_1 = 1.09007$
$\alpha(0)A_2 = 0.03947$, $\alpha(1)A_2 = -0.12205$, $\alpha(2)A_2 = 0.50746$

$\alpha(3)A_0 = -\ 7.869$, $\alpha(4)A_0 = 36.037$
$\alpha(3)A_1 = -4.678$, $\alpha(4)A_1 = 25.481$
$\alpha(3)A_2 = -2.661$, $\alpha(4)A_2 = 16.900$

$$\alpha(0)B_0 = 0.0850\,, \quad \alpha(1)B_0 = -0.4553\,, \quad \alpha(2)B_0 = 2.962$$
$$\alpha(0)B_1 = 0.1844\,, \quad \alpha(1)B_1 = -0.8155\,, \quad \alpha(2)B_1 = 4.595$$
$$\alpha(0)B_2 = 0.0722\,, \quad \alpha(1)B_2 = -0.3896\,, \quad \alpha(2)B_2 = 2.555$$
$$\alpha(0)C_0 = 0.189$$
$$\alpha(0)C_2 = 0.066$$

womit

$$K' = +0''.1750\,, \qquad L' = +0''.0710$$
$$T' = 0.0900\,, \qquad U' = -0.0005$$

erhalten wurden.

## 142.

### Neptun durch Jupiter gestört.

Da die Grössen dritter Ordnung im vorhergehenden Falle nur höchst Unbedeutendes gegeben haben, so können sie im gegenwärtigen ganz übergangen werden. Aus dem Art. 115 bekommt man

$$J' = 0^0\,56'\,32''.6\,, \qquad \Pi - \Pi' = 31^0\,6'\,37''$$

und da in Folge der vorstehenden Bemerkung jetzt die $A_i$ und $B_i$ des Art. 116 ohne Weiteres angewandt werden dürfen:

$$\alpha(1)A_0 = 0.01551\,, \quad \alpha(2)A_0 = 0.01659$$
$$\alpha(0)A_1 = 0.00099\,, \quad \alpha(1)A_1 = 0.00301\,, \quad \alpha(2)A_1 = 0.00622$$
$$\alpha(0)B_1 = 0.04759$$

Hiermit ergeben sich

$$K' = -0''.0501\,, \qquad L' = +0''.0037$$
$$T' = 0.0769\,, \qquad U' = 0$$

Die übrigen Planeten können auf den Neptun keine merkliche Wirkung äussern.

## 143.

Die Addition der im Vorhergehenden erhaltenen Einzelnwerthe giebt für den

Neptun

$$K' = +0''.6081\,, \qquad L' = -0''.3993$$
$$T' = 0.3855\,, \qquad U' = -0.0027$$

oder wenn man mit dem Werthe von $n'$ für den Neptun multiplicirt:

$$n'K' = +0''.02318, \qquad n'L' = -0''.01523$$
$$n'T' = 0.01470, \qquad n'U' = -0.00010$$

### 144.

Gehen wir zum Uranus über.

Uranus vom Neptun gestört.

Es ergeben sich hier

$$J = 1^0\, 30'\, 8''.4$$

$$\Pi = 192^0\, 14'\, 22'', \qquad \Pi' = 67^0\, 38'\, 3''$$

$(0)A_0 = 1.1349$, $(1)A_0 = 0.3645$, $(2)A_0 = 0.9166$
$(0)A_1 = 0.3858$, $(1)A_1 = 0.5711$, $(2)A_1 = 0.8649$
$(0)A_2 = 0.1888$, $(1)A_2 = 0.4794$, $(2)A_2 = 1.0645$

$(3)A_0 = 3.220$, $(4)A_0 = 17.590$
$(3)A_1 = 3.316$, $(4)A_1 = 17.616$
$(3)A_2 = 3.357$, $(4)A_2 = 18.007$

$(0)B_0 = 1.3692$, $(1)B_0 = 5.9111$, $(2)B_0 = 30.886$
$(0)B_1 = 1.6458$, $(1)B_1 = 5.9714$, $(2)B_1 = 30.476$
$(0)B_2 = 1.2359$, $(1)B_2 = 5.5412$, $(2)B_2 = 29.895$

$(0)C_0 = 6.427$
$(0)C_2 = 5.310$

und hiermit

$$K' = -0''.07717, \qquad L' = -0''.75885$$
$$T' = 0.19788, \qquad U' = -0.00200$$

### 145.

Uranus vom Saturn gestört.

$$J = 1^0\, 57'\, 7''.2$$

$$\Pi = 220^0\, 29'\, 18'', \qquad \Pi' = 142^0\, 46'\, 24''$$

$\alpha(0)A_0 = 1.07224$, $\alpha(1)A_0 = -1.24210$, $\alpha(2)A_0 = 3.11784$
$\alpha(0)A_1 = 0.27604$, $\alpha(1)A_1 = -0.61762$, $\alpha(2)A_1 = 2.16795$
$\alpha(0)A_2 = 0.10418$, $\alpha(1)A_2 = -0.34019$, $\alpha(2)A_2 = 1.52240$

$\alpha(3)A_0 = -12.678$, $\alpha(4)A_0 = 73.590$
$\alpha(3)A_1 = -10.640$, $\alpha(4)A_1 = 68.508$
$\alpha(3)A_2 = -8.780$, $\alpha(4)A_2 = 62.817$

$\alpha(0)B_0 = 0.43546$, $\alpha(1)B_0 = -2.6441$, $\alpha(2)B_0 = 19.983$
$\alpha(0)B_1 = 0.63365$, $\alpha(1)B_1 = -3.3238$, $\alpha(2)B_1 = 22.875$
$\alpha(0)B_2 = 0.3806$, $\alpha(1)B_2 = -2.3486$, $\alpha(2)B_2 = 18.041$

$\alpha(0)C_0 = 1.205$
$\alpha(0)C_2 = 0.782$

$K' = -1''.23737$, $L' = -1''.49815$
$T = 0.65090$, $U' = +0.00753$

## 146.

### Uranus vom Jupiter gestört.

$J = 0^\circ\, 41'\, 55''.0$

$\Pi = 220^\circ\, 1'\, 50''$, $\Pi' = 64^\circ\, 18'\, 39''$

$\alpha(0)A_0 = 1.01919$, $\alpha(1)A_0 = -1.05926$, $\alpha(2)A_0 = 2.24586$
$\alpha(0)A_1 = 0.13953$, $\alpha(1)A_1 = -0.28729$, $\alpha(2)A_1 = 0.89640$
$\alpha(0)A_2 = 0.02847$, $\alpha(1)A_2 = -0.08728$, $\alpha(2)A_2 = 0.35886$

$\alpha(3)A_0 = -7.285$, $\alpha(4)A_0 = 32.122$
$\alpha(3)A_1 = -3.769$, $\alpha(4)A_1 = 20.018$
$\alpha(3)A_2 = -1.856$, $\alpha(4)A_2 = 11.587$

$\alpha(0)B_0 = 0.0506$, $\alpha(1)B_0 = -0.2657$, $\alpha(2)B_0 = 1.689$
$\alpha(0)B_1 = 0.12734$, $\alpha(1)B_1 = -0.5473$, $\alpha(2)B_1 = 2.983$
$\alpha(0)B_2 = 0.0428$, $\alpha(1)B_2 = -0.2259$, $\alpha(2)B_2 = 1.444$

$\alpha(0)C_0 = 0.117$
$\alpha(0)C_2 = 0.032$

$K' = -0''.16818$, $L' = -1''.55762$
$T = 0.15553$, $U' = -0.00130$

## 147.

### Uranus vom Mars gestört.

Hier brauchen wieder nur die Glieder erster Ordnung aufgenommen zu werden.

$$J = 1^{\circ}\ 11'\ 42'', \qquad \Pi - \Pi' = 194^{\circ}\ 28'$$

$$\alpha(1)A_0 = 0.00317, \qquad \alpha(2)A_0 = 0.00322$$
$$\alpha(0)A_1 = 0.03981, \qquad \alpha(1)A_1 = 0.04000, \qquad \alpha(2)A_1 = 0.00057$$
$$\alpha(0)B_1 = 0.009577$$

$$K' = 0''.00000, \qquad L' = -0''.00004$$
$$T' = 0.00001, \qquad U' = 0$$

## 148.

### Uranus von der Erde gestört.

$$J = 0^{\circ}\ 46'\ 28''.4, \qquad \Pi - \Pi' = 67^{\circ}\ 20'$$

$$\alpha(1)A_0 = 0.00136, \qquad \alpha(2)A_0 = 0.0137$$
$$\alpha(0)A_1 = 0.02610, \qquad \alpha(1)A_1 = 0.02615, \qquad \alpha(2)A_1 = 0.00016$$
$$\alpha(0)B_1 = 0.00410$$

$$K' = 0''.00000, \qquad L' = -0''.00011$$
$$T' = 0.00002, \qquad U' = 0$$

## 149.

### Uranus von der Venus gestört.

$$J = 2^{\circ}\ 37'\ 6''$$

$$\alpha(1)A_0 = 0.000712, \qquad \alpha(2)A_0 = 0.000714, \qquad \alpha(0)B_1 = 0.002138$$

$$K' = 0''.00000, \qquad L' = -0''.00005$$
$$T' = 0.00002, \qquad U' = 0$$

## 150.

Die Addition aller Einzelwerthe giebt für den

Uranus

$$K' = -1''.48272, \qquad L' = -3''.81482$$
$$T' = 1.00436, \qquad U' = +0.00423$$

und nach der Multiplication mit dem Werthe von $n'$ für den Uranus:

$$n'K' = -0''.11088, \qquad n'L' = -0''.28528$$
$$n'T' = 0.07511, \qquad n'U' = +0.00032$$

## 151.

Gehen wir zum Saturn über.

### Saturn vom Neptun gestört.

Die Glieder erster Ordnung reichen aus.

$J = 0^0\ 56'\ 56''.4$, $\Pi - \Pi' = 46^0\ 54'.2$

| | | |
|---|---|---|
| | $(1)A_0 = 0.05673$, | $(2)A_0 = 0.07097$ |
| $(0)A_1 = 0.16508$, | $(1)A_1 = 0.17876$, | $(2)A_1 = 0.04485$ |
| | $(0)B_1 = 0.1844$ | |

$K' = -0''.00203$, $L' = -0''.04502$

$T' = 0.00693$, $U' = 0$

## 152.

### Saturn vom Uranus gestört.

$J = 1^0\ 57'\ 7''.0$

$\Pi = 322^0\ 46'\ 24''$, $\Pi' = 40^0\ 29'\ 17''$

| | | |
|---|---|---|
| $(0)A_0 = 1.07224$, | $(1)A_0 = 0.16986$, | $(2)A_0 = 0.29394$ |
| $(0)A_1 = 0.27604$, | $(1)A_1 = 0.34159$, | $(2)A_1 = 0.24953$ |
| $(0)A_2 = 0.10418$, | $(1)A_2 = 0.23601$, | $(2)A_2 = 0.37000$ |
| $(3)A_0 = 0.541$, | $(4)A_0 = 1.724$ | |
| $(3)A_1 = 0.589$, | $(4)A_1 = 1.700$ | |
| $(3)A_2 = 0.577$, | $(4)A_2 = 1.795$ | |
| $(0)B_0 = 0.43546$, | $(1)B_0 = 1.3377$, | $(2)B_0 = 4.056$ |
| $(0)B_1 = 0.63365$, | $(1)B_1 = 1.4229$, | $(2)B_1 = 3.888$ |
| $(0)B_2 = 0.3806$, | $(1)B_2 = 1.2066$, | $(2)B_2 = 3.819$ |
| $(0)C_0 = 1.205$ | | |
| $(0)C_2 = 0.782$ | | |

$K' = +0''.08675$, $L' = -0''.15948$

$T' = 0.05537$, $U' = +0.00072$

## 153.

### Saturn vom Jupiter gestört.

Die betreffenden Grössen habe ich aus meiner oft angezogenen Preisschrift entnommen, und dabei, um in das Resultat keine Glieder

dritter Ordnung in Bezug auf die Massen hineinzubringen, mich blos an die Glieder erster Ordnung in Bezug auf die Massen gehalten. S. 73 u. f. dieser Schrift findet man, nachdem die Angaben auf die hier angewandte Jupitermasse reducirt worden sind:

$$K' = -5''34012, \qquad L' = -8''63296$$
$$T' = 1.90452, \qquad U' = -0.02450$$

letztere weil der Coefficient des ersten Gliedes im dortigen $p'$ mit $T'$ und der des dortigen $q'$ mit $-U'$ identisch ist, wie man leicht findet.

## 154.

### Saturn vom Mars gestört.

Hier reicht man wieder mit den Gliedern erster Ordnung aus.

$$J = 2^0\, 21'.8, \qquad \Pi - \Pi' = 116^0\, 43'$$

$$\alpha(1)A_0 = 0.01314, \qquad \alpha(2)A_0 = 0.01391$$
$$\alpha(0)A_1 = 0.08065, \qquad \alpha(1)A_1 = 0.08221, \qquad \alpha(2)A_1 = 0.00484$$
$$\alpha(0)B_1 = 0.04017$$

$$K' = -0''00004, \qquad L' = -0''00017$$
$$T' = 0.00005, \qquad U' = 0$$

## 155.

### Saturn von der Erde gestört.

$$J = 2^0\, 29'.6, \qquad \Pi - \Pi' = -10^0\, 22'$$

$$\alpha(1)A_0 = 0.00556, \qquad \alpha(2)A_0 = 0.00570$$
$$\alpha(0)A_1 = 0.05261, \qquad \alpha(1)A_1 = 0.05306, \qquad \alpha(2)A_1 = 0.00133$$
$$\alpha(0)B_1 = 0.01683,$$

$$K' = 0''00000, \qquad L' = -0''00053$$
$$T' = 0.00021, \qquad U' = 0$$

## 156.

### Saturn von der Venus gestört.

$$J = 2^0\,3'\!.3\,, \qquad \Pi - \Pi' = -39^0\,40'$$

$$\alpha(1)A_0 = 0.00290\,, \qquad \alpha(2)A_0 = 0.00293$$
$$\alpha(0)A_1 = 0.03802\,, \qquad \alpha(1)A_1 = 0.03816\,, \qquad \alpha(2)A_1 = 0.00050$$
$$\alpha(0)B_1 = 0.00872$$

$$K' = 0''\!.00000\,, \qquad L' = -0''\!.00025$$
$$T' = 0.00008\,, \qquad U' = 0$$

Der Merkur braucht seiner geringen Einwirkung wegen hier nicht berücksichtigt zu werden.

## 157.

Die Addition der Einzelresultate giebt für den

Saturn

$$K' = -5''\!.25544\,, \qquad L' = -8''\!.83841$$
$$T' = 1.96716\,, \qquad U' = -0.02378$$

und nachdem mit dem Werthe von $n'$ für den Saturn multiplicirt worden ist:

$$n'K' = -1''\!.12098\,, \qquad n'L' = -1''\!.88523$$
$$n'T' = 0.41959\,, \qquad n'U' = -0.00507$$

## 158.

Da die übrigen Planeten nur höchst Unbedeutendes dem Resultat hinzufügen können, so habe ich sie auf einfachere Art behandelt. Die $K'$ und $L'$ habe ich aus den Tafeln entnommen, und durch die Ausdrücke

$$n'K' = 2\,\delta e'\,(1 + \tfrac{5}{8}e'^2)$$
$$n'L' = -2e'\delta\pi'\,(1 + \tfrac{3}{8}e'^2)$$

berechnet. Da die $T'$ und $U'$ nur aus den einzelnen Theilen, aus welchen $\delta i'$ und $\delta\theta'$ bestehen, berechnet werden können, so habe ich sie unabhängig von den Tafeln berechnet, aber nur auf das Glied erster Ordnung in $T'$ Rücksicht genommen. Die $U'$ werden demzufolge Null. Ich erhielt

Mars.

$n'K' = +0''.374$, $n'L' = -2''.947$, $n'T' = 0''.495$

Erde.

$n'K' = -0''.171$, $n'L' = -0''.382$, $n'T' = 0''.494$

Venus.

$n'K' = -0''.223$, $n'L' = +0''.010$, $n'T' = 0''.599$

Merkur.

$n'K' = +0''.082$, $n'L' = -2''.168$, $n'T' = 0''.516$

---

## §. 14. Berechnung des Theils der mit $t^2$ multiplicirten Jupiterstörungen, welcher von den Aenderungen der Coordinaten der störenden Planeten abhängt.

159.

Die unter § 6, $\varepsilon$) entwickelten Glieder geben

$n'(A'K' + B'L') = +0''.0034$ .... vom Saturn

$n'(C'K' + D'L') = -0.0004$ .... vom Uranus
$-0.1566$ .... vom Saturn
$+0''.0001$ .... vom Mars
Summe $= -0''.1569$

$n'(E'K' + F'L') = 0''.0000$ .... vom Uranus
$-0.4662$ .... vom Saturn
$+0.0001$ .... vom Mars
Summe $= -0''.4661$

Ferner erhält man für die unter § 6, $\zeta$) entwickelten Glieder:

$n'(A'K' - B'L') = -0''.0017$ .... vom Saturn
$n'(C'K' - D'L') = +0.0049$ .... vom Saturn

während alle übrigen Planeten nichts Merkliches liefern. Die unter § 6, $\eta$) entwickelten Glieder werden alle unmerklich. Endlich geben die unter § 6, $\theta$) entwickelten Glieder

$$
\begin{aligned}
n'(C'T' + D'U') &= -0''0001 \;\ldots\; \text{vom Uranus} \\
&\phantom{=}\; +0.0615 \;\ldots\; \text{vom Saturn} \\
&\phantom{=}\;\;\; 0.0000 \;\ldots\; \text{von der Erde} \\
&\phantom{=}\; -0.0001 \;\ldots\; \text{von der Venus} \\
\text{Summe} &= +0''0613
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n'(E'T' + F'U') &= -0''0003 \;\ldots\; \text{vom Uranus} \\
&\phantom{=}\; +0.1323 \;\ldots\; \text{vom Saturn} \\
&\phantom{=}\; -0.0002 \;\ldots\; \text{von der Erde} \\
&\phantom{=}\; +0.0001 \;\ldots\; \text{von der Venus} \\
\text{Summe} &= +0''1319
\end{aligned}
$$

Die Summen aller dieser Glieder ergeben

$$
\begin{aligned}
n\delta z = &\qquad\qquad\qquad\quad + 0''0034\, n t^2 \\
& - 0''1569\, n t^2 \sin g - 0''4661\, n t^2 \cos g \\
& - \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nu = & + 0''0785\, n t^2 \cos g - 0''2331\, n t^2 \sin g \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{u}{\cos i} = & + 0''0596\, n t^2 \sin g + 0''1368\, n t^2 \cos g \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

## 160.

Multiplicirt man nun die eben erhaltenen Glieder mit $n$, und dehnt sie auf die Vielfachen von $g$ aus; multiplicirt man ferner die im Art. 138 zusammengestellten Glieder mit $n^2$, und addirt beide Producte, so erhält man das Endresultat

$$
\begin{aligned}
n\delta z = &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 0''0122\left(\frac{t}{100}\right)^2 \\
& - 0''1983\left(\frac{t}{100}\right)^2 \sin g - 0.3454\left(\frac{t}{100}\right)^2 \cos g \\
& - 0.0037\left(\frac{t}{100}\right)^2 \sin 2g - 0.0144\left(\frac{t}{100}\right)^2 \cos 2g \\
& - 0.0001\left(\frac{t}{100}\right)^2 \sin 3g - 0.0005\left(\frac{t}{100}\right)^2 \cos 3g
\end{aligned}
$$

$$\nu = +0''.0065\left(\frac{t}{100}\right)^2$$
$$+0.0996\left(\frac{t}{100}\right)^2\cos g \quad -0''.1726\left(\frac{t}{100}\right)^2\sin g$$
$$+0.0029\left(\frac{t}{100}\right)^2\cos 2g \quad -0.0083\left(\frac{t}{100}\right)^2\sin 2g$$
$$+0.0001\left(\frac{t}{100}\right)^2\cos 3g \quad -0.0004\left(\frac{t}{100}\right)^2\sin 3g$$

$$\frac{u}{\cos i} = \qquad -0''.0019\left(\frac{t}{100}\right)^2$$
$$+0''.0179\left(\frac{t}{100}\right)^2\sin g \quad +0.0448\left(\frac{t}{100}\right)^2\cos g$$
$$+0.0041\left(\frac{t}{100}\right)^2\cos 2g$$
$$+0.0003\left(\frac{t}{100}\right)^2\cos 3g$$

---

# Nachschrift.

Die vorstehende Abhandlung ist von ihrem am 28. März 1874 verstorbenen Verfasser bereits längere Zeit vor seinem Ableben niedergeschrieben worden, doch wünschte er dieselbe erst nach Hinzufügung gewisser Ergänzungen zu veröffentlichen. Da der Tod die Ausführung dieser Absicht vereitelt hat, so hat man geglaubt, die hinterlassene Abhandlung, obschon sie nicht ihrem definitiven Ziele entgegenführt worden ist, in unveränderter Gestalt publiciren zu sollen. Vor Allem wird man den Mangel eines einleitenden Vorworts aus dem Umstande zu erklären haben, dass der Verfasser nicht die letzte Hand an die Redaction seiner Arbeit legen konnte. Im Uebrigen sollten die beabsichtigten Ergänzungen hauptsächlich den zweiten Theil der Abhandlung betreffen, welcher von § 7 an die Anwendung der im ersten Theile gegebenen theoretischen Entwickelungen auf die numerische Berechnung der Jupiterstörungen enthält.

Die in der Abhandlung gelehrte Methode bezieht sich überhaupt auf diejenigen Fälle, in denen man die planetaren Störungen mit aller wünschenswerthen Genauigkeit erhält, indem man nur die ersten Glieder ihrer analytischen Entwickelung berücksichtigt. Zu diesen Fällen gehören die Störungen des Jupiter, mit Ausschluss der durch den Saturn bewirkten Störungen der Länge und des Radiusvectors. Für die Berechnung der letzteren hat der Ver-

fasser in seinen früheren Arbeiten die erforderlichen Vorschriften gegeben, und einen grossen Theil der numerischen Rechnungen in seiner von der Berliner Akademie gekrönten Preisschrift aus dem Jahre 1830 ausgeführt. Es ist jedoch der Theil der Rechnung, welcher die Glieder höherer Ordnung in Bezug auf die Massen betrifft, nicht vollendet worden, so dass von den durch den Saturn bewirkten Jupiterstörungen zur Zeit der Abfassung der gegenwärtigen Abhandlung nur der Betrag der Glieder erster Ordnung bekannt war. Wie im Art. 130 angeführt, ist jedoch zur vollständigen Berechnung der Säcularänderungen, sowohl in Bezug auf die Länge und den Radiusvector, als in Bezug auf die Breite, die Kenntniss der Störungen zweiter Ordnung in Bezug auf die Massen erforderlich, so dass die a. a. Orte berechneten, der Zeit $t$ proportionalen Störungsglieder in $n\delta z$ $\nu$ und $u$ nicht als die vollständigen Werthe dieser Säcularänderungen angesehen werden können. Aehnliches gilt, wie im Art. 131 ausdrücklich hervorgehoben, von den in $n^2t^2$ multiplicirten Gliedern, welche von den Aenderungen der Coordinaten des Jupiters abhängen. Endlich ist Art. 153 darauf hingewiesen, dass auch die Glieder höherer Ordnung in den Säcularänderungen des Saturn durch den Jupiter von Einfluss werden können auf die in $nn't^2$ multiplicirten Glieder der Jupiterstörungen, welche von den Aenderungen der Coordinaten des störenden Planeten abhängen. Infolge dieser Einflüsse werden auch die in den Artt. 138 und 159 entwickelten und Art. 160 zusammengezogenen Störungsglieder noch Modificationen zu erleiden haben.

Da der Verfasser definitive Resultate zu publiciren wünschte, und Hr. von Glasenapp sich unter seiner Leitung mit der vollständigen Berechnung der Störungen der Länge und des Radiusvectors des Jupiter durch den Saturn nach den dafür geeigneten Methoden beschäftigte, so sollte das Ergebniss dieser Berechnung abgewartet werden, um auf Grund desselben die oben berührten Ergänzungen vorzunehmen. Hr. v. Glasenapp, der die Resultate seiner Rechnungen dem Verfasser noch kurze Zeit vor dessen Ableben mittheilen konnte, beabsichtigt sich auch der Ausführung dieser ergänzenden Rechnungen zu unterziehen, so dass gegründete Aussicht vorhanden ist, bald in den Besitz der vollständigen, nach Hansen's Methoden berechneten Jupiterstörungen zu gelangen. Es ist hier der Ort zu erwähnen, dass von Art. 109 an die sämmtlichen in den §§. 8—14 enthaltenen numerischen Rechnungen, zu deren Revision der Verfasser keine Zeit gefunden, unter den Augen des Letzteren von Hrn. v. Glasenapp mit grosser Sorgfalt revidirt und wo nöthig emendirt worden sind.

Die Thätigkeit des Unterzeichneten hat sich darauf beschränken müssen den Druck des Manuscripts zu überwachen, und nach Möglichkeit auf die Beseitigung von Schreib- und Druckfehlern bedacht zu sein. Er kann nicht erwarten, dass ihm bei der grossen Menge von Formeln und Zahlen diess allenthalben gelungen sei, doch darf er versichern, dass er in seinen auf die Herstellung eines möglichst fehlerfreien Druckes gerichteten Bemühungen seitens der Breitkopf-Härtel'schen Druckerei die bereitwilligste Unterstützung gefunden hat. Zu nachträglichen Berichtigungen haben ihm bloss zwei Stellen Anlass gegeben:

S. 307 und 308 ist statt $\Upsilon$ der lateinische Buchstabe $Y$ gedruckt;

S. 472 und 473 scheint bei den aus §. 6, $\zeta$, entspringenden Gliedern in $\frac{u}{\cos i}$ der Factor $\frac{1}{2}$ weggefallen zu sein. Unter dieser Voraussetzung erhält man, wenn zugleich die von der Excentricität abhängigen Glieder ergänzt werden:

$$\begin{array}{rrr} n\delta z = & & +\,0''0034\,n\,t^2 \\ & -\,0''1569\,n\,t^2\sin g & -\,0.4661\,n\,t^2\cos g \\ & -\,0.0019\,n\,t^2\sin 2g & -\,0.0056\,n\,t^2\cos 2g \\ & & -\,0.0001\,n\,t^2\cos 3g \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} \nu = & +\,0''0019\,n\,t^2 & \\ & +\,0.0785\,n\,t^2\cos g & -\,0''2331\,n\,t^2\sin g \\ & +\,0.0019\,n\,t^2\cos 2g & -\,0.0056\,n\,t^2\sin 2g \\ & +\,0.0001\,n\,t^2\cos 3g & -\,0.0002\,n\,t^2\sin 3g \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} \frac{u}{\cos i} = & & -\,0''0097\,n\,t^2 \\ & +\,0''0604\,n\,t^2\sin g & +\,0.1344\,n^2t^2\cos g \\ & +\,0.0015\,n\,t^2\sin 2g & +\,0.0032\,n\,t^2\cos 2g \\ & +\,0.0001\,n\,t^2\sin 3g & +\,0.0001\,n\,t^2\cos 3g \end{array}$$

Durch Zusammenziehung dieser Ausdrücke mit den im Art. 138 entwickelten Gliedern, und nach Einführung des numerischen Werthes von $n$, gehen die Endresultate des Art. 160 hervor, in denen die auf die Breite bezüglichen Glieder jetzt folgende Werthe annehmen:

$$\begin{array}{rrr} \frac{u}{\cos i} = & & -\,0''0018\left(\frac{t}{100}\right)^2 \\ & +\,0''0183\left(\frac{t}{100}\right)^2\sin g & +\,0.0436\left(\frac{t}{100}\right)^2\cos g \\ & & +\,0.0041\left(\frac{t}{100}\right)^2\cos 2g \\ & & +\,0.0002\left(\frac{t}{100}\right)^2\cos 3g \end{array}$$

Juni 1875.

W. Scheibner.

# Inhaltsübersicht.

# ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN.

## ZWÖLFTE ABHANDLUNG.

## ÜBER DIE THERMOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES GYPSES, DES DIOPSIDS, DES ORTHOKLASES, DES ALBITS UND DES PERIKLINS.

VON

**W. G. HANKEL**

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

---

Des XI. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº V.

MIT VIER TAFELN.

---

**LEIPZIG**

BEI S. HIRZEL.

1875.

Vom Verfasser übergeben den 8. Juli 1875.
Der Abdruck vollendet den 20. August 1875.

# ELEKTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

VON

**W. G. HANKEL.**

**ZWÖLFTE ABHANDLUNG.**

## ÜBER DIE THERMOELEKTRISCHEN EIGENSCHAFTEN DES GYPSES, DES DIOPSIDS, DES ORTHOKLASES, DES ALBITS UND DES PERIKLINS.

---

**MIT VIER TAFELN.**

In der 8., 9. und 10. Abhandlung*) habe ich die thermoelektrischen Eigenschaften des Topases, des Schwerspathes und des Aragonites, also dreier Mineralien, deren Krystalle dem rhombischen Systeme angehören, und keinen Hemimorphismus zeigen, näher dargelegt; in der 11.**) wurden sodann die Untersuchungen über diese Vorgänge an vier sogenannten einaxigen Substanzen, nämlich an zwei in hexagonalen oder rhomboedrischen Gestalten krystallisirenden, dem Kalkspathe und dem Beryll, und an zwei in den Formen des tetragonalen Systemes auftretenden, dem Idokrase (Vesuvian) und dem Apophyllite (Ichthyophthalm) mitgetheilt. In der vorliegenden Abhandlung gehe ich nun zur Darlegung der thermoelektrischen Erscheinungen an solchen Mineralien über, deren Krystalle den schiefaxigen Systemen, und zwar sowohl dem monoklinoedrischen als auch dem triklinoedrischen angehören, und werde in derselben die Krystalle des Gypses, des Diopsids, des Orthoklases, des Albits und des Periklins behandeln.

Das Verfahren bei der Untersuchung des elektrischen Verhaltens der genannten Krystalle ist im Allgemeinen dasselbe, welches ich in meinen früheren Abhandlungen***) über die thermoelektrischen Eigenschaften des Bergkrystalles und des Topases beschrieben habe.

Auf den der vorliegenden Abhandlung beigefügten Tafeln finden sich diejenigen Krystalle, deren elektrisches Verhalten speciell angegeben werden sollte, entweder in ihren Netzen oder in bestimmten

---

*) Diese Abhandlungen Bd. XIV. S. 357; Bd. XV. S. 271; Bd. XV. S. 343.

**) Ebend. Bd. XVIII. S. 201.

***) Diese Abhandl. Bd. XIII. S. 342; Bd. XIV. S. 377.

stets genau bezeichneten Projectionen, und zwar je nach ihrer Grösse entweder in natürlichen oder in verkleinerten Dimensionen*) abgebildet. In diese Zeichnungen sind die während des Erkaltens auf den verschiedenen Punkten der Oberfläche jener Krystalle beobachteten elektrischen Spannungen eingetragen, und ebenso, wie in den vorhergehenden Abhandlungen, der leichteren Uebersicht wegen die positiven und negativen Zonen durch verschiedene Farben, und zwar die positiven durch eine röthliche und die negativen durch eine grünliche kenntlich gemacht worden.

Alle Angaben über die Vertheilung der Elektricität, sowohl im Texte als auch auf den Figurentafeln beziehen sich stets auf den Zustand des Erkaltens; bei steigender Temperatur sind selbstverständlich die Polaritäten die gerade entgegengesetzten.

In Betreff der Temperaturen, bis zu welchen die Krystalle erhitzt wurden, bemerke ich nur noch, dass die Diopside und Feldspäthe gewöhnlich bis 130° oder 140° erhitzt wurden, während bei den Gypskrystallen die Temperatur nicht völlig 100° C erreichte. Die Erwärmung dieser letzteren Krystalle geschah in einem kupfernen Apparate mit doppelten Wänden, deren Zwischenraum mit Wasser ausgefüllt war. Grosse Krystalle mussten 1 bis 2 Stunden einem solchen Wärmegrade ausgesetzt werden, um in allen ihren Theilen nahe dieselbe Temperatur anzunehmen.

Für die gütige Darleihung der zu der nachstehenden Untersuchung geeigneten Krystalle habe ich meinen Herren Collegen Proff. Zirkel und Credner, Herrn Prof. Quenstedt in Tübingen und Herrn Prof. Weissbach in Freiberg, sowie Herrn Chemiker Sachsse in Leipzig meinen verbindlichsten Dank zu sagen.

*) Die Brüche $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{4}$ neben der Abbildung zeigen an, dass die Grösse der betreffenden Krystalle in der Zeichnung auf die Hälfte oder resp. ein Viertel der natürlichen Dimensionen reducirt ist.

# I. Gyps.

Da die Gypskrystalle niemals Andeutungen einer hemimorphen Bildung gezeigt haben, so ist es sehr fraglich, ob, da man früher den Hemimorphismus als unerlässliche Bedingung für das Auftreten der Thermoelektricität betrachtete, überhaupt Jemand bisher den Versuch unternommen hat, elektrische Spannungen infolge von Temperaturänderungen auf ihnen aufzusuchen. Sollte es geschehen sein, so wird das Resultat des Versuches jedenfalls negativ ausgefallen sein, weil die meisten Krystalle dieses Minerales nur eine so schwache Elektricität zeigen, dass solche mit den früheren Beobachtungsmethoden nicht wohl wahrgenommen werden konnte, zumal die relativ stärksten Spannungen an Stellen auftreten, wo man sie im Anschluss an die ehemals geltende Vorstellung über die thermoelektrischen Vorgänge am wenigsten gesucht hätte. Es giebt indess, wie aus den folgenden Mittheilungen erhellen wird, doch auch Gypskrystalle, auf welchen die elektrische Erregung so stark hervortritt, dass die älteren Elektrometer sie wohl noch hätten nachweisen können.

Die Krystalle des Gypses gehören zum monoklinoedrischen Systeme; die Klinodiagonale schneidet die Hauptaxe unter einem Winkel von 80° 36′.

Beschränke ich mich auf die Anführung der Gestalten, welche an den im Nachstehenden untersuchten Krystallen auftreten, so werden die einfachsten unter ihnen begrenzt von den Flächen des verticalen Prismas $\infty P$, dessen klinodiagonale Seitenkante 111° 42′ misst, sowie von dem mit dem klinodiagonalen Hauptschnitte parallelen Flächenpaare $\infty \mathbf{P} \infty$ und den Flächen der negativen Halb-

pyramide P mit einer Polkante von 143° 42′. Dazu treten bei anderen Krystallen noch die Flächen der positiven Halbpyramide P mit einer Polkante von 138° 28′, oder an ihre Stelle die Flächen des positiven Hemidomas $\frac{1}{3}\bar{P}\infty$. Bei noch anderen Krystallen, namentlich bei den Reinhardtsbrunner Zwillingen, bilden nicht die Flächen $\infty P$, sondern die Flächen $\infty\bar{P}2$ das vertikale Prisma, dessen klinodiagonale Seitenkanten auch wohl von kleinen Flächen $\infty\bar{P}\infty$ abgestumpft werden. An Bruchstücken von Zwillingskrystallen, welche von Castellina in Toscana stammen (Nr. 16 u. 17), zeigen sich auch noch die Flächen $\bar{P}\infty$ und $\frac{3}{4}\bar{P}\frac{3}{2}$.

Sehr häufig finden sich Zwillingskrystalle, und zwar nach zwei verschiedenen Gesetzen; als Zwillingsaxe kann nämlich 1) die Hauptaxe und 2) die Normale auf den Flächen des negativen Hemidomas $-\bar{P}\infty$ auftreten.

Die Spaltbarkeit des Gypses ist parallel dem klinodiagonalen Hauptschnitte sehr vollkommen und steht überhaupt in Betreff ihrer Vollkommenheit vielleicht nur der des Glimmers nach. Ausserdem existiren noch zwei Richtungen leichter, wenn auch weniger vollkommener Spaltbarkeit.

Nimmt man ein dünnes Gypsblättchen, dessen Flächen dem klinodiagonalen Hauptschnitte parallel liegen, so lässt sich dasselbe bei geringem Kraftaufwande um eine der Polkante der positiven Halbpyramide P oder der Durchschnittslinie der Fläche $+\bar{P}\infty$ mit dem klinodiagonalen Hauptschnitte parallele Axe biegen und bricht bei stärkerem Druck in einem mit der angegebenen Richtung parallelen faserigen Bruche. Während mehrere Mineralogen hierin eine mit den Flächen $+\bar{P}\infty$ parallele Spaltbarkeit sehen, nimmt Naumann zur Erklärung des faserigen Bruches eine mit den Flächen der positiven Halbpyramide P parallel gehende Spaltbarkeit an: die beiden pyramidalen Spaltungsflächen treten oscillatorisch auf und bilden daher eine scheinbar faserige oder gestreifte Fläche. Diese mit den Flächen $+\bar{P}\infty$ parallel gehenden Spaltungsrisse sind auf den Gypsblättchen gewöhnlich deutlich sichtbar.

Dagegen bricht die Platte, wenn man sie um eine mit der klinodiagonalen Seitenkante des Prismas $\infty P$ parallele Linie zu biegen versucht, kurz ab mit etwas muschligem Bruche, wonach also eine dritte Spaltungsfläche parallel $\infty\bar{P}\infty$ vorhanden ist.

### Elektrisches Verhalten der Gypskrystalle.

Die Vertheilung der Elektricität auf ringsum ausgebildeten einfachen Gypskrystallen ist in ihrem Verhalten sehr constant; ich habe mehr als 50 Gypskrystalle der verschiedensten Fundorte untersucht und keine wesentlichen Abweichungen in derselben gefunden.

Beim Erkalten sind die Flächen ∞P∞ stets negativ, dagegen die Flächen der verticalen Prismen ∞P und ∞P2, sowie die Flächen der negativen Halbpyramide P positiv. Nur greift bisweilen, namentlich wenn die Flächen ∞P∞ keine grosse Ausdehnung besitzen, die denselben entsprechende negative Polarität mehr oder weniger auf die benachbarten Theile der Prismenflächen ∞P und ∞P2 hinüber.

Wenn ein Gypskrystall parallel seinem vollkommensten Durchgange, also parallel mit dem klinodiagonalen Hauptschnitte gespalten wird, so zeigen seine Theile ein analoges elektrisches Verhalten, wie bei den zersprengten Topas-*) und Apophyllitkrystallen.**) Wird parallel der negativen Krystallfläche ∞P∞ eine dünne Platte abgespalten, so ist die innere Spaltungsfläche dieser Platte positiv (vgl. Krystall Nr. 18), während die am grossen Stücke befindliche Spaltungsfläche, welche an der zuvorgenannten angelegen hatte, negativ verbleibt, wenn auch schwächer als die Krystallfläche. Bei tieferem Eindringen der Spaltungsfläche gegen die Mitte hin nimmt diese negative Spannung auf der Durchgangsfläche am grösseren Stücke ab, bis sie bei einer gewissen Tiefe ebenfalls in die positive übergeht. Dann zeigen also beide von einander getrennten Flächen positive Polarität (vgl. Krystall Nr. 18, Fig. 18 M und N, sowie X,*d* und X,*e*).

Auf Flächen, welche senkrecht gegen die Hauptaxe und senkrecht gegen die Orthodiagonale angeschliffen werden, besteht die positive Spannung, welche auf den durch den Schnitt abgetrennten Krystallflächen statt hatte, wenn auch in geänderter Intensität, fort.

Auf den Zwillingskrystallen bleibt die Vertheilung der beiden elektrischen Polaritäten, wie sie für den einfachen Krystall beschrieben wurde, erhalten.

---

*) Diese Abhandl. Bd. XIV. S. 441.

**) Ebend. Bd. XVIII. S. 261.

Während die Art der Vertheilung auf den Gypskrystallen der verschiedenen Fundorte sich nicht ändert, zeigen sich dagegen sehr beträchtliche Unterschiede in der Stärke der elektrischen Erregungen. Am grössten erscheint die elektrische Spannung auf den nach dem oben erwähnten ersten Gesetze gebildeten Zwillingen aus der Mariengrotte bei Reinhardtsbrunn oder Friedrichsrode, an welchen nicht das Prisma $\infty P$, sondern vielmehr das Prisma $\infty \text{P̶} 2$ auftritt. Schwächer, und zwar je nach dem Fundorte in mehr oder minderem Grade ist die elektrische Spannung auf den einfachen Krystallen, welche von den Gestalten $\infty P$, $\infty \text{P̶} \infty$ und $-P$ gebildet werden; noch schwächer wird sie auf den längeren säulenförmigen Krystallen, an welchen ausser den ebengenannten Flächen auch die Flächen der positiven Halbpyramide $+P$ sich finden; und endlich ist sie auf den nach dem zweiten Gesetze gebildeten Zwillingsbruchstücken vom Montmartre äusserst schwach, ja oft unmerklich, während sie wieder auf den gleichgebildeten Zwillingskrystallen von Castellina in Toscana in nicht unbeträchtlicher Stärke sich zeigt.

### A. *Einfache Krystalle.*

#### a. Krystalle von Salzmünde bei Halle.

Krystall Nr. 1. Taf. I Fig. 1.

Der im Allgemeinen gut ausgebildete Krystall Nr. 1 ist eine Combination von $\infty P$, $\infty \text{P̶} \infty$ und $-P$. Fig. 1. Taf. I stellt die beiden seitlichen Projectionen in halber natürlicher Grösse dar. Auf sämmtlichen Flächen sind die Spuren einer Bildung durch successive sich auflegende Blättchen sichtbar geblieben. Die Flächen $\infty P$ erscheinen stark gestreift und die Flächen $-P$ verlaufen sehr unregelmässig. Auf den beiden Flächen $\infty \text{P̶} \infty$ finden sich drei bis vier Vertiefungen von rhomboidischer Form.

Die Intensität der elektrischen Erregung ist namentlich auf den Seitenflächen stark.

Krystall Nr. 2. Taf. I. Fig. 2.

Der Krystall Nr. 2, dessen seitliche Projectionen Fig. 2 Taf. I in halber Grösse abgebildet sind, gleicht in seiner Bildung dem vor-

hergehenden. Auf jeder seiner Flächen $\infty \bar{P} \infty$ sitzt ein anderer kleiner Gypskrystall, welcher den grossen durchdringt. Seine elektrische Erregung ist schwächer als die des vorhergehenden.

### b. Krystall von Wehrau in Schlesien.

Krystall Nr. 3. Taf. I. Fig. 3.

Der gleichfalls von den Gestalten $\infty P$, $\infty \bar{P} \infty$ und $-P$ begrenzte Krystall Nr. 3 gehört der Freiberger Sammlung und ist in Fig. 3. Taf. I nur in einer seitlichen Projection*) in halber Grösse dargestellt. Mitten durch ihn hindurch geht in der Richtung $\alpha\,\beta$ eine Art zackiger Naht, wonach es den Anschein hat, als ob in ihr zwei Krystalle zusammengewachsen sind.

### c. Krystalle von Schirmig in Böhmen.

Krystall Nr. 4 u. 5. Taf. I. Fig. 4 u. 5.

Die beiden Krystalle gleichen in ihrer Form den vorhergehenden; Fig. 4. Taf. I stellt eine seitliche Projection des einen Krystalles in halber Grösse, und Fig. 5 die des anderen in natürlicher Grösse dar. Während auf jeder Seite des Krystalles Nr. 4 ein oder zwei andere kleine Gypskrystalle eingewachsen sind, ist der Krystall Nr. 5 ringsum ziemlich gut ausgebildet; die wenigst vollkommene Ausbildung zeigen die Flächen $-P$, welche matt und uneben erscheinen.

### d. Krystall von Oxford.

Krystall Nr. 6. Taf. I. Fig. 6.

Die Fig. 6 der Taf. I stellt die eine seitliche Projection dieses Krystalles in halber Grösse dar.

### e. Krystalle von Schöppenstedt.

Es liegen mir zwei verschiedene Formen von Krystallen dieses Fundortes vor. Die eine Form wird, wie die sämmtlichen vorher-

*) Obwohl ich gewöhnlich mehrere Krystalle desselben Fundortes untersucht habe, wird es doch genügen, nur einen oder höchstens zwei derselben abzubilden, sobald sie in ihrem elektrischen Verhalten übereinstimmen. Ebenso wird es bei der Regelmässigkeit der Vertheilung der Elektricität auf den Gypskrystallen ausreichend sein, die betreffenden Krystalle nur in einer Projection darzustellen, und dazu bald die rechte, bald die linke Seite zu wählen.

gehenden Krystalle, von den Flächen $\infty P$, $\infty \bar{P} \infty$ und $-P$ begrenzt, während bei der zweiten Form an Stelle von $-P$ eine unebene Fläche $\frac{1}{4}\bar{P}\infty'$ auftritt.

Krystall Nr. 7 u. 8. Taf. I. Fig. 7 u. 8.

Die Figg. 7 und 8. Taf. I stellen die seitlichen Projectionen zweier, der ersten zuvor beschriebenen Form angehörigen Krystalle, und zwar Nr. 7 in natürlicher, und Nr. 8 in halber Grösse dar.

Krystall Nr. 9. Taf. I. Fig. 9.

Der Krystall Nr. 9 besitzt die zweite Form; sein oberes Ende wird also von der unebenen Fläche $\frac{1}{4}\bar{P}\infty$ begrenzt, welche in Fig. 9 oberhalb der seitlichen, in halber Grösse dargestellten Projection besonders abgebildet worden. Am untern Ende ist der Krystall sehr unregelmässig verbrochen. Seine elektrische Erregung ist im Allgemeinen nur schwach.

### f. Krystalle unbekannten Fundortes.

Krystall Nr. 10 u. 11. Taf. I. Fig. 10 u. 11.

Die beiden (Fig. 10 u. 11) in einer seitlichen Projection abgebildeten Krystalle enthalten ausser den Flächen $\infty P$, $\infty \bar{P} \infty$ und $-P$, auch noch die Flächen $+P$; die Pyramide P tritt also vollzählig mit allen ihren Flächen auf. Auch bei ihnen zeigen die Flächen $\infty \bar{P} \infty$ negative, und die Flächen $\infty P$ positive Elektricität; dagegen vermochte ich auf den Flächen P nur an dem oberen Ende des Krystalles Nr. 10 eine sehr schwache positive Spannung wahrzunehmen, während das untere Ende desselben, sowie die beiden Enden des Krystalles Nr. 11 unelektrisch erschienen.

## *B. Zwillingskrystalle.*

### a. Zwillingsaxe die Hauptaxe.

Vor ungefähr dreissig Jahren fanden sich in der sogenannten Mariengrotte bei Reinhardtsbrunn oder Friedrichsrode zahlreiche prachtvoll klare Zwillingskrystalle von der angedeuteten Zusammensetzung, und diesem Funde entstammen die hier und am Ende dieses Abschnittes beschriebenen Individuen.

Die Gestalten, welche vorzugsweise an diesen Krystallen auftreten, sind $\infty \breve{P} 2$, $\infty \breve{P} \infty$ und $-P$; bisweilen auch $\infty \bar{P} \infty$. Die vorliegende Zwillingsform erhalten wir nun, wenn wir zwei einfache Krystalle dieser Art in verticaler Richtung, mit den Flächen $-P$ nach vorn und nach oben, hinter einander vor uns aufstellen, und z. B. den hinteren Krystall um seine verticale Hauptaxe um 180° drehen. Wenn nun bei der Verwachsung zweier solcher Krystalle, wie dies wenigstens bei den mir vorliegenden Exemplaren der Fall ist, die Flächen $\infty \breve{P} \infty$ beiderseits in eine Ebene fallen, auf welcher bisweilen keine Spur der Zusammensetzung mehr zu erkennen ist, so entsteht ein scheinbar einfacher Krystall, der an seinem oberen Ende vier gleiche, der Hemipyramide $-P$ entsprechende Flächen (gewissermassen die Flächen einer rhombischen Pyramide) trägt, während an seinem unteren Ende eine von eben diesen Flächen gebildete schwalbenschwanzförmige Einkerbung sich findet. Aber auch in dem Falle, wo auf den Flächen $\infty \breve{P} \infty$ keine Spur der Zusammensetzung mehr sichtbar ist, tritt bei diesen farblosen und sehr durchsichtigen Krystallen die Zusammensetzungsfläche im Innern durch Spiegelung hervor; ebenso weist der mit $+P\infty$ parallele faserige Bruch auf die Zwillingsbildung hin, indem diese Spaltungen beiderseitig bis zur Zusammensetzungsfläche laufen und sich daselbst unter einem Winkel von 132° 28′ schneiden, wobei die concave Seite dieses Winkels gegen das Ende gekehrt ist, an welchem die Flächen $-P$ die hervortretende Pyramide bilden, die convexe also gegen das andere Ende, an welchem die schwalbenschwanzförmige Einkerbung auftritt.

### Krystall Nr. 12. Taf. I Fig. 12.

Der Fig. 12 Taf. I in zwei Projectionen nebst der unteren Begrenzungsfläche (*b*) in halber (linearer) Grösse dargestellte Krystall gehört dem hiesigen mineralogischen Museum. Am unteren Ende ist er durch eine senkrecht gegen die Hauptaxe angeschliffene Fläche (*b*) begrenzt.

Die elektrische Vertheilung auf seiner Oberfläche stimmt mit der auf den einfachen Krystallen beobachteten überein: die künstlich angeschliffene Fläche am unteren Ende, die Flächen $-P$ am oberen ausgebildeten Ende und die Flächen des Prismus $\infty \breve{P} 2$ sind positiv,

die Flächen ∞Ꝑ∞ aber negativ, und es greift dabei die negative Zone der schmäleren Fläche ∞Ꝑ∞ ein wenig auf die benachbarten Theile der unteren Fläche (*b*) hinüber.

### Krystall Nr. 13. Taf. I. Fig. 13.

Der sehr schöne klare Krystall Nr. 13 ist Fig. 13. Taf. I in zwei Projectionen nebst der durch Bruch entstandenen Endfläche am unteren Ende in halber Grösse abgebildet.

### Krystall Nr. 14. Taf. I. Fig. 14.

Der dem hiesigen Museum gehörige Krystall Nr. 14 ist ebenfalls in seinen beiden Projectionen nebst der unteren Begrenzungsfläche (*b*) in halber Grösse abgebildet. Am unteren Ende ist derselbe nach dem mit +Ꝑ∞ parallelen faserigen Durchgange unregelmässig verbrochen. An der einen klinodiagonalen Seitenkante erscheint eine (in der Abbildung besonders dargestellte) schmale Fläche ∞Ꝑ∞. Auf der Seite der schmäleren Fläche ∞Ꝑ∞ breitet sich die negative Elektricität sowohl über die anliegenden Theile der Flächen ∞Ꝑ2, als auch des Bruches (*b*) am unteren Ende aus.

Die elektrische Vertheilung auf zwei sehr grossen, demselben Fundorte entstammenden Krystallen werde ich im nächsten Kapitel, welches über das Verhalten der künstlich durch Zerschneiden oder Zerspalten gebildeten Flächen handelt, specieller darlegen.

## b. Zwillingsaxe die Normale auf dem negativen Hemidoma —Ꝑ∞

### *α*) Zusammensetzungsfläche ∞Ꝑ∞.

Die beiden zu einem Zwillinge verbundenen Individuen haben sich seitlich mit den Flächen ∞Ꝑ∞ an einander gelegt, und durchdringen einander ungefähr zur Hälfte.

### Krystall Nr. 15. Taf. II. Fig. 15.

Der Fig. 15 nur in einer Projection abgebildete Krystall wird begrenzt von den Flächen ∞P. —P und ∞Ꝑ∞, die entweder vollständig oder infolge der Verwachsung nur zum Theil sichtbar sind. Den

Fundort dieses dem hiesigen mineralogischen Museum gehörigen Zwillings vermag ich nicht anzugeben.

Die elektrische Vertheilung auf den einzelnen Flächen ist dieselbe, wie auf den einfachen Krystallen.

$\beta$) Zusammensetzungsfläche —P̶∞.

Es lagen mir nur Bruchstücke von grösseren nach dem angegebenen Gesetze gebildeten Zwillingsmassen vor.

Von den dieser Bildungsweise angehörigen Gypsen des Montmartre stand mir kein mit irgend welchen Krystallflächen versehenes Bruchstück zur Verfügung. Auf den von den Durchgängen gebildeten Flächen liessen sich nur äusserst geringe Spuren einer elektrischen Erregung nachweisen, so dass eine genauere Bestimmung der auf ihnen auftretenden elektrischen Vertheilung nicht möglich war.

Dagegen zeigten nach dem gleichen Gesetze gebildete Gypsmassen von Castellina in Toscana, an denen jedoch ausser den Durchgangsflächen ∞P̶∞ einige Krystallflächen hervortraten, eine nicht unbeträchtliche elektrische Erregung.

Krystall Nr. 16 u. 17. Taf. II. Fig. 16 u. 17.

Die beiden von Castellina in Toscana stammenden und dem hiesigen mineralogischen Museum gehörigen Bruchstücke sind Fig. 16 und 17 in vier Ansichten in halber Grösse gezeichnet worden. Nennen wir A und A′ die obere Seite, so stellen C und C′ die untere, B und B′ die rechte, und D und D′ die linke Seite dar. Die beiden Bruchstücke hatten ursprünglich aufeinander gesessen, und zwar die mit C bezeichnete Durchgangsfläche der Fig. 16 auf der mit A′ bezeichneten Durchgangsfläche der Fig. 17. Die beiden anderen Flächen A (Fig. 16) und C (Fig. 17) sind ebenfalls mit ∞P̶∞ parallele Durchgänge. Von Krystallflächen erscheinen in den Projectionen B, D, B′ und D′ auf den vorderen Theilen $\beta$, $\delta$, $\beta'$, $\delta'$ die Flächen —P, und auf den hinteren $b$, $d$, $b'$ $d'$ die Flächen P̶∞. Die kleinen Flächen bei $\alpha$ (vorn in A) und bei $\alpha'$ (vorn in A′) gehören dem Prisma ∞P an; dagegen dürften die in dem einspringenden Winkel bei $a$ und $a'$ liegenden Flächen der von Hessenberg an den Krystallen vom Kaiserstuhle beobachteten Gestalt $\frac{1}{4}$P̶$\frac{3}{2}$ angehören.

Die Masse der Krystalle ist ausserordentlich rein und durchsichtig.

Die elektrische Vertheilung ist auf beiden Stücken dieselbe. Die obere und die untere mit $\infty \text{P} \infty$ parallele Durchgangsfläche eines jeden Stückes zeigen entgegengesetzte Polaritäten, und folglich auch die zwei Flächen C und A′, welche auf einander gelegen haben. Die elektrischen Vorgänge auf solchen Durchgangsflächen überhaupt werde ich sogleich im Folgenden näher erläutern. Die Intensität der elektrischen Erregung ist namentlich auf den beiden Hörnern nicht unbedeutend. Die in B, D, B′ und D′ gezeichneten Seitenflächen zeigen nur an einzelnen Stellen schwache elektrische Spannungen.

### *C. Elektrisches Verhalten der Durchgangs- und Schnittflächen.*

Da der Gyps eine sehr vollkommene Spaltbarkeit nach $\infty \text{P} \infty$ besitzt und infolge seiner geringen Härte sich leicht mit einer feinen Säge oder einer rotirenden Scheibe zerschneiden lässt, so eignen sich seine Krystalle zu einer speciellen Untersuchung über das Verhalten der Durchgangs- und Schnittflächen, wofern sie eine hinreichend starke elektrische Spannung zeigen. Letzteres ist nun der Fall bei den Krystallen von Reinhardtsbrunn, von welchen oben schon drei beschrieben und in ihrem elektrischen Verhalten dargestellt sind. Ich werde daher im Folgenden noch die Beobachtungen an zwei grossen Krystallen desselben Fundortes, von denen namentlich der eine nach und nach in dreizehn Stücke zerschnitten und zersprengt wurde, mittheilen.

#### Krystall Nr. 18. Taf. I. Fig. 18. A bis X.

Der Krystall Nr. 18 ist in seiner Masse sehr rein; die Figg. 18 A bis X stellen den ganzen Krystall oder einzelne Stücke und Flächen desselben in halber (linearer) Grösse dar. Am oberen Ende zeigt er einen durch die mit $+\text{P}\infty$ parallel gehenden Durchgänge gebildeten einspringenden Winkel, dessen Kante in Fig. 18 C durch die Linie YZ angedeutet ist; beide in ihr zusammenstossende Flächen sind durch den faserigen Bruch stark streifig. Gegen das untere Ende hin war der Krystall ungefähr von der Linie $\epsilon\eta$ abwärts stark nach vorn gekrümmt, wie die Zeichnungen T bis X nachweisen. Infolge

dessen erscheint die Projection A der Vorderseite kürzer als die Projection der Rückseite B, und dies noch um so mehr, als auch die das untere Ende begrenzende künstliche Schnittfläche K nicht senkrecht gegen die Richtung der Hauptaxe stand, sondern ebenfalls nach vorn etwas gehoben war. Diese in Fig. 18 K gezeichnete Schnittfläche hätte eigentlich noch unten an A, wie sie bei der verticalen Stellung der Hauptaxe dort sichtbar wird, angesetzt werden müssen; sie ist jedoch der leichteren Uebersicht wegen fortgelassen worden.

Der Krystall wurde nun zuerst in den Richtungen $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ senkrecht gegen die Hauptaxe durchgeschnitten, und die drei Stücke I, II, und III u. IV, noch ungetrennt, auf ihr elektrisches Verhalten untersucht. Darauf wurde der Schnitt $\varepsilon\eta$ ausgeführt, und die beiden Stücke III und IV einzeln geprüft.

Fig. 18 C stellt die von den faserigen Durchgängen gebildete Begrenzung des oberen Endes, D die durch den Schnitt nach $\alpha\beta$ an dem oberen Stücke I entstandene Schnittfläche dar. E ist die obere Schnittfläche am Stücke II, welche an D angelegen hatte. Die untere Schnittfläche am Stücke II bildet F ab. An ihr hat die obere Schnittfläche G des Stückes III angelegen. H ist die untere Schnittfläche am Stücke III, welche an der oberen Schnittfläche *I* des Stückes IV angelegen hat. Die untere Fläche K am Stücke IV oder am ganzen Krystall ist schon zuvor erwähnt worden.

Darauf wurde das Stück III nach den drei in Fig. 18 G mit kleinen Strichen angegebenen Linien parallel mit $\infty\bar{P}\infty$ in vier Stücke zersprengt. In der Richtung von vorn nach hinten gezählt wird das erste Stück vorn (Fig. 18 L) begrenzt von der Krystallfläche $\infty\bar{P}\infty$ nebst den seitlichen Flächen $\infty\bar{P}2$, und auf der hinteren Seite von der Durchgangsfläche M.*) Das zweite Stück wird vorn begrenzt von der an M angelegen habenden Durchgangsfläche N, und hinten von dem Durchgange O nebst kleinen Theilen der hinteren Flächen $\infty\bar{P}2$. Das dritte Stück wird begrenzt vorn von der Durchgangsfläche P, welche an O angelegen hat, und hinten von dem Durchgange Q nebst Theilen der hinteren Flächen $\infty\bar{P}2$. Das vierte Stück endlich wird vorn begrenzt von dem an Q angelegen haben-

*) Das Zeichen $[\infty\bar{P}\infty]$ bedeutet einen mit der Krystallfläche $\infty\bar{P}\infty$ parallelen Durchgang.

den Durchgange R, und hinten von der kleineren Krystallfläche ∞P∞ nebst den Resten der hinteren Flächen ∞P2. Die Flächen M, O, Q und S sind so gezeichnet, wie sie erscheinen, wenn die Stücke L, N, P und R um die rechten Kanten *mn*, *op*, *qr*, *st* nach vorn geklappt werden.

Ferner wurde das unterste Stück IV nach den auf seiner oberen Fläche *I* angedeuteten Linien parallel mit der Hauptaxe und senkrecht gegen ∞P∞ in drei Theile zerschnitten. W ist die Schnittfläche am rechten grösseren Stücke, V und U sind die Schnittflächen am mittleren Stücke X, und T die Schnittfläche am linken Stücke. Es hatten also die Flächen W und V, und ebenso U und T aneinander gelegen.

Schliesslich wurde das zwischen den Schnittflächen U und V gelegene mittlere schmale Stück X parallel mit dem Hauptdurchgange ∞P∞, wie dies in der Zeichnung U angedeutet ist, in fünf Stücke, *a*, *b*, *c*, *d* und *e* zersprengt. In der Zeichnung X sind diese fünf Stücke nochmals getrennt abgebildet.

Der ursprüngliche Krystall ist also theils parallel mit ∞P∞, theils parallel mit ∞P∞ und theils senkrecht gegen die Hauptaxe zersprengt oder zerschnitten. Die auf den einzelnen Schnitt- und Durchgangsflächen beobachteten elektrischen Spannungen sind in Fig. 18 C bis W auf diesen Flächen aufgetragen worden. Dagegen sind die fünf Stücke *a*, *b*, *c*, *d* und *e*, aus welchen der Streifen X bestand, in Fig. 18 X nur von der Seite der mit ∞P∞ parallelen Schnittfläche U gezeichnet worden; die auf ihren mit ∞P∞ parallelen Seitenflächen (also auf den sie begrenzenden Durchgängen) beobachtete Elektricität habe ich der besseren Uebersichtlichkeit wegen durch einen farbigen Saum an den rechten und linken Seiten ihrer seitlichen Projectionen angedeutet. Bei den vier aus dem Stücke III gebildeten Flächen hätte diese Darstellung nicht ausgereicht, da bei ihnen die elektrische Vertheilung für die ganze Ausdehnung derselben angegeben werden sollte.

Betrachten wir nun zunächst die elektrische Anordnung auf dem ursprünglichen Krystalle, so finden wir dieselbe Vertheilung, wie auf den übrigen Gypskrystallen: die Endflächen C und K sind positiv, ebenso die Flächen ∞P2 (wenigstens zum grössten Theile) mit

wachsender Intensität gegen die klinodiagonalen Kanten hin; die Flächen ∞P∞ dagegen erscheinen negativ, wobei sich diese negative Polarität, namentlich von der schmäleren Fläche ∞P∞, noch über die benachbarten Theile der Flächen ∞P2 ausbreitet.

Die senkrecht gegen die Axe geführten Schnittflächen D, E, F, G, H und I sind positiv; nur erscheint bisweilen, wie dies auch schon bei den Krystallen Nr. 12 und 14 beobachtet worden, neben der schmäleren Fläche ∞P∞ ein negativer Streifen (Fig. 18. E und H).

Die sämmtlichen mit dem orthodiagonalen Hauptschnitte parallel gelegten Schnittflächen T, U, V und W zeigen positive Spannungen, ebenso wie die Flächen ∞P∞ (Krystall Nr. 14), welche ihnen parallel gehen.

Anders verhalten sich nun aber die mit dem Hauptdurchgange, also mit ∞P∞, parallelen Spaltungsflächen.

An dem hintersten Spaltungsstück aus III, welches von den Flächen S und R begrenzt wird, ist auf der hintern Seite S die schmale Fläche ∞P∞ negativ, und zieht auch das anliegende Stück der einen (rechts gezeichneten) Prismenfläche ∞P2 mit in ihr Bereich, während die andere Prismenfläche ∞P2 positiv verbleibt. Im ursprünglichen Krystalle (in Zeichnung B) breitete sich an dieser Stelle gleichfalls die negative Polarität von der Fläche ∞P∞ weiter nach rechts als nach links aus. Die vordere Spaltungsfläche R ist positiv und zwar in sehr beträchtlicher Stärke.

Das in der Richtung nach vorn folgende, von Q und P begrenzte Stück zeigt auf der hinteren Fläche Q, welche an R angelegen hatte, negative, auf der anderen P positive Spannung; dabei ist die positive Spannung auf P schwächer als auf R.

Das dann in der Richtung nach vorn folgende, von O und N begrenzte Stück entwickelt auf der hinteren Fläche O, welche an P angelegen hatte, negative Spannung, und zwar eine geringere als auf Q beobachtet wurde.*) Auf der vorderen Fläche N erscheint wieder

*) Es muss die negative Spannung auf der in S gezeichneten Fläche ∞P∞ auch grösser sein, als auf Q. Wenn ein derartiger Unterschied in den Beobachtungen, wie sie in die Zeichnungen eingetragen sind, nicht hervortritt, sondern Q sogar stärker erscheint als S, so liegt der Grund in dem Umstande, dass die grosse

positive Elektricität und zwar in geringerer Stärke als auf der entsprechenden Fläche P des vorhergehenden Stückes.

Das vorn liegende, bei weitem dickste Stück, welches hinten von der Durchgangsfläche M und vorn von den Krystallflächen ∞P̶∞ und ∞P̶2 (in L) begrenzt wird, zeigt fast auf der ganzen hinteren Fläche M, welche nahe durch die Mitte des Krystalles geht und an der Fläche N angelegen hat, positive Spannung, also dieselbe, welche auch auf N beobachtet wurde. Die vordere Krystallfläche ∞P̶∞ ist negativ, und diese negative Polarität breitet sich, ebenso wie dies bereits an der betreffenden Stelle des ursprünglichen Krystalles der Fall war (Fig. 18 A), über den grössten Theil der benachbarten Flächen ∞P̶2 aus.

In der Richtung der Orthodiagonale verhalten sich also die Spaltungsstücke des Gypses ähnlich wie die Spaltungsstücke des Topases*) und des Apophyllites**) in der Richtung ihrer Hauptaxen. Während aber bei den beiden letztgenannten Mineralien der Hauptdurchgang senkrecht gegen die Hauptaxe steht, hat derselbe beim Gypse eine gegen die Orthodiagonale senkrechte Richtung, und dementsprechend sind auch die elektrischen Polaritäten gerade die entgegengesetzten.

Das Verhalten der obigen Spaltungsstücke des Gypses ist also in der Kürze folgendes: Wird von einem Gypskrystalle ein dünnes Blättchen parallel mit ∞P̶∞ abgesprengt, so zeigen die beiden entstandenen Durchgangsflächen entgegengesetzte Polarität; die Durchgangsfläche am dünnen Stücke ist positiv, die Durchgangsfläche am dicken Stücke verbleibt aber negativ, wenn auch schwächer als die natürliche Krystallfläche. Rückt der Durchgang näher nach der Mitte, so besteht die zuvor angegebene Vertheilung der beiden Elektricitäten fort, dieselben nehmen aber an Intensität ab. Geht endlich der Durchgang, in welchem der Krystall zersprengt wird, durch die

Fläche Q, auch wenn in ihrer Mitte eine etwas schwächere Spannung herrscht, als in der Mitte der kleinen Fläche ∞P̶∞ in S, eben infolge ihrer Grösse, weil alle ihre negativen Theile vertheilend auf den genäherten Platindraht wirken, doch eine stärkere Vertheilungswirkung in demselben giebt, als die viel kleinere Fläche ∞P̶∞ in der Zeichnung S.

*) Diese Abhandl. Bd. XIV. S. 441.

**) Diese Abhandl. Bd. XVIII. S. 261

Mitte des Krystalles oder liegt ihr wenigstens nahe, so erscheinen beide Durchgangsflächen (wie M und N Fig. 18) positiv.

Eben dieser Vorgang ergiebt sich aus der Betrachtung der unter X gezeichneten Stücke *a*, *b*, *c*, *d* und *e*, deren Verhalten nach dem Vorhergehenden keiner weiteren Erläuterung bedarf.

### Krystall Nr. 19. Taf. II. Fig. 19.

Es schien mir nicht unwichtig, noch an einem zweiten Krystalle das Verhalten der senkrecht gegen die Hauptaxe gerichteten Schnittflächen zu untersuchen. Der in Fig. 19. Taf. II nur in $\frac{1}{4}$ seiner Grösse dargestellte Krystall wurde deshalb nach der Linie *ab* durchschnitten. A und B stellen die beiden seitlichen Projectionen, C das obere und D das untere, von den mit $+\text{P}\infty$ parallelen faserigen Durchgängen begrenzte Ende dar; E giebt eine Abbildung der Schnittfläche *ab* am oberen, und F eine Abbildung der Schnittfläche *ab* am unteren Stücke. Der Krystall besitzt die Eigenthümlichkeit, dass nur seine vordere in A sichtbare Hälfte Zwillingsbildung zeigt, während die hintere in B sichtbare Hälfte einfach zu sein scheint.

Auch bei ihm sind die beiden Schnittflächen E und F wesentlich positiv; nur zeigt sich auf E (ebenso wie auf der Fläche D am unteren Ende) auf der Seite der kleineren Fläche $\infty\text{P}\infty$, wie dies auch bei den früheren Krystallen (Nr. 12, Nr. 14, Nr. 18 E und H) beobachtet wurde, ein schmaler negativer Streifen.

---

## II. Diopsid (Augit, Pyroxen).

Unter dem Namen Diopsid begreift man die graulichweissen, grünlichweissen bis lauchgrünen durchsichtigen oder wenigstens stark durchscheinenden Augite. Der Diopsid besteht aus kieselsaurem Kalk und kieselsaurer Magnesia; in den lauchgrünen Varietäten findet sich auch etwas Eisenoxydul.

Die Krystalle des Diopsids (oder Augits) gehören zum monoklinoedrischen Systeme; der schiefe Axenwinkel beträgt 74° 11′. An den im Folgenden beschriebenen Krystallen treten vorzugsweise als einfache Gestalten auf: 0 P (*p*), 2 P (*o*), — P (*u*), ∞ P (*l*), ∞ Ᵽ 3 (*f*), ∞Ᵽ∞ (*k*), ∞Ᵽ∞ (*m*) und Ᵽ∞ (*t*). Fig. *α* Taf. II stellt eine Combination der genannten Gestalten in der gewöhnlichen krystallographischen Projection dar; die betreffenden Flächen sind durch die zuvor in Klammern beigeschriebenen Buchstaben bezeichnet.

Die Diopsidkrystalle erscheinen im Allgemeinen als vierseitige Säulen mit rechtwinkligem Querschnitte, deren Seiten von den Flächen ∞Ᵽ∞ und ∞Ᵽ∞ gebildet werden. In den Zeichnungen der Netze sind die Flächen dieser beiden Gestalten durch die Buchstaben *k* und *m*, sowie durch die untergeschriebenen Zahlen 1, 2, 3 und 4 unterschieden worden. Auf diesen Prismenflächen treten vorzugsweise die elektrischen Zonen auf.

In elektrischer Beziehung begegnen wir nun beim Diopside einer Eigenthümlichkeit, welche uns in ähnlicher Weise schon beim Kalkspathe*)

*) Diese Abhandl. Bd. XVIII. S. 226.

und beim Berylle*) entgegen getreten ist: es zeigen nämlich einige Krystalle gerade die entgegengesetzte Polarität als andere. Beim Kalkspathe hing dieser Gegensatz mit einer Aenderung der äusseren Gestalt zusammen, während es bei den Elbaer Beryllen mir nicht gelungen ist, ein äusseres Merkmal für die eine oder die andere Vertheilung der beiden Elektricitäten aufzufinden. Auch beim Diopside habe ich in der äusseren Gestalt keinen Umstand wahrgenommen, welcher die an einem Krystalle auftretende Vertheilung mit Sicherheit im Voraus erkennen liesse. Darf ich nach dem mir vorliegenden, freilich nur beschränkten Materiale urtheilen, so scheint es, als ob die piemontesischen aus dem Alathale die eine Modification, die tyroler von Schwarzenstein die gerade entgegengesetzte darbieten.

Bei den piemontesischen Diopsiden sind die Flächen $\infty \bar{P} \infty$ (*k*) beim Erkalten positiv, die Flächen $\infty \breve{P} \infty$ (*m*) aber negativ; bei den tyroler Krystallen dagegen zeigen die Flächen $\infty \bar{P} \infty$ (*k*) negative und die Flächen $\infty \breve{P} \infty$ (*m*) positive Spannung.

Ueber die Polarität an den Enden der Hauptaxe wage ich bei dem Mangel ringsum vollkommen ausgebildeter Krystalle keine sichere Angabe aufzustellen. So weit ich die Pyramidenflächen am oberen ausgebildeten Ende untersucht habe, erscheinen sie negativ oder unelektrisch; das untere Ende zeigt, wenn es verbrochen ist, keine deutlich ausgesprochene Polarität. An dem Krystalle (Nr. 1) ist das untere Ende von kleinen Krystallfacetten, welche unten auf der Kante zwischen den Prismenflächen 3 und 4 aufgesetzt sind (wenn auch in unvollkommener Ausbildung) begrenzt, und diese kleinen Flächen besitzen positive Spannung. Es folgt jedoch hieraus nicht, dass an einem ringsum vollkommen ausgebildeten Krystalle das eine Ende der Hauptaxe negativ und das andere positiv sein muss; vielmehr kann das Verhalten bei dem Krystalle Nr. 1 ein analoges sein, wie bei dem sächsischen Topase Nr. 6**), wo das obere vollkommen ausgebildete Ende positiv, das untere mangelhaft ausgewachsene dagegen negativ erscheint, letzteres sich also wie ein ungefähr in der Mitte des Krystalls angeschlagener Durchgang verhält. Bei dem

*) Diese Abhandl. Bd. XVIII. S. 235.

**) Diese Abhandl. Bd. XIV. S. 399.

Krystalle Nr. 2 sind an dem unteren Ende ebenfalls noch einige Krystallflächen sichtbar; dasselbe schien ebenfalls schwach positiv zu sein.

### A. *Krystalle der ersten Art, aus dem Alathale in Piemont.*

Bei diesen Krystallen sind die Flächen ∞P∞ (*k*) positiv, die Flächen ∞P∞ (*m*) negativ.

In die Zeichnungen sind meistens die schmalen Flächen ∞P3 (*f*) mit aufgenommen, dagegen die noch schmäleren Flächen ∞P (*l*) fortgelassen worden.

#### Krystall Nr. 1. Taf. II. Fig. 1.

Der Krystall Nr. 1 ist zum Theil sehr unvollkommen ausgebildet. Fig. 1 Taf. II stellt eine Art Netz desselben, so weit es eben ausführbar ist, oder besser gesagt, die vier Ansichten desselben, von den beiden Enden der Orthodiagonale und der auf dem orthodiagonalen Hauptschnitte errichteten Normalen aus gesehen, dar. Er besteht aus mehreren, vorzugsweise aus sechs (drei längeren und drei kürzeren) mit einander verwachsenen Krystallen, die jedoch nicht sämmtlich mit ihren Hauptaxen vollständig parallel liegen. Das untere Ende des Gesammtkrystalles ist, wie schon früher erwähnt, sehr unvollkommen ausgebildet, und zeigt namentlich zahlreiche kleine Krystallfacetten der Pyramide 2 P (*o*), welche unten auf der zwischen den Flächen 3 und 4 liegenden Kante aufgesetzt sind.

Die graugrünliche und durchscheinende Masse des Krystalles wird nach dem oberen vollkommener ausgebildeten Ende hin dunkler grün und durchsichtig.

#### Krystall Nr. 2. Taf. II. Fig. 2.

Der dem hiesigen mineralogischen Museum gehörige Krystall Nr. 2 trägt an seinem unteren Ende auch noch einzelne Krystallflächen. Die Pyramidenflächen am oberen Ende erscheinen unelektrisch, am untern Ende wird dagegen eine sehr schwache positive Spannung wahrgenommen.

### Krystall Nr. 3. Taf. II. Fig. 3.

Der ebenfalls dem hiesigen Museum gehörige Krystall Nr. 3 ist nur auf zwei Seiten ziemlich frei, dagegen auf den beiden anderen von kleineren unregelmässig angelagerten Diopsidkrystallen bedeckt. Ich bilde in Fig. 3 nur die freien Stellen seiner Oberfläche ab.

### Krystall Nr. 4. Taf. II. Fig. 4.

Der Krystall Nr. 4 besitzt in der Richtung der Orthodiagonale eine grössere Ausdehnung als in der auf dem orthodiagonalen Hauptschnitte senkrechten Richtung; die Flächen *k* sind also beträchtlich breiter als die Flächen *m*. Wenn sich die negative Elektricität von der schmalen Fläche 2 etwas über den linken Rand der Fläche 1 verbreitet, so ist dies durch die geringe Breite der Fläche 2 erklärlich; auffallend bleibt das Uebergreifen der positiven Elektricität der Fläche 3 über die untere Hälfte der Fläche 4.

### Krystall Nr. 5. Taf. II. Fig. 5.

Der Krystall Nr. 5 ist nur auf zwei Seiten frei ausgebildet, während die beiden anderen fast ganz von kleineren, in schiefer Richtung aufgelagerten Diopsidkrystallen bedeckt werden. Ich bilde deshalb in Fig. 5 nur die beiden zuerst erwähnten Seiten ab.

## *B. Krystalle der zweiten Art, von Schwarzenstein in Tyrol.*

Bei den Krystallen dieser zweiten Abtheilung sind die Flächen $\infty\bar{P}\infty$ (*k*) negativ, und die Flächen $\infty\grave{P}\infty$ (*m*) positiv; ihre Masse ist sehr rein und durchsichtig.

### Krystall Nr. 6 und 7. Taf. II. Fig. 6 u. 7.

Die beiden Krystalle Nr. 6 u. 7 gehören der Freiberger Sammlung; die Figg. 6 u. 7 stellen ihre Netze dar. Sie besitzen, wie aus diesen Zeichnungen erhellt, ähnlich wie der Krystall Nr. 4 in der Richtung der Orthodiagonale eine grössere Dicke als in der Richtung senkrecht gegen den orthodiagonalen Hauptschnitt.

Krystall Nr. 8. Taf. II. Fig. 8.

Der sehr durchsichtige Krystall Nr. 8 gehört dem hiesigen mineralogischen Museum; in seiner unteren Hälfte ist er lauchgrün, in der oberen fast farblos. Am unteren Ende ist er verbrochen; am oberen Ende scheint auf der Kante der Flächen 3 und 4 eine mangelhaft (rauh und drusig) ausgebildete Pyramidenfläche 2 P (*o*) zu liegen. Die Flächen 1 und 3 sind durch oscillatorische Combination von $\infty\bar{P}\infty$ und $\infty\bar{P}3$ stark gestreift; die Fläche 4 ist schwächer gestreift, und die Fläche 2 ausgezeichnet glatt.

---

# III. Orthoklas.

Die Krystalle des Orthoklases (Feldspathes im engeren Sinne oder Kalifeldspathes) gehören dem monoklinoedrischen Systeme an. Trotz ihres häufigen und unter sehr verschiedenen Verhältnissen auftretenden Vorkommens ist die Anzahl der an ihnen beobachteten einfachen Gestalten doch nicht so beträchtlich, wie bei manchen anderen Mineralien; dagegen zeigen sie eine grosse Neigung zur Bildung von Zwillingen, Drillingen und Vierlingen.

Ich begnüge mich, diejenigen Formen hier namhaft zu machen, welche an den im Folgenden beschriebenen Krystallen auftreten, und deshalb im Texte erwähnt oder in den Zeichnungen abgebildet werden. Es sind dies:

1. die schiefe Endfläche 0 P (*p*);
2. die Prismen ∞ P (*t*) und ∞P 3 (*z*);
3. die positiven Hemidomen $\frac{2}{3}$P∞ (*q*), P∞ (*x*), $\frac{3}{8}$P∞*) und 2 P∞ (*y*);
4. die beiden mit dem klinodiagonalen und orthodiagonalen Hauptschnitte parallelen Flächen ∞P∞ (*m*) und ∞P∞ (*k*);
5. das Klinodoma 2P∞ (*n*), und
6. die positive Halbpyramide +P (*o*).**)

---

*) Diese mit $\frac{3}{8}$P∞ bezeichnete Fläche findet sich an einigen Elbaer Krystallen. Sie ist parallel mit dem klinodiagonalen Hauptschnitte gestreift, und gestattet deshalb keine genaue Messung.

**) Ausserdem findet sich an einem Adular vom St. Gotthardt die eine Fläche einer sehr stumpfen orthodiagonalen positiven Pyramide P 4, die mit der Fläche P∞ einen Winkel von nahe 173° bildet. Schliesslich findet sich an zwei Elbaer Zwillingskrystallen noch eine Fläche einer ausserordentlich stumpfen orthodiagonalen positiven Pyramide, welche mit P∞ einen Winkel von ungefähr 179° 30′ bildet.

Fig. $\beta$ Taf. II stellt die Combination 0P, $+\bar{P}\infty$ und $\infty P$ in der üblichen krystallographischen Projection dar, während Fig. $\gamma$ Taf. II die eine Hälfte einer etwas zusammengesetzteren Gestalt (ausser den zuvorgenannten Formen noch $\infty\bar{P}\infty$, $2\bar{P}\infty$, P und $2\bar{P}n$) abbildet.

Aus seinen Messungen findet v. Kokscharow*) den schiefen Axenwinkel = 63° 56′ 46″ und das Verhältniss der Hauptaxe a zur Klinodiagonale b und zur Orthodiagonale c

a : b : c = 1 : 1,18570 : 1,80058.

Aus diesen Grundlagen ergeben sich

der stumpfe Winkel des Prismas $\infty P$ = 118° 47′,

der Polkantenwinkel der positiven Halbpyramide $+P$ = 126° 16′,

und der Winkel zwischen einer Fläche

| | |
|---|---|
| von $\bar{P}\infty$ und 0P | = 129° 43′ |
| von $\infty P$ und 0P | = 112° 13′ |
| von $+\bar{P}\infty$ und von $\infty P$ | = 110° 41′ |
| von $\infty\bar{P}\infty$ und von $+\bar{P}\infty$ | = 114° 13′ |
| von $\infty\bar{P}\infty$ und von $+2\bar{P}\infty$ | = 144° 14′. |

Der Orthoklas ist sehr vollkommen und fast gleich gut spaltbar parallel mit der schiefen Basis 0P und mit dem klinodiagonalen Hauptschnitte, also mit den Flächen $\infty\bar{P}\infty$. Diese beiden Durchgänge bilden mit einander einen rechten Winkel, welcher Breithaupt zu dem Namen Orthoklas veranlasste.

Ausserdem fand Hauy noch eine schwächere Spaltbarkeit parallel mit dem einen Flächenpaare des Prismas $\infty P$**), welches er mit dem Buchstaben *T* bezeichnete, während das andere Flächenpaar, mit welchem nach seinen Beobachtungen keine Spaltungsrichtung parallel geht, den Buchstaben *l* erhielt. Nach Breithaupt und anderen Mineralogen existirt aber auch parallel mit den Prismenflächen *l* eine Spaltbarkeit, welche jedoch noch weniger deutlich als die nach *T* ist, öfter aber auch gar nicht wahrgenommen werden kann.

Dieser Unterschied zwischen den beiden Flächenpaaren *T* und *l* weist eigentlich auf ein Zerfallen des Prismas $\infty P$ in zwei ungleich-

*) Materialien zur Mineralogie Russlands, Bd. V. S. 129.

**) Hauy sagt: Celle (la coupe) qui est parallèle à T, se laisse seulement entrevoir par le chatoiment à une vive lumière.

werthige Flächenpaare hin, wie dies im triklinoedrischen Systeme statt hat. Indess besitzen die Flächen *T* und *l* gegen die basische Endfläche 0P eine gleiche Neigung, so dass trotz der nach *T* und *l* verschiedenen Spaltbarkeit der Orthoklas doch als dem monoklinoedrischen Systeme angehörig zu betrachten ist.

Da die Flächenpaare *T* und *l* aus der blossen Stellung des Krystalles sich nicht erkennen lassen, indem beim Verwechseln der beiden Enden der Hauptaxe die Flächen *T* an die Stelle von *l* zu liegen kommen, und da sie auch in thermoelektrischer Beziehung keine wesentlichen Verschiedenheiten darbieten, so habe ich den Unterschied der beiden Flächenpaare *T* und *l* im Folgenden nicht weiter berücksichtigt, sondern alle vier Flächen des Prismas ∞P mit dem Buchstaben *t* bezeichnet.

In optischer Beziehung zeigen die Orthoklaskrystalle ein eigenthümliches Verhalten.*) Die optischen Axen liegen entweder in einer Ebene, welche mit der Orthodiagonale parallel geht, also auf dem klinodiagonalen Hauptschnitte senkrecht steht, wobei die Axe der grössten Elasticität, die stets mit der Bisectrix des spitzen Winkels zusammenfällt, mit der geneigten Diagonale der schiefen Endfläche beim Orthoklas von Wehr in der Eifel einen Winkel von 4° 18′, beim Adular von 5° 15′**), beim Loxoklas von New-York von ungefähr 5°, und beim opalisirenden Mikroklin von Fredrikswärn von ungefähr 10° 10′ bildet; oder sie liegen in einer Ebene, welche dem klinodiagonalen Hauptschnitte parallel ist.

Durch Temperaturerhöhung treten sehr erhebliche Aenderungen in dem Winkel zwischen den beiden optischen Axen ein. Liegen diese Axen in einer mit der Orthodiagonale parallelen Ebene, so wird beim Erhitzen dieser Winkel kleiner; liegen sie dagegen in einer mit dem klinodiagonalen Hauptschnitte parallelen Ebene, so entfernen sie sich von einander.

Ist in dem Falle, wo die Axen in einer mit der Orthodiagonale parallelen Ebene liegen, der Winkel zwischen ihnen nicht gross, so

---

*) Descloizeaux, Annal. de chim. et de phys. 1863. 3 Sér. Tom. 68. S. 191.

**) Die Ebene der optischen Axen bildet also beim Adular einen Winkel von 69° mit der Hauptaxe.

wird er beim Erhitzen, wie bereits bemerkt, kleiner; bei weiterer Steigerung der Temperatur fallen die Axen zusammen und gehen dann bei noch höheren Graden in einer mit dem klinodiagonalen Hauptschnitte parallelen Ebene wieder auseinander.

Nach einem kurzen und nicht beträchtlichen Erhitzen kehren beim Abkühlen die Axen in ihre ursprüngliche Lage zurück; nach stärkerer und namentlich länger anhaltender Hitze bleibt dagegen eine mehr oder weniger grosse Aenderung dauernd bestehen.

Auch in den durch heftiges und anhaltendes Glühen in ihrem anfänglichen Axenwinkel modificirten Platten von Orthoklas treten bei neuer Erhöbung der Temperatur wieder Aenderungen in dem zuvor angegebenen Sinne, wenn auch in schwächerem Grade ein.

Bis zur hellen Rothgluth erhitzt behalten die sehr durchsichtigen und homogenen Stücke von Wehr in der Eifel und von der Somma ihr ursprüngliches Aussehen; nur treten die mit ihren Hauptdurchgängen parallelen Sprünge deutlicher hervor. Andere Orthoklase nehmen durch solche Erhitzung eine mehr oder weniger milchichte Farbe an, während noch andere (die aus den Trachyten stammenden) fast undurchsichtig werden. Die milchichten Stellen mit mehr oder weniger genäherten optischen Axen, welche sich im Adular vom St. Gotthardt finden, sollen nach Descloizeaux ihre Entstehung dem Einflusse einer höheren Temperatur verdanken; einem solchen Vorgange widersprechen aber die Verhältnisse des geologischen Vorkommens.

Auffallend ist, dass nach Descloizeaux die triklinen Feldspäthe (Albit, Oligoklas, Labradorit und Anorthit) durch die Wärme weder eine permanente, noch auch eine vorübergehende Aenderung in ihren doppeltbrechenden Eigenschaften erleiden, während beim Gyps ähnliche Vorgänge, wie beim Orthoklase eintreten. *)

Der Orthoklas besteht aus kieselsaurer Thonerde und kieselsaurem Kali; jedoch findet sich fast immer neben dem Kali mehr oder weniger Natron, und auch etwas Kalk.

---

*) Es liegen in den Gypskrystallen die optischen Axen bei gewöhnlicher Temperatur im klinodiagonalen Hauptschnitte; bei Erhöhung derselben nähern sich die optischen Axen, fallen bei 80° zusammen und gehen bei noch weiter gesteigerter Temperatur in einer auf dem klinodiagonalen Hauptschnitte senkrechten Ebene wieder auseinander. Die Bewegung der Axen erfolgt hiernach also beim Gypse in entgegengesetzter Richtung als beim Orthoklase.

Auf den dieser Abhandlung beigefügten Tafeln sind die Orthoklaskrystalle entweder in mehreren Ansichten*) oder Projectionen, oder auch in Netzen, theils in natürlichen, theils in auf die Hälfte reducirten Dimensionen (durch ½ angedeutet) abgebildet. Welche Art der Darstellung gewählt worden, wird stets bei der Beschreibung der einzelnen Krystalle angegeben werden; sie ist übrigens in den meisten Fällen auch aus den in die Flächen eingeschriebenen Buchstaben ohne Schwierigkeit zu erkennen. Ich bemerke nur noch, dass ich die zuerst abgebildete Projection stets die vordere Seite nenne, und dass die Bezeichnungen rechts und links sich auf die rechte und linke Seite dieser Abbildung beziehen.

## A. *Adular.*

Der mit dem Namen Adular bezeichnete Feldspath wurde vom Pater Pini in Mailand auf dem Berge Sella (zwischen dem Val canaria und dem Hospiz am St. Gotthardt), den er irrthümlich für den Mons Adula hielt, entdeckt. Er ist farblos oder nur hell gefärbt, durchsichtig bis durchscheinend. Die Flächen ∞Ꝑ3 und ∞Ꝑ∞ sind oft mit Chlorit bedeckt: die Flächen ∞Ꝑ3 erscheinen stets matt. Auch die beiden Flächen 0P und Ꝑ∞ unterscheiden sich gewöhnlich in ihrem Glanze; während 0P etwas perlmutterartig glänzt, zeigt die Fläche Ꝑ∞ mehr einen Glas- oder Fettglanz.

Die im Folgenden beschriebenen Krystalle stammen aus den Alpen, wo der Adular auf Gängen und in Drusenräumen im Granit, Gneiss u. s. w. vorkommt.

### a. Einfache Krystalle.

Es ist mir nicht gelungen, einen ringsum vollkommen ausgebildeten einfachen Adularkrystall zu erlangen. Auf den mehr oder weniger unvollkommenen und zum Theil verletzten Individuen müssen aber die Mängel ihrer Ausbildung mancherlei Abweichungen von

---

*) Um bei sehr complicirten Krystallen diese Ansichten leichter darstellen zu können, wurden dieselben in natürlicher oder in halber Grösse photographisch aufgenommen.

derjenigen elektrischen Vertheilung, wie sie auf einem ganz normal gebildeten Krystalle auftreten würde, hervorrufen. Die Uebersicht und das Verständniss der auf den nachstehend beschriebenen Krystallen beobachteten elektrischen Vertheilungen wird daher erleichtert werden, wenn ich der speciellen Mittheilung dieser Beobachtungen eine allgemeine Angabe über die normale Vertheilung, wie sie auf einem vollkommenen Krystalle sein würde, so wie über die durch besondere Verhältnisse der untersuchten Individuen veranlassten Abweichungen voranstelle.

Auf einem einfachen ringsum ausgebildeten Adularkrystalle von nicht zu geringer Länge der Hauptaxe, den wir uns blos von den Flächen 0P, ꝐP∞ und ∞P (Fig. β Taf. II) begrenzt vorstellen wollen, würde die elektrische Vertheilung die folgende sein: die Flächen an den beiden Enden der Hauptaxe, also 0P (*p*) und Ꝑ∞ (*x*), so wie die orthodiagonalen Seitenkanten oder die auf ihnen auftretenden Flächen ∞Ꝑ∞ (*m*) sind positiv, die Flächen des verticalen Prismas ∞P (*t*) aber negativ. Auf diesen letzteren Flächen (*t*) nimmt die negative Spannung von den klinodiagonalen Seitenkanten nach den orthodiagonalen hin ab, und geht an letzteren in die positive über. Diese positive Elektricität an den orthodiagonalen Seitenkanten vermag jedoch in solchen Fällen, wo die positive Spannung auf den Endflächen 0P eine sehr grosse Intensität erreicht, nicht hervorzutreten, selbst wenn jene Kanten durch die Flächen ∞Ꝑ∞ (*m*) abgestumpft sind (Krystall Nr. 5). Diese Flächen ∞Ꝑ∞ erscheinen namentlich auch bei Krystallen mit nur kurzer Hauptaxe, bei denen also die Flächen ∞P (*t*) keine grosse Ausdehnung besitzen, negativ (Krystall Nr. 9, 10 und 11). Tritt aus besonderen Ursachen bei solchen kurzen Krystallen die positive Spannung auf den Flächen ∞Ꝑ∞ (*m*) hervor, so nimmt als Compensation die negative Polarität einen Theil der schiefen Endfläche 0P und der Fläche Ꝑ∞ ein (Krystall Nr. 8). Ebendies findet auch statt, wenn infolge eigenthümlicher Bildungsvorgänge die positive Elektricität sich von einer orthodiagonalen Kante aus über einen grossen Theil einer oder zweier Prismenflächen ∞P (*t*) verbreitet (Krystall Nr. 7).

Beim Zerspalten nach dem mit 0P parallelen Durchgange verhalten sich die Adularkrystalle, wie die sächsischen Topase*) und

*) Diese Abhandl. Bd. XIV. S. 441 ff.

die Apophyllite *), oder auch wie die Gypskrystalle **), wenn letztere parallel ihrem Hauptdurchgange zersprengt werden; nur sind bei den Gypskrystallen die Polaritäten gerade die umgekehrten. Wird an einem vollständigen Adularkrystalle eine dünne Platte parallel mit 0 P abgesprengt, so zeigt die Durchgangsfläche am dünnen Stücke negative Spannung, während die ihr angelegen habende Durchgangsfläche am grossen Stücke positiv verbleibt, wenn auch in geringerer Stärke als die ursprüngliche, ihr parallele Krystallfläche. Die Stärke dieser positiven Spannung nimmt immer mehr ab, je weiter der Durchgang, in welchem das Zersprengen erfolgt, nach der Mitte des Krystalles hin rückt, so dass, wenn der Durchgang sich dieser Mitte nähert, beide auf einander gelegen habenden Durchgangsflächen negativ erscheinen. Dabei treten öfter auf diesen negativ-elektrischen Durchgangsflächen in der Nähe der orthodiagonalen Seitenkanten kleine positive Zonen auf (Krystall Nr. 4), selbst wenn auf diesen Seitenkanten die positive Spannung nicht mehr wahrgenommen werden kann (Krystall Nr. 5). Es ist dies ein ähnliches Verhalten, wie es auch die entsprechenden Durchgangsflächen beim Topase ***) in der Nähe der positiven brachydiagonalen Kanten zeigen.

Auf dem mit dem klinodiagonalen Hauptschnitte oder mit den Flächen $\infty \mathrm{P} \infty$ parallelen Durchgange scheint, wenn ich aus einem einzelnen mir vorliegenden Falle einen allgemeinen Schluss ziehen darf, ebenfalls negative Polarität aufzutreten; es entspräche dies den Beobachtungen am Topase †), an welchem beim Anschleifen der brachydiagonalen Kanten, also beim Anschleifen einer mit dem makrodiagonalen Hauptschnitte parallelen Fläche, auf dieser angeschliffenen Fläche negative Spannung hervortritt.

Die Intensität der auf den verschiedenen Adularkrystallen erregten elektrischen Spannung ist sehr ungleich: auf manchen durch eine weissliche, etwas milchichte Farbe ausgezeichneten Krystallen zeigt sie eine gleiche Stärke wie auf den Turmalinen und brasilianischen Topasen, während sie auf anderen, namentlich mehr glasähnlichen, bisweilen ausserordentlich gering erscheint.

*) Ebend. Bd. XVIII. S. 662.

**) S. oben S. 483.

***) Diese Abhandl. Bd. XIV. S. 427.

†) Ebend. S. 445.

Krystall Nr. 1. Taf. II. Fig. 1.

Der Krystall Nr. 1 stammt vom St. Gotthardt, und sass ursprünglich an der rechten Seite des grossen, Fig. 7 (Taf. III) in halben Dimensionen abgebildeten Krystalles Nr. 7. Die Trennung beider Krystalle erfolgte in dem mit dem klinodiagonalen Hauptschnitte parallelen Durchgange. Die Masse des Krystalles ist innen graulich, aussen etwas schmutzig gelblich und kaum durchscheinend.

Fig. 1 *a* stellt die Ansicht des oberen, *b* die des unteren Endes, *c* die Ansicht der vorderen und *d* der hinteren Seite nach den aufgenommenen Photographien dar; Fig. 1 *e* ist eine kleine auf der rechten orthodiagonalen Seitenkante auftretende Fläche ∞Ꝑ∞ (m) und Fig. 1 *f* zeigt die durch das Abbrechen vom Krystall Nr. 7 entstandene mit ∞Ꝑ∞ parallel gehende Durchgangsfläche.

Wie aus diesen Ansichten hervorgeht, ist der Krystall eine Combination der Gestalten 0P, Ꝑ∞ und ∞P, zu welcher noch eine kleine Fläche ∞Ꝑ∞ hinzutritt. Man kann ihn als durch Verwachsung mehrerer in paralleler Stellung befindlicher Krystalle gebildet betrachten. Die auf der Rückseite liegenden Flächen 3 und 4 sind sehr unvollkommen ausgebildet. An dem unteren Ende ist die auf der vorderen Seite liegende Fläche Ꝑ∞ ($x$) eine Krystallfläche, während die auf der hinteren Seite gelegene Fläche 0P zum allergrössten Theile aus dem mit 0P parallelen Durchgange besteht.*) Auf der an der linken Seite durch die Trennung der beiden Krystalle Nr. 1 und Nr. 7 entstandenen Durchgangsfläche ∞Ꝑ∞ finden sich mehrere Glimmerblättchen.

Wie die in Fig. 1 *a* bis *f* eingetragenen Beobachtungen nachweisen, sind die Flächen 0P und Ꝑ∞ am oberen und unteren Ende positiv**), jedoch mit Ausnahme eines Theiles derjenigen Stellen am

---

*) Zur Bezeichnung der Durchgänge ist in den Abbildungen ist der für die Fläche, mit welcher die Durchgänge parallel gehen, gewählte Buchstabe in eine eckige Klammer eingeschlossen worden. Kanten, welche von Krystallflächen gebildet werden, sind durch ausgezogene Linien, dagegen die durch Bruch- oder Spaltungsflächen erzeugten durch punktirte Linien angedeutet worden.

**) Die Zeichen # und = in den Abbildungen bedeuten eine so stark positive und resp. negative elektrische Erregung, dass das Goldblättchen ganz aus dem Gesichtsfelde des Mikroskopes hinaus getrieben wird.

unteren Ende, an welchen der mit 0 P parallele Durchgang die Begrenzung bildet. Dieser Durchgang erscheint daselbst in verschiedenen Absätzen; während die der ursprünglichen Begrenzung näheren Flächenstücke (neben P∞) noch positiv verbleiben, erscheint auf den weiter nach oben und hinten, nach der Kante (3. 4) hin gelegenen Flächenstücken bereits negative Polarität.

Die prismatischen Seitenflächen ∞P sind negativ, und zwar nimmt auf den beiden vorderen wohl ausgebildeten Flächen die negative Spannung in sehr stark ausgesprochenem Grade von der vorderen klinodiagonalen Seitenkante nach der rechten und linken orthodiagonalen Seitenkante hin ab. Auf den beiden hinteren Flächen treten in der Nähe der orthodiagonalen Seitenkanten bereits die positiven Zonen auf, wie solche den letztgenannten Kanten entsprechen.

Von diesen, den orthodiagonalen Seitenkanten entsprechenden Zonen tritt die eine auf der rechten Seite auf der daselbst befindlichen schmalen Fläche ∞P∞ (Fig. 1 *e*) hervor, während die andere (auf der linken Seite) auf die benachbarten Theile der anliegenden Prismenfläche 4 verschoben ist, weil der an Stelle der linken Seitenkante infolge des Bruches freigelegte Durchgang ∞P∞ (Fig. 1 *f*) negative Polarität angenommen hat.

Die elektrische Erregung dieses Krystalles ist ausserordentlich stark.*)

---

*) Zur Messung der sehr starken elektrischen Spannungen auf dem vorliegenden Krystalle musste ein mehr als fünfmal weniger empfindliches Elektrometer, als es für die meisten übrigen Krystalle benutzt wurde, angewandt werden. Diese geringere Empfindlichkeit wird bei meinem Elektrometer sehr leicht hervorgebracht durch die Verringerung der Anzahl der Elemente in der Volta'schen Säule, deren Pole mit den Messingplatten, zwischen welchen das Goldblättchen hängt, in Verbindung stehen. Durch Messung der Spannung eines constanten, aus Zink, Zinkvitriol, Wasser, Kupfervitriol und Kupfer gebildeten Elementes lassen sich die Ausschläge bei geringerer Empfindlichkeit des Instruments auf die entsprechenden bei grösserer Empfindlichkeit reduciren. Um die Vergleichung der Beobachtungen auf allen Orthoklaskrystallen zu erleichtern, sind in die Abbildungen bereits die auf die höhere Empfindlichkeit reducirten Zahlenwerthe eingetragen worden. Eben diese Bemerkung findet auf die im Nachfolgenden beschriebenen Krystalle mit sehr starken elektrischen Erregungen in gleicher Weise Anwendung.

### Krystall Nr. 2. Taf. II. Fig. 2.

Der dem hiesigen mineralogischen Museum gehörige Krystall Nr. 2 ist seiner beträchtlichen Grösse wegen nur in halben Dimensionen abgebildet worden; Fig. 2 *a* giebt die Ansicht desselben von oben, *b* von unten, *c* von der vorderen, *d* von der hinteren Seite (jedoch mit Weglassung der unteren Durchgangsfläche). *e* ist eine auf der rechten Seite vorhandene schmale Fläche ∞P̶∞, während *f* die verletzte oder sehr mangelhaft ausgebildete Kante auf der linken Seite darstellt.

Der Krystall stammt gleich dem vorigen vom St. Gotthardt, und wird von denselben Flächen begrenzt wie jener; nur treten neben der rechts liegenden Fläche ∞P̶∞ noch schmale rauhe Flächen des Prismas ∞P̶3 auf. Eine Fläche des eben genannten Prismas findet sich auch auf dem Absatze in Fläche 1 bei *α*. Der Krystall ist, wie namentlich aus der Abbildung des oberen Endes und der Fläche 3 hervorgeht, als ein Aggregat von vier bis fünf in paralleler Stellung zu einem Gesammtkrystall verwachsenen Individuen anzusehen. Die Prismenflächen 1 und 4, namentlich aber die erstere, sind sehr unvollkommen ausgebildet. Am unteren Ende liefert ein ziemlich ebener Durchgang die Begrenzung. Die Masse des Krystalles ist weisslich und im Allgemeinen nur durchscheinend.

Das obere Ende zeigt überall positive Elektricität; dagegen erscheint auf dem vorderen und linken Theile des am unteren Ende befindlichen Durchganges bereits negative Spannung, während der hintere und rechte Theil noch positiv verbleibt. Die Prismenflächen ∞P sind negativ. Die Fläche ∞P̶∞ (Fig. 2 *e*) auf der rechten orthodiagonalen Seitenkante ist fast in ihrer ganzen Ausdehnung positiv, während die Bruchfläche, welche auf der linken Seite die Begrenzung bildet (Fig. 2 *f*), nur in ihrer unteren Hälfte positive, in der oberen aber negative Spannung besitzt.

### Krystall Nr. 3. Taf. II. Fig. 3.

Der dem Tübinger Museum gehörige, vom St. Gotthardt stammende Krystall Nr. 3 ist ziemlich regelmässig ausgebildet, und im Wesentlichen eine Combination von 0P, P̶∞ und ∞P, wozu noch sehr schmale Flächen ∞P̶∞ auf den beiden orthodiagonalen Seiten-

kanten kommen. Fig. 3 *c* stellt die Ansicht desselben von der vorderen, und *d* von der hinteren Seite dar; *e* und *f* bilden die zuvor genannten schmalen Flächen ∞P∞ ab. Am unteren Ende wird der Krystall von einem sehr ebenen Durchgange begrenzt. Seine durchsichtige Masse ist durch weissliche Stellen getrübt.

Die elektrische Vertheilung ist eine ziemlich normale. Der untere Durchgang ist überall negativ; doch nimmt diese negative Spannung nach der hinteren klinodiagonalen und nach den orthodiagonalen Seitenkanten hin ab.

Krystall Nr. 4. Taf. II. Fig. 4.

Als Fundort dieses dem hiesigen mineralogischen Museum gehörigen Krystalles ist Airolo am St. Gotthardt angegeben. Die Seitenflächen desselben bildet das Prisma ∞P; am oberen Ende liegt eine grosse Fläche P∞, und eine sehr kleine Fläche 0 P (die jedoch auch ein Durchgang sein kann); zwischen beiden tritt eine ungefähr 6$^{mm}$ breite Fläche des stumpferen positiven Hemidomas ½P∞, welche durch oscillatorische Combination mit P∞ stark gestreift ist, auf. *c* und *d* (Fig. 3) stellen die Ansichten von der vorderen und hinteren Seite, *e* und *f* die beiden orthodiagonalen Seitenkanten dar. Am unteren Ende bildet ein mit 0 P paralleler Durchgang die Begrenzung. Die Masse des Krystalles ist ziemlich klar.

Die oberen Flächen 0P, ½P∞ und P∞ sind positiv; ausserdem tritt die positive Elektricität auf der rechten orthodiagonalen Seitenkante hervor; auf der entsprechenden linken Kante erscheint sie aber nicht, tritt dagegen in ziemlicher Stärke auf dem ihr benachbarten Theile der Durchgangsfläche [*p*] am unteren Ende auf. Der übrige Theil der unteren Durchgangsfläche, welche nicht sehr weit von der natürlichen unteren Krystallfläche absteht, ist nur schwach negativ. Mit dieser Vertheilung steht auch die Stärke der elektrischen Spannungen auf den Seitenflächen im Einklange, indem auf den Flächen 2 und 3 die negative Spannung nach der rechten makrodiagonalen Seitenkante hin in stärkerem Grade abnimmt, als auf den Flächen 1 und 4 nach der entsprechenden linken Seitenkante hin.

Krystall Nr. 5. Taf. II. Fig. 5.

Der ebenfalls dem hiesigen Museum gehörige Krystall Nr. 5 stammt aus dem Zillerthale. Seine Masse ist durchsichtig, rissig und

zeigt einen bläulichen Lichtschein. Er ist eine Combination von $0P$, $\bar{P}\infty$, $\infty P$ und schmalen Flächen $\infty\bar{P}\infty$, $\infty\bar{P}3$ und $\infty\bar{P}\infty$. Am oberen Ende trägt er eine etwas mangelhaft ausgebildete Fläche $0P$, während am unteren Ende die Begrenzung von einer kleinen Fläche $\bar{P}\infty$ und von einem Durchgange [$p$] gebildet wird, der in der Nähe des ursprünglichen Endes angeschlagen worden ist.

Die obere Fläche $0P$ sowie die kleine Fläche $\bar{P}\infty$ am unteren Ende sind positiv, der Durchgang [$p$] am unteren Ende schwach negativ, bis auf den in der Nähe der rechten orthodiagonalen Seitenkante liegenden Theil, welcher positiv erscheint. Dagegen tritt auf den brachydiagonalen Seitenkanten die positive Zone nicht hervor; sie zeigen sammt den prismatischen Seitenflächen negative Polarität.

### Krystall Nr. 6. Taf. II. Fig. 6.

Der dem hiesigen Museum gehörige Krystall Nr. 6, welchen Fig. 6 *c* und *d* in einer vorderen und hinteren Ansicht darstellt, trägt ausser den Flächen $0P$, $\bar{P}\infty$ noch kleine Flächen $\infty\bar{P}\infty$, $\infty\bar{P}3$ und $+P$; jedoch erscheint P nur auf der linken Seite, weil die Fläche 3 sammt der an ihr liegenden rechten orthodiagonalen Seitenkante stark verletzt ist. Die Begrenzung am unteren Ende bildet ein ziemlich ebener Durchgang. Die Masse des Krystalles ist farblos urd ziemlich durchsichtig.

Nur auf der linken orthodiagonalen Seitenkante (Fig. 6 *f*) erscheint die positive Zone, während ihr Auftreten auf der rechten durch die daselbst vorhandenen Verletzungen verhindert wird.

### Krystall Nr. 7. Taf. III. Fig. 7.

Von dem in Taf. III. Fig. 7 nur in halben Dimensionen abgebildeten grossen Krystalle war, wie bereits S. 508 erwähnt, der kleinere Krystall Nr. 1 abgebrochen worden. Letzterer hatte an der rechten Seite des grossen Krystalles Nr. 7 angesessen.

Fig. 7 *a* zeigt die Ansicht von oben, *b* von unten, *c* von vorn und *d* von hinten; *f* stellt die durch eine Fläche $\infty\bar{P}\infty$ abgestumpfte linke orthodiagonale Seitenkante dar. Die auf der rechten Seite gelegene Bruchfläche, an welcher der Krystall Nr. 1 mit der Fig. 1 *f* Taf. II gezeichneten Fläche angesessen hatte, liess sich wegen ihrer grossen Unregelmässigkeit nicht wohl abbilden.

Das obere Ende des Krystalles trägt die Flächen 0P und Ꝑ∞; dieselben sind mit mehreren tiefen Furchen und Eindrücken bedeckt. Am unteren Ende findet sich vorn noch eine Krystallfläche Ꝑ∞, während der ganze übrige Theil durch den mit 0P parallelen und in mehreren Absätzen verlaufenden Durchgang begrenzt wird. Die in der Umgebung der vorderen klinodiagonalen Seitenkante liegenden Stücke der Flächen 1 und 2 sind gut ausgebildet; auf der rechten Seite der Fläche 2 liegt ein anderer kleiner Orthoklaskrystall (in *c* mit *ω* bezeichnet). Die Fläche 3 ist als Krystallfläche nicht ausgebildet; es bildet an ihrer Stelle eine sehr unregelmässige Fläche die Begrenzung. Die Fläche 4 zeigt insofern eine unvollkommene Ausbildung, als sie nicht eben ist, sondern gewissermassen aus zahlreichen orthodiagonalen Seitenkanten, welche durch schmale Flächen ∞Ꝑ∞ abgestumpft sind, besteht. Eben diese Beschaffenheit zeigt auch die in *f* abgebildete Fläche ∞Ꝑ∞ und der ihr anliegende Theil der Prismenfläche 1.

Es geht über den grössten Theil der Oberfläche des Krystalles eine Art Naht oder Zusammensetzungslinie. Sie läuft ungefähr durch die Mitte der unteren Durchgangsfläche von vorn nach hinten (*β* in *b*), steigt in der Mitte der unregelmässigen Fläche (3) aufwärts (*γ* in *d*), wendet sich dann auf der oberen Fläche Ꝑ∞ nach vorn (*δ* in *a*), und wo sie die vordere Fläche 0P trifft, in schiefer Richtung nach links (*ε* in *a*).

Die Masse des Krystalles ist innen graulich, aussen etwas schmutzig gelblich und kaum durchscheinend, wie bei Nr. 1.

Auf dem oberen Ende sind die Flächen 0P und Ꝑ∞ positiv, jedoch nicht in ihrer ganzen Ausdehnung; auf dem linken und hinteren Theile tritt vielmehr negative Spannung auf, und es wird die Grenze zwischen den entgegengesetzt elektrischen Zonen ungefähr durch den Verlauf der zuvor beschriebenen Naht (*δ* und *ε*) bezeichnet. Da am unteren Ende, wie aus dem Vorhandensein einer kleinen Krystallfläche Ꝑ∞ (*x*) hervorgeht, der mit 0P parallele Durchgang nicht weit von der natürlichen Begrenzung angeschlagen ist, so erscheint derselbe in seinem grössten Theile noch positiv, während die negative Polarität nur in dem kleineren nach rechts und hinten gelegenen Stücke auftritt. Die beiden gut ausgebildeten Prismenflächen 1 und 2 sind in der Umgebung der vorderen klinodiagonalen Seiten-

kante negativ; in der Nähe der orthodiagonalen Seitenkanten erscheint auf ihnen aber bereits positive Spannung. (Am rechten Rande der Fläche 2 wirkt der fremde mit $\omega$ bezeichnete Krystall störend.) Die unregelmässige Fläche 3 ist negativ, dagegen zeigt die in lauter orthodiagonale Seitenkanten aufgelöste Fläche 4 in ihrer ganzen Ausdehnung sehr starke positive Elektricität, die sich auch über die gleichgebildete in *f* gezeichnete linke Seite des Krystalles und über die ebenfalls an dieser Bildung noch theilnehmenden, anliegenden Theile der Fläche 1 verbreitet. Mit diesen Vorgängen auf den Seitenflächen hängt jedenfalls das Erscheinen der negativen Spannung auf den oberen Endflächen zusammen. Die nicht abgebildete Bruchfläche auf der rechten Seite des Krystalles ist negativ; nur auf ihrem oberen linken Theile, so wie an ihrem unteren Rande vermag die positive Spannung hervorzutreten.

### Krystall Nr. 8. Taf. III. Fig. 8.

Ich schliesse hier gleich einen Krystall an, bei welchem ebenfalls die negative Elektricität einen Theil der Krystallflächen $0P$ und $\bar{P}\infty$ eingenommen hat.

Der dem hiesigen mineralogischen Museum gehörige Krystall Nr. 8 von Geschenen im Uri ist eine Combination von $0P$, $\frac{2}{3}\bar{P}\infty$, $\bar{P}\infty$, $\infty\bar{P}3$ und $\infty\bar{P}\infty$. Am unteren Ende ist die Fläche $0P$ äusserst unvollkommen ausgebildet. Die Masse des Krystalles ist farblos und durchscheinend; in den Furchen der oberen Fläche $\bar{P}\infty$, so wie auf der unteren Fläche $0P$ und den auf der linken Seite gelegenen Flächen $\infty\bar{P}3$ und $\infty\bar{P}\infty$ findet sich ein Ueberzug von Chlorit. Fig. 8 Taf. III stellt das Netz dieses Krystalles dar.

Die sehr unvollkommen gebildete Fläche $0P$ am unteren Ende ist positiv; ebenfalls positiv erscheinen die Flächen $\infty\bar{P}\infty$ und $\infty\bar{P}3$, und es erstreckt sich die positive Spannung auch noch über die Prismenfläche 3 auf der rechten Seite. Für die Entwickelung der negativen Polarität bleiben also nur die Prismenflächen 1, 2 und 4 übrig, von denen die letztere noch dazu sehr niedrig ist. Als Compensation erscheint daher, ebenso wie bei dem vorhergehenden Krystalle, die negative Spannung auch noch auf dem grössten Theile der Flächen $0P$, $\frac{2}{3}\bar{P}\infty$ und $\bar{P}\infty$ am oberen Ende, so dass nur auf der

rechten Seite eine positive Zone übrig bleibt. Mit der Lage dieser letzteren Zone hängt jedenfalls das Auftreten der positiven Elektricität auf der ihr anliegenden Fläche 3 zusammen. Auf der äusseren Oberfläche des Krystalles ist kein Umstand zu erkennen, welchen man zu dieser eigenthümlichen Verschiebung der elektrischen Vertheilung in Beziehung bringen könnte.

Krystall Nr. 9, 10 und 11. Taf. III. Fig. 9, 10 und 11.

Die drei Krystalle Nr. 9, 10 und 11, vom St. Gotthardt stammend, gleichen an Gestalt und Beschaffenheit ihrer Masse, so wie ihrer Oberfläche dem vorhergehenden. Bei allen dreien sind beide Enden der Hauptaxe wenn auch mehr oder weniger vollkommen ausgebildet. Die beiden Krystalle Nr. 10 und 11 sassen ursprünglich an einander und wurden durch Bruch von einander getrennt.

Ich habe die Krystalle nur in einer seitlichen Projection abgebildet. Die sämmtlichen Seitenflächen ∞P, ∞Ꝑ3 und ∞Ꝑ∞ sind negativ, wenn auch einzelne nur schwach; die Flächen 0P und Ꝑ∞ am oberen und unteren Ende aber positiv. Diese letzteren positiven Zonen sind durch farbige Säume am oberen und unteren Rande der Zeichnung angedeutet worden.

b. Zwillinge und mehrfach zusammengesetzte Krystalle.

Der Adular bildet dreierlei Zwillinge: 1. Zwillingsaxe die Hauptaxe, Zusammensetzungsfläche ∞Ꝑ∞; 2. Zwillingsaxe die Normale einer Fläche 2Ꝑ∞, Zusammensetzungsfläche 2Ꝑ∞, und 3. Zwillingsaxe die Normale von 0P, Zusammensetzungsfläche 0P.

Bereits beim Aragonit*), und ebenso beim Gyps (s. oben S. 486) habe ich die Zwillingsbildung in Bezug auf ihre Einwirkung auf die thermoelektrischen Erscheinungen untersucht, und gezeigt, dass dieselbe keine wesentlichen Veränderungen darin hervorbringt. Die an den einfachen Krystallen beobachtete elektrische Vertheilung bleibt nach Möglichkeit auch auf den Zwillings- und selbst mehrfachen Krystallen erhalten. Eben dieses Resultat werden auch die Untersuchungen der Adularzwillinge bestätigen.

---

*) Diese Abhandl. Bd. XV. S. 382.

1. **Zwillinge** (wenn nicht rein, so doch wenigstens vorzugsweise).

*α.* Zwillingsaxe die Hauptaxe, Zusammensetzungsfläche ∞P̶∞. (Erstes Gesetz.)

Das Gesetz, nach welchem diese Zwillinge gebildet sind, führt den Namen des Carlsbader Gesetzes, weil es zuerst an Krystallen aus der Umgegend von Carlsbad erkannt wurde. Der Zwilling entsteht, indem von zwei in paralleler Stellung befindlichen Krystallen der eine 180° um seine Hauptaxe gedreht wird.*) Denken wir uns in die Hauptaxe eines monoklinoedrischen Krystalles gestellt, und blicken auf die Fläche 0P vom oberen Ende herab, so lassen sich die beiden orthodiagonalen Seitenkanten, und ebenso die beiden Flächen ∞P̶∞, welche diese Kanten abstumpfen, als rechte und linke unterscheiden, weil sich bei der angegebenen Stellung durch keine Drehung des Krystalles die linke Seite desselben zur rechten und umgekehrt machen lässt. Mit Rücksicht hierauf haben wir nun zwei Arten der nach dem vorstehenden Gesetze gebildeten Zwillinge zu unterscheiden: es können nämlich die beiden Individuen, aus welchen der Zwilling besteht, sich mit ihren rechten oder mit ihren linken Seiten zusammenlegen.

Krystall Nr. 12. Taf. III. Fig. 12.

Der dem hiesigen Museum gehörige Zwillingskrystall stammt aus dem Zillerthale. Die beiden Individuen, welche ihn bilden, haben sich mit ihren rechten Seiten aneinander gelegt, und stellen eine Combination von 0P, ½P̶∞, P̶∞, P, ∞P, ∞P̶3 und ∞P̶∞ dar. Ihre Masse ist farblos und durchsichtig bis durchscheinend. Fig. 12 *c* giebt die Ansicht von der Vorder-, *d* von der Rückseite; *e* und *f* sind die Flächen ∞P̶∞ an den beiden Enden der Orthodiagonale. *αβ* (in *c*)

---

*) Man erhält äusserlich dieselbe Zwillingsgestalt nach dem Gesetze: Umdrehungsaxe die Normale auf dem orthodiagonalen Hauptschnitte und Zusammensetzungsfläche ∞P∞. Betrachtet man die sämmtlichen vier Flächen des Prismas ∞P als gleich, so stimmen die nach beiden Gesetzen erzeugten Zwillinge absolut überein; nimmt man aber das eine Flächenpaar dieses Prismas von dem anderen Flächenpaare verschieden, *T* und *l* (S. 502), so geben die beiden Gesetze Zwillingsbildungen, welche sich in Bezug auf die Lage der Flächen *T* und *l* unterscheiden.

und $\gamma\delta$ (in $d$) bezeichnen die Linie, in welcher die beiden Individuen sich zu einem Zwillinge zusammengefügt haben. Am unteren Ende bilden die mit 0P parallelen Durchgänge die Begrenzung; am unteren Rande der Prismenfläche 2 finden sich auch kleine Reste der Fläche P∞, so dass hier also der Durchgang nahe der natürlichen Begrenzung liegt.

Die Flächen am oberen und unteren Ende sind positiv, die prismatischen Seitenflächen ∞P negativ und zwar nimmt die Grösse der elektrischen Spannung nach unten hin zu. Die in $f$ abgebildete Fläche ∞P∞ ist unelektrisch; ebenso verhalten sich die oberen Theile der anderen in $e$ gezeichneten, während in den unteren Theilen derselben negative Spannung auftritt.

### β. Zwillingsaxe die Normale einer Fläche 2P∞, Zusammensetzungsfläche 2P∞. (Zweites Gesetz.)

Die Zwillingsbildung nach diesem Gesetze wurde zuerst an Krystallen von Baveno beobachtet, und das Gesetz daher als das Bavenoer bezeichnet.

Das Klinoprisma 2P∞ ($n$) ist rechtwinklig und stumpft die von 0P und ∞P∞ gebildeten Kanten (Taf. II. Fig. $\gamma$) gerade ab. Wird nun ein Krystall parallel einer Fläche jenes Prismas zerschnitten, und die eine Hälfte um 180° gedreht, so entsteht der Bavenoer Zwilling. Die Flächen 0P und ∞P∞, welche bei hinreichender Ausdehnung im ursprünglichen Krystalle ein Prisma mit rechtwinkligem Querschnitte geben, bilden im Zwillinge wieder ein solches; während jedoch in dem ursprünglichen Krystalle die beiden Flächen 0P, und ebenso die beiden Flächen ∞P∞ einander gegenüber liegen, finden sich im Zwillinge die beiden gleichwerthigen Flächen jeder der zwei Gestalten neben einander gelagert.

Um die elektrischen Vertheilungen auf den folgenden beiden Krystallen angeben zu können, habe ich, so weit es thunlich, in Fig. 13 und 14 Taf. III das Netz derselben dargestellt, wobei diejenigen Theile der Oberfläche, an welchen ein anderer Krystall oder eine Gesteinmasse anliegt, in der Zeichnung fortgelassen worden sind. Die Flächen der unverändert in ihrer Lage verbleibenden Hälfte habe ich mit den Buchstaben $x$, $p$, $t$ und $m$, dagegen die ent-

sprechenden Flächen der um 180° gedrehten mit $x'$, $p'$, $t'$ und $m'$ bezeichnet. Diejenigen Punkte des Umfanges der einzelnen Flächen, welche denselben Buchstaben tragen, würden beim Zusammenklappen des Netzes zusammenfallen.

Beide Zwillinge sind so gestellt, dass die Ebene, in welcher der Krystall zerschnitten gedacht wird, der Abstumpfungsfläche 2P∞ der Kante $\mu\varepsilon$ in Fig. 13 und $\varkappa\zeta$ in Fig. 14 parallel geht, und während die obere rechte Hälfte stehen bleibt, die untere linke um 180° gedreht wird. Es bleiben also oben die Flächen $p$ und $x$, und neben ihnen rechts die Fläche $m$ unverändert an ihrem Orte, während die Flächen $p'$ und $x'$ der unteren Hälfte auf die linke Seite von $p$ und $x$, und die frühere linke Fläche $m'$ auf die untere Seite zu liegen kommen. Die zerschnittenen Prismenflächen ∞P bilden in der Richtung des Schnittes einspringende und ausspringende Kanten ($\delta\theta$ Fig. 14 einspringend, $\alpha\omega$ Fig. 13 und Fig. 14 ausspringend).

### Krystall Nr. 13. Taf. III. Nr. 13.

Der von Airolo stammende und dem hiesigen mineralogischen Museum gehörige Krystall Nr. 13 ist in seiner Masse farblos und durchsichtig bis durchscheinend. Unterhalb $\gamma\eta$ lag eine kleine Gesteinmasse.

Die Flächen $p$, $x$, $p'$, $x'$, so wie die rechts liegende Fläche $m$ sind positiv, die Prismenflächen ∞P und die gegenwärtig auf der unteren Seite liegende Fläche ∞P∞ ($m'$) negativ. Die Fläche $m'$ war durch anliegende Massen in ihrer Ausbildung gehindert gewesen, und deshalb weniger vollkommen als die Fläche $m$; ein Umstand, der jedenfalls das Auftreten der negativen Polarität auf $m$ begünstigt.

### Krystall Nr. 14. Taf. III. Nr. 14.

Der Krystall gehört der Freiberger Sammlung und gleicht in seiner Beschaffenheit und Gestalt dem vorhergehenden; nur treten bei ihm noch die Flächen ½P∞ (in der Zeichnung fortgelassen) und ∞P3 ($z$) auf. In die Fläche $p$ dringt ein keilförmiges Stück $def$ der mit ihr zusammenfallenden Fläche ∞P∞ des zweiten Individuums (oder der zweiten Hälfte) ein, und in gleicher Weise findet sich ein kleines Stück $gh\delta$ der linken Fläche ∞P∞ des ersten Individuums

in die mit ihr zusammenfallende Fläche $p'$ eingeschoben. Unten und namentlich nach hinten und rechts ist der Krystall durch andere Gesteinsmassen und einen an ihn angewachsenen anderen Adular in seiner Ausbildung gehindert worden.

Die elektrische Vertheilung gleicht der auf dem vorhergehenden Krystalle beobachteten, jedoch mit Ausnahme der Flächen $x$ und $x'$, welche, wie dies auch zum Theil bei den einfachen Krystallen Nr. 7 und Nr. 8 beobachtet worden, negative Spannung besitzen.

$\gamma$. Zwillingsaxe die Normale von 0P, Zusammensetzungsfläche 0P. (Drittes Gesetz.)

Die nach dem Gesetze: Zwillingsaxe eine Normale von 0P und Zusammensetzungsfläche die Fläche 0P, gebildeten Zwillinge können auch erhalten werden nach dem Gesetze: Zwillingsaxe die Klinodiagonale, Zusammensetzungsfläche die Fläche 0P. Werden die beiden Flächenpaare *T* und *l* des Prismas ∞P (s. oben S. 502) als absolut gleich angenommen, so sind die nach beiden Gesetzen hergeleiteten Zwillinge völlig identisch; dies ist aber nicht mehr der Fall, wenn die Flächenpaare *T* und *l* unterschieden werden müssen. An den nach dem ersten Gesetze gebildeten Zwillingen sind nämlich die in den aus- oder einspringenden Kanten zusammenstossenden Flächen entweder beide *T* oder beide *l*, während an den nach dem zweiten Gesetze gebildeten in jeder dieser Kanten je ein *T* und ein *l* zusammenstossen.

In eben diese zuletzt angegebene Stellung lassen sich auch zwei Krystalle mittelst einer Wiederholung des zweiten (Bavenoer) Zwillingsgesetzes bringen. Es seien drei Adularkrystalle in paralleler Lage ihrer Axen neben einander gestellt. Nennen wir die oben rechts beim mittelsten (zweiten) Krystall liegende Fläche von 2P∞ $n'$, und die oben links liegende 'n, lassen den mittleren (zweiten) Krystall unverändert in seiner Stellung, drehen aber den links liegenden (ersten) Krystall um die Normale von 'n, und den rechts liegenden (dritten) Krystall um die Normale der Fläche n', so stehen nach diesen Drehungen die beiden Seitenkrystalle (der erste und dritte) zu dem mittleren (zweiten) in einer dem Bavenoer Gesetze entsprechenden Zwillingsstellung, während sie gegenseitig (also der erste gegen

den dritten) sich genau in der Zwillingsstellung befinden, welche nach dem Gesetze: Zwillingsaxe die Klinodiagonale, Zusammensetzungsfläche die Fläche 0 P, oder wenn wir den Unterschied zwischen den Flächenpaaren *T* und *l* nicht berücksichtigen, nach dem Gesetze: Zwillingsaxe die Normale auf 0 P, Zusammensetzungsfläche die Fläche 0 P, erhalten wird.

Leider ist an unverletzten Krystallen der Unterschied zwischen *T* und *l* so wenig nachzuweisen, dass sich nicht entscheiden lässt, ob wir bei den nachfolgend beschriebenen Zwillingen die erste Bildungsweise (Zwillingsaxe die Normale von 0 P) oder die zweite (Zwillingsaxe die Klinodiagonale) anzunehmen haben.

Alle im Nachstehenden behandelten Zwillinge dieser Art sind nicht reine Zwillinge, sondern in mehr oder weniger grosser Ausdehnung auch Drillinge oder Vierlinge nach dem Bavenoer Gesetze. Wäre dies allgemein der Fall, so könnte man, wenn die oben erwähnte zweite Bildungsweise dieser Zwillinge (Zwillingsaxe die Klinodiagonale) als die einzige thatsächlich vorhandene nachgewiesen wäre, das dritte Zwillingsgesetz ganz beseitigen und die betreffenden Zwillinge als durch wiederholte Anwendung des Bavenoer Gesetzes erzeugte Drillings- und Vierlingsgestalten betrachten.

Diese letztere Weise der Auffassung werde ich bei den vorliegenden Krystallen, die, wie schon hervorgehoben, mehr oder weniger Drillinge oder Vierlinge sind, zur leichteren Bezeichnung der einzelnen Krystalle benutzen. Denken wir uns nämlich zu den drei vorhin behandelten Krystallen noch einen vierten hinzugefügt, welcher zu dem ersten und dritten in einer Zwillingsstellung nach dem Bavenoer Gesetze steht, so nimmt dieser vierte Krystall gegen den zweiten eine Zwillingsstellung nach dem dritten Gesetze ein. Ich werde nun in den Zeichnungen die für die verschiedenen Flächen eingeführten Buchstaben mit den Zahlen 1, 2, 3 und 4 versehen, um dadurch anzudeuten, welchem Individuum die betreffende Fläche angehört, und der leichteren Uebersicht wegen zum Theil die Angaben über die Grösse der gemessenen elektrischen Spannungen fortlassen, so dass die positiven und negativen Zonen nur durch die Farben angedeutet werden. Die Zahlen 1, 2, 3, 4 sind so gewählt, dass der Krystall 1 in seiner Lage verbleibend gedacht wird, und auf die Vorderseite desselben beziehen sich die Bezeichnungen rechts

und links. Wird der Krystall 1 nun so auf den Tisch gelegt, dass seine Flächen 0P und ∞P∞ vertical stehen, so liegen sämmtliche Flächen 0P der übrigen Krystalle ebenfalls vertical, und zwar sei der Krystall 2 der rechts, der Krystall 4 der links gelegene, während sich zwischen 2 und 4 der Krystall 3 befindet, wie es folgendes Schema $4\,{}^{1}_{3}\,2$ zeigt. Je zwei anliegende stehen also nach dem zweiten (Bavenoer) Gesetze, je zwei gegenüberliegende nach dem dritten Gesetze in Zwillingsstellung. Da zwei der untersuchten Krystalle nur von der Rückseite abgebildet sind, so vertauschen in den betreffenden Zeichnungen die Ziffern 2 und 4 ihre Stellung.

### Krystall Nr. 15. Taf. III. Fig. 15.

Der Krystall Nr 15, welcher der Freiberger Sammlung gehört, ist Fig. 15 Taf. III nur in der Ansicht von der hinteren Seite in halber Grösse abgebildet worden.

Der Hauptkrystall, welcher die bei weitem grösste Masse des Gesammtkrystalles bildet, besteht aus 4 einander parallel liegenden Platten, $\varphi\psi$, $\xi$, $\varkappa\lambda$ und einer vierten, die jedoch bei der gewählten Ansicht, weil sie hinter $\varkappa\lambda$ liegt, nicht sichtbar wird. Auf der Fläche $\varphi\psi$ findet sich bei $\varepsilon\eta$ und ebenso auf der Fläche $\varkappa\lambda$ bei $\mu\nu$ ein sehr stumpfer ausspringender Winkel von nahe 173°, während bei $\gamma\delta$, wo die Fläche $\xi$ in die Fläche $\lambda$ verläuft, ein scheinbar ebenso stumpfer einspringender Winkel auftritt. Es gehören die Stücke $\lambda$ und $\psi$ also nicht den Flächen P∞, mit denen sie nahe zusammenfallen, an, sondern sind die Flächen einer stumpfen orthodiagonalen Pyramide P4 ($w$).

Die zweitgrösste Masse gehört dem Individuum 3 an; ein etwas kleineres Volumen besitzt das Individuum 4, während das Individuum 2 nur in sehr geringer Ausdehnung auftritt.

Auf der unteren Seite ist der Krystall verbrochen.

Die Masse des Krystalles ist graulich und durchscheinend.

Seine elektrische Erregung ist sehr stark, und zeigt keine besonderen Abweichungen. Die auf der rechten Seite der Zeichnung hervortretenden Flächen $x_4$ sind stark positiv; sie müssen mit Kupferfeilicht bedeckt werden, wenn man auf den rechts neben ihnen liegenden Flächen $t_1$ und $t_3$ die negative Spannung wahrnehmen will.

### Krystall Nr. 16. Taf. III. Fig. 16.

Der vom St. Gotthardt stammende, der hiesigen mineralogischen Sammlung gehörige Krystall ist in seiner Masse graulich gefärbt und nur durchscheinend. Die einzelnen Individuen sind eine Combination von 0P, Ᵽ∞, ∞P und zum Theil auch ∞Ᵽ3. Fig. 16 stellt eine Ansicht der hinteren Seite dar, in welcher die einzelnen Individuen leicht durch die eingeschriebenen Zeichen zu erkennen sind.

Die auf den verschiedenen Flächen hervortretende Elektricität ist stark und von normaler Vertheilung. Ueberall, wo in der Zeichnung Fig. 16 zwischen den Flächen des verticalen Prismas ∞P ($t$) sich die Flächen des positiven Hemidomas Ᵽ∞ ($x$) zeigen, erscheint auf ihnen die positive Polarität.

### Krystall Nr. 17. Taf. III. Fig. 17.

Der Krystall Nr. 17 gehört der Freiberger Sammlung; er ist auf seiner Oberfläche, besonders aber auf den Flächen ∞Ᵽ∞ und ∞Ᵽ3 mit feinem Chlorit überzogen. Die einzelnen Individuen sind Combinationen on 0P, Ᵽ∞, ∞P, ∞Ᵽ3, und zum Theil auch noch von ∞Ᵽ∞ ($k$).

Fig. 17 *a* stellt die Ansicht von oben, *b* von unten, *c* von vorn, *d* von hinten und *e* von rechts dar; Fig. 17 *f* bildet die Flächen ∞Ᵽ∞ auf der linken Seite ab. Wie aus den Ansichten *d* und *e* hervorgeht, ist die Bildung in der einen Hälfte der hinteren Seite gehemmt gewesen, infolge dessen die Fläche $p_2$ durch eine grosse Fläche $x_2$ in zwei Stücke getrennt wird.

Die obere und untere Fläche (*a* und *b*) sind positiv, die Flächen ∞P auf der vorderen und hinteren Seite negativ. Nur wo auf der linken Seite die Flächen $p_2$ und $x_2$ auftreten, erscheint wieder positive Spannung. Die Flächen ∞Ᵽ∞ und ∞Ᵽ3 auf der linken Seite sind negativ; auf der rechten Seite zeigt die Fläche ∞Ᵽ∞ nur im unteren Theile ($m_3$) negative Spannung, während der obere ($m_1$) positiv ist.

## 2. Vierlingskrystalle.

Die nach der Richtung der Klinodiagonale verlängerten Vierlingskrystalle mit rechtwinkligem Querschnitte sind gewöhnlich sehr mannich-

fach zusammengesetzt. Aus der Beschaffenheit und Lage der Streifen auf der Oberfläche lässt sich meistens leicht erkennen, welchem Individuum die oberflächliche Schicht angehört, während die Bestimmung der Dicke einer solchen Schicht oft sehr schwierig oder ohne Zerschlagen des Krystalles gar nicht möglich ist. Es würde in sehr vielen Fällen nicht ausführbar sein, durch eine für das Eintragen der beobachteten elektrischen Spannungen geeignete Zeichnung ein klares Bild der Zusammensetzung zu geben; ich begnüge mich daher mit der Mittheilung der Beobachtungen auf einem einzigen dieser Krystalle, der in seiner Zusammensetzung noch ziemlich einfach ist.

Krystall Nr. 18. Taf. III. Fig. 18.

Der dem hiesigen mineralogischen Museum gehörige Krystall stammt vom St. Gotthardt, und seine nur durchscheinende Masse ist an der Oberfläche graulich gefärbt. Fig. 18 *a* giebt in halber Grösse eine Abbildung der vier mit der Klinodiagonale parallelen Flächen so wie der am oberen ausgebildeten Ende liegenden Flächen. Fig. 18 *b* stellt eine Projection des unteren sehr unregelmässig verbrochenen Endes auf eine senkrecht gegen die Klinodiagonale gelegte Ebene dar.

Die mit 1 bezeichnete Fläche ist die Fläche *p* (also 0P des ersten Individuums), doch liegt auf der rechten Seite bei $\alpha\beta$ ein kleines von den Flächen $\infty$P$\infty$ der Individuen 2 und 4 gebildetes Zwillingsstück. Die Fläche 2 ist die Fläche 0P des zweiten Individuums, nur liegt oben links bei $\gamma\delta$ ein Stück der rechten Fläche $\infty$P$\infty$ des Individuums 1. Der untere Theil $\varepsilon$ der Fläche 3 ist verbrochen, dagegen wird der oberhalb $\varepsilon$ liegende Theil gebildet von den Flächen $\infty$P$\infty$ der Individuen 2 und 4; nur am rechten Rande bei $\eta\zeta$ erscheint ein schmaler Streifen der Fläche 0P des dritten Individuums. Die Fläche 4 wird durch die Flächen $\infty$P$\infty$ der beiden Individuen 1 und 3 gebildet.

Die Flächen 1 und 2 sind positiv; nur ist unten auf 2, wo eine Verletzung vorhanden, der linke Rand negativ; die Flächen 3 und 4, und ebenso die Flächen am oberen Ende, so wie die Bruchfläche am unteren Ende zeigen negative Elektricität.

### *B. Orthoklas von Elba* (Pegmatolith *Breith.*).

Die milchweissen, kaum durchscheinenden Orthoklaskrystalle finden sich auf Elba im Granit, und sind häufig mit Quarz durchwachsen, dessen Krystalle besonders aus den Flächen ∞P∞ und auch ∞P hervorragen, während an den mir vorliegenden Exemplaren die Flächen 0P und P∞ frei davon sind. Oefter finden sich auch Turmalinnadeln in ihnen. Meistens bilden sie Zwillinge nach dem sogenannten Carlsbader Gesetze; es ist dabei merkwürdig, dass Zwillinge dieser Art vorkommen, bei denen die neben einander liegenden Flächen 0P und P∞ fast genau in eine Ebene fallen, obwohl die Winkel beider gegen die Hauptaxe um 1° 50′ von einander abweichen.*)

An allen im Nachstehenden beschriebenen Krystallen war keine Spur von eingewachsenen Turmalinen zu erkennen; alle Individuen, welche im starken Lichte im Innern dunkle, auf möglicherweise eingewachsene Turmaline hinweisende Stellen zeigten, sind ausgeschlossen worden.

#### Krystall Nr. 19. Taf. III. Nr. 19.

Das Netz des dem hiesigen Museum gehörigen Krystalles Nr. 19 stellt Fig. 19 Taf. III dar; der Krystall ist ein Zwilling, bei welchem die beiden Individuen sich mit ihren rechten (s. S. 516) Seiten aneinander gelegt haben. Oben, vorn, rechts und links trägt er Krystallflächen; jedoch ist der untere (Fig. 19 nicht mit Farbe überzogene) Theil der links liegenden Fläche ∞P∞ (*m*) von aufgewachsenen Massen bedeckt. Unten findet sich auf der rechten Hälfte *a* ein mit

*) Es liegen mir zwei Zwillinge dieser Art vor, der später unt Nr. 23 abgebildete und ein in dieser Abhandlung nicht beschriebener; bei dem ersteren haben sich die beiden Individuen mit ihren linken und bei dem anderen mit ihren rechten Seiten aneinander gelegt. Bei beiden ist das obere Ende vollständig ausgebildet; jedoch fallen bei beiden die Flächen 0P und P∞ nur in der einen Hälfte sehr nahe in eine Ebene, während sie auf der anderen, wie es scheint, die normale Lage gegeneinander haben. Leider waren die Flächen der letzteren Seite entweder so matt oder so streifig, dass eine genaue Messung ihrer Lage unmöglich war.

0P paralleler Durchgang, während die linke Hälfte $\beta$ unregelmässig verbrochen ist. Die hintere Seite *b* ist ebenfalls verbrochen.

Die Individuen sind eine Combination von 0P, P∞, ∞P und ∞P∞; ausserdem findet sich am rechten Rande der Fläche *x* des in der Zeichnung links liegenden Individuums (neben dem *p* des anderen) noch die Fläche einer sehr stumpfen orthodiagonalen Pyramide; diese Fläche bildet mit der Fläche *x* einen Winkel von ungefähr 179° 30'.*)

Die elektrische Vertheilung auf diesem Krystalle stimmt im Wesentlichen mit der auf den Adularen beobachteten überein.

### Krystall Nr. 20. Taf. III. Fig. 20.

Der Fig. 20 in seinem Netze abgebildete Krystall Nr. 20 gehört der Sammlung des Ingenieur-Instituts in Turin. Er ist ein einfacher und stellt eine Combination von 0P, $\frac{4}{3}$P∞, 2P∞, ∞P, ∞P∞ und P dar. Sowohl am oberen wie am unteren Ende trägt er eine Krystallfläche 0P. Die linke Fläche ∞P∞ ist ziemlich gut ausgebildet, während die rechte durch das Anlegen fremder Massen in ihrem Wachsthum gehindert worden. Auf der Hinterseite bildet eine ziemlich ebene Bruchfläche *b* die Begrenzung. Ungefähr parallel mit der Hauptaxe und der hinteren Bruchfläche geht ($\frac{1}{3}$ der Dicke von der Bruchfläche abstehend) durch den ganzen Krystall ein in dem Netze durch die punktirte Linie $\alpha\beta\gamma\delta$ angedeuteter Sprung, in welchem die beiden durch ihn getrennten Stücke wie zusammengekittet erscheinen. Vorn und unten ist die unter der Fläche 2P∞ (*y*) liegende Schicht in etwa 1 mm Dicke durchsichtiger als die übrige Masse.

Die untere Fläche 0P (*p*), der vor dem Sprunge liegende Theil der oberen Fläche 0P, und ebenso die linke ausgebildete Fläche ∞P∞ sind positiv, dagegen zeigen der hintere Theil der oberen Fläche 0P, die hintere Bruchfläche *b* und die rechte sehr mangelhaft gebildete Fläche ∞P∞ negative Polarität. Die vorn rechts liegende

---

*) Bei dem in der Anmerkung der vorhergehenden Seite erwähnten, in dieser Abhandlung nicht abgebildeten Zwillingskrystalle findet sich eine ähnliche Fläche; der von ihr mit der Fläche P∞ (x) gebildete Winkel scheint noch etwas stumpfer zu sein, als bei dem obigen Krystalle, ungefähr 179° 40'.

Fläche ∞P (2) ist nur in ihrem grössten, und die links liegende (1) nur in einem sehr kleinen Theile negativ; mit diesen negativen Zonen in den unteren Theilen der Flächen 1 und 2 hängt endlich noch eine negative Zone auf der vorderen Fläche des unteren Endes, nämlich auf der daselbst befindlichen Fläche P∞ zusammen. Unten rechts auf der Fläche 2 ist ein anderer kleiner Feldspathkrystall eingewachsen; welchen störenden Einfluss derselbe auf die elektrische Vertheilung am grossen Krystalle ausübt, lässt sich nicht ermitteln.

### Krystall Nr. 21. Taf. III. Fig. 21.

Der gleichfalls der Sammlung des Ingenieur-Instituts in Turin gehörige und Fig. 21 in seinem Netze dargestellte einfache Krystall Nr. 21 ist auf der vorderen Seite *b* verbrochen und auf der linken (nicht abgebildeten) Seite mit einem anderen Krystalle verwachsen. Unten bildet zum Theil ein mit 0P paralleler Durchgang [*p*] die Begrenzung, während der übrige Theil durch fremde Feldspath- und Quarzmassen bedeckt wird. Auf der oberen Seite finden sich die Flächen 0P, P∞, $\frac{4}{3}$P∞ (letztere parallel dem klinodiagonalen Hauptschnitte gestreift), 2P∞ und P. Auf der rechten und hinteren Seite liegen die Flächen ∞P∞ (mit eingewachsenem Quarzkrystall bei *α*), ∞P3 und ∞P. Auch bei diesem Krystall erscheint die hintere unter der Fläche 2P∞ (*y*) liegende Schicht in 1 bis 2$^{mm}$ Dicke durchsichtiger als die übrige Masse.

Die vordere Bruchfläche, sowie die auf der unteren Seite liegende Bruch- und Durchgangsfläche sind negativ, alle übrigen Theile der Oberfläche positiv, jedoch mit Ausnahme eines Theiles der hinteren rechten Fläche ∞P, von welcher das obere neben ∞P3 gelegene Stück wieder negativ erscheint. Ebenso, wie bei dem vorhergehenden Krystalle ist also die negative Polarität fast ausschliesslich auf die angewachsenen Stellen beschränkt.

### Krystall Nr. 22. Taf. IV. Fig. 22.

Der ebenfalls aus der Sammlung des Ingenieur-Instituts in Turin entliehene Krystall Nr. 22 ist ein Zwilling, dessen beide Theile sich mit ihren linken Seiten nach dem Carlsbader Gesetze zusammengelegt

haben; jedoch ist das rechts liegende Individuum $\alpha\beta$ zum grössten Theile verbrochen. Das obere Ende des links (in seinem Netze) gezeichneten Individuums trägt die Flächen $0P$, $\bar{P}\infty$ und $\frac{2}{3}\bar{P}\infty$ (parallel mit dem klinodiagonalen Hauptschnitte gestreift). Auf der vorderen und hinteren Seite sind die beiden Flächen $\infty P$ an eben diesem Individuum etwas mangelhaft ausgebildet; an dem rechts daneben liegenden Reste des anderen Individuums findet sich auf der vorderen Kante noch eine schmale Fläche $\infty\bar{P}\infty$. Die linke Seite zeigt eine gut ausgebildete Fläche $\infty\bar{P}\infty$ ($m$), jedoch liegt unten und hinten ein anderer Feldspathkrystall, der sich auch quer über die hintere Seite hinerstreckt. Die gänzlich verbrochene rechte und untere Seite habe ich nicht abgebildet.

Die oberste Schicht auf der Fläche $0P$ (am oberen Ende) ist bis auf $1{,}5^{mm}$ Dicke viel durchsichtiger als die übrige Masse; und eine eben solche durchsichtigere Stelle findet sich oben hinten, wo die Fläche $2\bar{P}\infty$ auf dem linken Krystalle auftreten würde.

Die Flächen $0P$ und $\bar{P}\infty$ am oberen Ende sind positiv, und zwar $0P$ so stark, dass das Goldblättchen des Elektrometers ganz aus dem Gesichtsfelde des Mikroskopes getrieben wird. Diese positive Spannung zieht sich auch noch etwas auf die prismatischen Seitenflächen $\infty P$ an den klinodiagonalen Kanten hinab. Alle übrigen Theile der Oberfläche sind negativ (auch das nicht gezeichnete untere Ende und die ebenfalls nicht abgebildete rechte Seite).

Bei den beiden vorhergehenden Krystallen erschien in der Nähe der durchsichtigeren Schicht (unter $2\bar{P}\infty$ liegend) eine verhältnissmässig starke positive Spannung; an dem vorliegenden Krystall erreicht die positive Spannung auf der durchsichtigeren Schicht der Fläche $0P$ eine sehr grosse Intensität. Man darf wohl vermuthen, dass beide Umstände, die Bildung einer durchsichtigeren Masse und die auf ihr erregte stärkere elektrische Spannung im Zusammenhange stehen.

Der Krystall Nr. 22 zeigt eine ähnliche Elektricitätsvertheilung, wie der Turmalin. Diese Vertheilung weist aber durchaus nicht auf eine hemimorphe Bildung, wie sie der Turmalin, das Kieselzinkerz u. s. w. besitzen, hin; auch beim Kalkspath*) habe ich eine

*) Diese Abhandl. Bd. XVIII. S. 224.

ganz ähnliche Vertheilung (nur in umgekehrten Polaritäten) abgebildet.

### Krystall Nr. 23. Taf. IV. Fig. 23.

Der Fig. 23 nur in halber Grösse abgebildete Krystall gehört dem hiesigen mineralogischen Museum, und ist ein Zwilling, dessen beide Individuen mit ihren linken Seiten verwachsen sind. Die einzelnen Krystalle sind eine Combination von $0P$, $\bar{P}\infty$, $2\bar{P}\infty$, $\infty P$, $\infty\bar{P}3$, $\infty\bar{P}\infty$ und $P$. An dem unteren Ende ist er ziemlich eben verbrochen. Aus den Seitenflächen ragen mehrere kleine Quarzkrystalle heraus.

Der Zwilling zeigt die bereits oben S. 524 erwähnte Eigenthümlichkeit, dass auf der vorderen Seite die Fläche $0P$ des links liegenden mit der Fläche $\bar{P}\infty$ des rechtsgezeichneten Individuums fast genau in eine Ebene fällt. Auf der hinteren Seite findet dies nicht statt; die beiden daselbst in verschiedenen Höhen liegenden Flächen $0P$ und $\bar{P}\infty$ scheinen vielmehr die normale Lage gegeneinander zu haben.*)

Die elektrische Vertheilung auf diesem schönen Krystalle ist eine sehr eigenthümliche, man könnte fast sagen, eine der zuvor beschriebenen entgegengesetzte. Die vorderen Theile der Flächen $0P$ (links) und $\bar{P}\infty$ (rechts) sind positiv, und diese positive Spannung zieht sich vorn auch über die Flächen $\infty P$ herab, woselbst sie sogar eine nicht unbeträchtliche Stärke annimmt. Von den beiden hinteren Flächen $\infty P$ des links gezeichneten Individuums ist nur die eine (3) positiv, die andere (4) aber negativ. Die positive Elektricität breitet sich von den vorderen Flächen $\infty P$ auch noch über die benachbarten Theile der linken Fläche $\infty\bar{P}\infty$ aus. Am hinteren Ende der Fläche $\bar{P}\infty$ des linken Individuums findet sich ebenfalls eine schwache positive Zone von geringer Ausdehnung. Dagegen erscheint der ganze übrige Rest der Flächen $0P$ und $\bar{P}\infty$ am oberen Ende und der linken Fläche $\infty\bar{P}\infty$, sowie die ganze rechte Fläche $\infty\bar{P}\infty$ negativ. Die untere Bruchfläche ist zum grössten Theile negativ; nur hinten finden

*) Die ungemein zahlreichen, durch die feine mit der Orthodiagonale parallel gehende Streifung der Flächen erzeugten Beugungsbilder machten eine genaue Messung absolut unmöglich.

sich sowohl nach dem rechten, als auch dem linken Rande hin positive Zonen.

Die aus den Seitenflächen hervorragenden Quarzkrystalle stören durch eigene elektrische Erregung die Vertheilung auf dem Orthoklaskrystalle nicht merklich.

### *C. Orthoklas von Hirschberg in Schlesien.*

Krystall Nr. 24. Taf. IV. Fig. 24.

Die Masse dieses Krystalles ist undurchsichtig und schwach gelbbräunlich. Auf der Vorderseite bildet eine sehr unregelmässig verlaufende, mit kleinen Quarzkrystallen reichlich versehene Bruchfläche *b* die Begrenzung. Auf der Rückseite finden sich zwei Flächen ∞P ($t_3$ und $t_4$) und auf der linken Seite ein mit ∞P̶∞ paralleler Durchgang *m*.*) Am oberen Ende liegt vorn eine mit 0P parallele Durchgangsfläche *p* und hinten eine Fläche P̶∞ (*x*), aus deren Vorhandensein sich ergiebt, dass jene Durchgangsfläche nahe unter der natürlichen Krystallfläche gelegen hat. Am unteren Ende wird der Krystall nur von dem mit 0P parallelen Durchgange *p* begrenzt.

Auf der oberen Durchgangsfläche 0P (*p*), auf der vorderen Bruchfläche *b*, sowie auf den letzterer anliegenden Theilen der hinteren rechten Fläche ($t_3$) findet sich positive Spannung, dagegen negative auf der oberen Fläche P̶∞ (*x*), auf den übrigen Theilen der Fläche $t_3$, auf $t_4$, auf dem mit ∞P̶∞ parallelen Durchgange (*m*) und auf der unteren Durchgangsfläche 0P (*p*).

Krystall Nr. 25. Taf. IV. Fig. 25.

Der Krystall Nr. 25 von Lomnitz bei Hirschberg gleicht in seiner Masse und auch in seiner Gestalt dem vorhergehenden. Oben wird er von einer Fläche 0P (*p*), unten von einer Krystallfläche P̶∞ (*x*) und einem mit 0P parallelen Durchgange [*p*] begrenzt. Vorn liegen die Flächen ∞P (mit gespaltener klinodiagonaler Seitenkante), rechts eine mit ∞P̶∞ parallele, aber nicht sehr ebene Durchgangsfläche *m*

*) Auf der rechten Seite bei αβ läuft der Krystall in einen scharfen Rand aus, in welchem eine etwas grössere in der Abbildung nicht dargestellte Quarzmasse eingelagert ist.

und hinten eine mässig ebene Bruchfläche *b*. Auf der linken Seite stösst diese letztere Fläche mit der linken Fläche ∞P in einer unregelmässig verlaufenden Kante *αβ* zusammen.

Der Krystall ist merkwürdig durch die regelmässige Verwachsung mit Albitkrystallen, die besonders auf den beiden vorderen Prismenflächen ∞P sehr schön hervortreten; die entsprechenden Axen beider Mineralien liegen möglichst parallel.*) Er gehört, ebenso wie der vorhergehende, der hiesigen mineralogischen Sammlung.

Der grösste Theil der oberen Fläche 0P, sowie die Durchgangsfläche 0P und die Fläche P̶∞ am unteren Ende, und die vordere Hälfte der Durchgangsfläche *m* sind positiv; dagegen besitzen die vorderen Prismenflächen ∞P, die hintere Hälfte der Durchgangsfläche *m* und die hintere Bruchfläche *b* negative Elektricität. Die elektrische Vertheilung bei diesem Krystalle stimmt also im Allgemeinen mit der bei den Adularen beobachteten überein.

---

*) In die Zeichnung sind sie nicht aufgenommen.

## IV. Albit und Periklin.

Obwohl die Winkel an den Krystallen des Albits und Periklins wenigstens innerhalb der bei den Messungen möglichen Genauigkeit dieselbe Grösse zeigen, und auch die chemische Zusammensetzung der beiden Mineralien übereinzustimmen scheint, so sind dieselben doch in ihrem Aussehen, in ihrer Gesammtgestalt und namentlich in der Art der Zwillingsbildung so verschieden, dass ich es vorziehe, sie im Folgenden getrennt zu behandeln.

### A. *Albit.*

Die Krystalle des Albits gehören zum triklinoedrischen Systeme; es sind also alle drei Axenwinkel schiefe.

Fig. *8* Taf. IV stellt eine ziemlich einfache Combination vor; *t* und *l* sind die beiden vorderen Flächen des Prismas $\infty P$, welche jetzt mit der schiefen, in der Zeichnung sich vorn nach rechts neigenden Endfläche $0P$ ($p$) nicht mehr gleiche Winkel bilden, und also krystallographisch verschieden sind. Unterscheiden wir die beiden Diagonalen der Basis als Brachy- und Makrodiagonale und richten die Brachydiagonale von vorn nach hinten, so bezeichnet *m* die nach der oben S. 516 erläuterten Bestimmung linke Fläche des mit dem brachydiagonalen Hauptschnitte parallelen Flächenpaares $\infty P \infty$. *x* bezeichnet die eine Fläche von $\bar{P}\infty$ und *o* eine Fläche der Grundpyramide P.

Der Winkel zwischen den vorderen beiden Flächen *t* und *l* des Prismas $\infty P$ misst 120° 47′; der Winkel zwischen $0P$ ($p$) und $\bar{P}\infty$ ($x$) 127° 43′; der Winkel zwischen $0P$ ($p$) und *t* 110° 50′ und

zwischen 0P (*p*) und *l* 114° 42′; der Winkel zwischen der Fläche 0P (*p*) und der in der Zeichnung mit *m* bezeichneten Fläche ∞P̆∞ 93° 26′ und zwischen der Fläche 0P (*p*) und der anderen Fläche ∞P̆∞ 86° 24′.

Einfache Albitkrystalle gehören zu den Seltenheiten; meistens erscheint der Albit in Zwillingen und noch mehrfach zusammengesetzten Krystallen.

Ich habe vier theils durch Abbrechen frei gemachte, theils noch mehr oder weniger am Gesteine ansitzende Albitkrystalle untersucht. Die an den einzelnen Individuen auftretenden Gestalten sind: 0P, ∞P (mit beiden Flächenpaaren *t* und *l*), ∞P̆3 (*z*) und ∞P̆∞. An einem Individuum findet sich auch noch eine schmale Fläche, welche die Kante von *t* und ∞P̆3 abstumpft.

Es treten nun (Fig. ε Taf. IV) zwei Individuen zu einem Zwillinge in der Weise zusammen, dass als Zwillingsebene das mit dem brachydiagonalen Hauptschnitte parallele Flächenpaar ∞P̆∞, und als Umdrehungsaxe die Normale auf demselben erscheint. In Fig. ε sind die Flächen des zweiten um 180° gedrehten Individuums durch Striche an den Buchstaben von denen des ersten unterschieden. Da die Fläche 0P (*p*) nach rechts geneigt ist, so entsteht oben zwischen *p* und *p′* eine einspringende und unten eine ausspringende Kante von 172° 48′, und ebenso zwischen den Flächen *x* und *x′* oben eine einspringende und unten eine ausspringende Kante von 172° 42′.

Zwei solcher Zwillinge (Fig. ζ Taf. IV) legen sich nun wieder nach dem sogenannten Carlsbader Gesetze der Orthoklaszwillinge zusammen, für welche also hier der brachydiagonale Hauptschnitt die Zwillingsebene und die Hauptaxe die Umdrehungsaxe darstellt. Es entsteht dadurch oben zwischen *p* und *x* eine ausspringende und unten zwischen *x* und *p* eine einspringende Kante von 172° 45′.

Der Albit ist, wie der Orthoklas, parallel mit der Basis 0P und mit dem brachydiagonalen Hauptschnitte ∞P̆∞ sehr leicht spaltbar; ausserdem existiren noch, aber allerdings nur unvollkommene Spaltbarkeiten nach der Fläche *l* und nach der unteren vorderen linken Pyramidenfläche P (*o*). An den Richtungen der mit der Basis parallelen Sprünge sind die zuvor beschriebenen Doppelzwillinge sehr leicht zu erkennen.

Die vier von mir untersuchten Krystalle stammen sämmtlich aus dem Schmirnthale in Tyrol und sind farblos und ziemlich durchscheinend.

Obwohl das mir vorliegende Material ziemlich unvollkommen war, hat sich doch die elektrische Vertheilung auf den Albiten sehr leicht feststellen lassen. Die an den Enden der Hauptaxe gelegenen Flächen 0P und $\bar{P}\infty$ (*p* und *x*), sowie die mit dem brachydiagonalen Hauptschnitte $\infty\breve{P}\infty$ parallelen Flächen (*m*) sind positiv, dagegen die Flächen des verticalen Prismas $\infty P$ (*t* und *l*) negativ. Die elektrische Erregung dieser Albitkrystalle ist ziemlich stark.

### Krystall Nr. 1. Taf. IV. Fig. 1.

Der dem Tübinger Museum gehörige Krystall Nr. 1 ist ein Doppelzwilling und gleicht in seiner Bildung dem in Fig. ζ dargestellten; der rechts liegende Zwilling ist in der Richtung der Makrodiagonale etwas weniger dick als der links liegende. Der Gesammtkrystall zeigt nur seine vordere Hälfte ausgebildet, während die hintere Seite verbrochen ist. Fig. 1. Taf. IV stellt das Netz desselben dar, so gut es sich eben ausführen lässt, jedoch mit Ausnahme der Bruchfläche auf der hinteren Seite, welche in Fig. 1 *b* in einer Projection abgebildet ist.

Durch die beiden in ihm vereinigten Zwillingsbildungen wird das oben angegebene Gesetz der elektrischen Vertheilung in keiner Weise gestört. Auffällig ist, dass trotz der geringen Ausdehnung der negativen Polarität die oberen Theile der hinteren Bruchfläche positive Spannung zeigen; indess ersetzen die negativen Zonen, was ihnen an Ausdehnung fehlt, durch die Intensität der elektrischen Erregung.

### Krystall Nr. 2, 3 und 4. Taf. IV. Fig. 2, 3 und 4.

Die folgenden drei Krystalle sind dem hiesigen mineralogischen Museum entliehen.

Der Krystall Nr. 2 gleicht dem vorhergehenden, ist also ebenfalls ein Doppelzwilling; auch bei ihm ist die hintere Seite verbrochen. Ich bilde ihn Fig. 2 nur in einer seitlichen Ansicht ab. Auf dem

Absatze $\alpha$, wo an dem in der Zeichnung hinten liegenden Zwillinge die Flächen $p$ nochmals auftreten, erscheint wieder positive Spannung.

Der Krystall Nr. 3 besteht aus zwei sich kreuzenden und zum Theil durcheinander gewachsenen Doppelzwillingen $a$ und $b$. Fig. 3 stellt eine seitliche Ansicht desselben dar; in derselben sind nur die auf dem Doppelzwillinge $a$ beobachteten elektrischen Polaritäten, und zwar blos durch die eingetragenen Farben sichtbar gemacht.

Die beiden in Fig. 4 nur von ihrer vorderen Seite abgebildeten Doppelzwillinge sitzen mit ihrem hinteren Ende noch an der Gesteinsmasse fest. Bei $\beta$ liegen die unteren Flächen $p$ und $x$ des linken Doppelzwillings, wesshalb hier die positive Elektricität auftritt. Weiter abwärts bei $\gamma$ erscheinen wieder die Flächen $t$ und $l$ eines dritten Doppelzwillings, welche negative Spannung zeigen, während bei $\delta$ nochmals positive Spannung auf den daselbst vorhandenen Flächen $x$ und $p$ beobachtet wird.

## *B. Periklin.*

Die Krystalle des Periklins stimmen, wie schon oben bemerkt, in ihren Winkelverhältnissen mit den im Vorstehenden beschriebenen Albiten überein, unterscheiden sich aber in ihrer Gesammtgestalt sehr beträchtlich von ihnen. Während die Albite in der Richtung der Makrodiagonale zusammengedrückte, tafelartige Krystalle bilden, besitzen gerade umgekehrt die Periklinkrystalle gewöhnlich in der Richtung der Makrodiagonale die grösste Dimension. Dieser Unterschied hängt mit der Art des Ansetzens und Wachsthums der beiden Mineralien zusammen; während nämlich die Albite wohl meistens mit dem einen Ende der Brachydiagonale oder dem unteren Ende angewachsen sind, dient bei den Periklinen sehr gewöhnlich das eine Ende der Makrodiagonale als Ansatzpunkt. Ausserdem sind auch die Zwillinge des Albits und des Periklins auf verschiedene Weise gebildet.

Die einfachen Krystallformen, welche an den von mir untersuchten Periklinkrystallen auftreten, sind: $0P$ ($p$), $\infty P$ (beide Flächenpaare $t$ und $l$), $\infty \breve{P} \infty$ ($m$), $\bar{P} \infty$ ($x$), $\frac{1}{4} \bar{P} \infty$, $\frac{3}{2} \bar{P} \infty$ (?) und $P$ ($o$). Die Flächen $\infty \breve{P} \infty$ ($m$) erscheinen gewöhnlich durch oscillatorische Combination mit $\infty \breve{P} 2$ vertical gestreift; die Flächen $0P$ ($p$) sind häufig mit Chlorit überzogen.

Fig. η Taf. IV stellt die Ansicht eines solchen einfachen Periklinkrystalles in der üblichen krystallographischen Projection dar, bei welcher die obere vordere Fläche 0 P nach links geneigt ist.

Die Masse der Periklinkrystalle ist weiss, meistens trübe und nur an den Kanten durchscheinend.

Der Periklin kommt in einfachen Krystallen und in Zwillingen vor, und zwar finden sich unter den von mir untersuchten nach zwei verschiedenen Gesetzen gebildete Zwillinge.

Die elektrische Vertheilung auf den Periklinkrystallen stimmt im Wesentlichen mit der auf den Orthoklasen und Albiten beobachteten überein. Da jedoch die Hauptaxe bei den Periklinen nur kurz ist, also auch die prismatischen Seitenflächen ∞P nur eine geringe Ausdehnung haben, so tritt auf ihnen dieselbe Anordnung der Elektricitäten ein, wie wir solche oben S. 514 bei dem Orthoklase Nr. 8 gefunden haben. Hiernach ist nun die elektrische Vertheilung auf der Oberfläche der Periklinkrystalle folgende: Die beiden Flächen 0P (*p*) sind positiv, die beiden Flächen $\bar{P}\infty$ (*x*) aber negativ; ebenso zeigen die Flächen ∞P (*t* und *l*) negative Spannung. Die Flächen $\infty\breve{P}\infty$ (*m*) sind bei einigen Krystallen positiv, bei anderen negativ, und bei noch anderen fast unelektrisch.

Durch die Zwillingsbildung wird auch beim Periklin diese elektrische Vertheilung nicht geändert.

## a. Einfache Krystalle.

### Krystall Nr. 1. Taf. IV. Fig. 1.

Fig. 1. Taf. IV stellt das Netz dieses der Freiberger Sammlung gehörigen Krystalles dar, mit Ausschluss der verbrochenen linken Seite. Die elektrische Vertheilung auf den Flächen *p*, *x*, *t* und *l* ist die oben angegebene; die in der Zeichnung rechts liegende Fläche *m* ist stark positiv, die auf der linken Seite befindliche, nicht abgebildete Bruchfläche zeigt keine elektrische Spannung.

### Krystall Nr. 2. Taf. IV. Fig. 2.

Das Netz dieses ebenfalls der Freiberger Sammlung gehörigen Krystalles ist Fig. 2 Taf. IV abgebildet, jedoch mit Ausschluss der

verbrochenen rechten Seite. Die untere Fläche 0 P ($p$) ist ziemlich dicht mit Chlorit überzogen, und zeigt wahrscheinlich dieses Umstandes wegen eine geringere positive Spannung als die obere Fläche 0 P. Auf der unteren Seite liegt neben $x$ noch eine Fläche von $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$. Die links gezeichnete Fläche $m$ ist positiv; auffällig ist dabei dass die Mitte derselben schwächer elektrisch ist als ihr Umfang; die rechte verbrochene Seite zeigt keine elektrische Spannung.

### Krystall Nr. 3. Taf. IV. Fig. 3.

Der ringsum ziemlich gut ausgebildete Krystall Nr. 3 gehört der hiesigen mineralogischen Sammlung; Fig. 3 stellt sein Netz dar. Die obere Fläche $x$, ebenso wie die beiden Flächen $m$ (von denen die rechts liegende am vollkommensten ausgebildet ist) zeigen nur äusserst geringe elektrische Spannungen.

### Krystall Nr. 4. Taf. IV. Fig. 4.

Der von Pfitsch stammende und gleichfalls dem hiesigen mineralogischen Museum gehörige Krystall Nr. 4 ist auf der linken Seite angewachsen gewesen und jetzt daselbst verbrochen ($b$). Die elektrische Erregung desselben ist stark. Die eine rechts vorhandene Fläche $\infty\breve{P}\infty$ ($m$) ist negativ; und eben diese Polarität findet sich auch auf der Bruchfläche $b$ an der linken Seite, jedoch ist dieselbe beträchtlich schwächer als auf der Krystallfläche $m$. Auch auf den Flächen $p$ und $x$ zeigt sich eine deutliche Zunahme der elektrischen Intensität in der Richtung von der verbrochenen linken Seite nach der ausgebildeten rechten hin.

### Krystall Nr. 5. Taf. IV. Fig. 5.

Der Krystall Nr. 5 ist vorn und auf der rechten Seite stark verletzt; ich bilde deshalb nur die obere Seite desselben nebst der linksliegenden Fläche $\infty\breve{P}\infty$ ($m$) ab. Auf dieser oberen Seite erscheint neben einer schmäleren Fläche $\bar{P}\infty$ ($x$) eine breitere Fläche $\frac{1}{2}\bar{P}\infty$; dieselbe besitzt ebenso, wie die Fläche $x$ negative Spannung. Eben diese Polarität zeigt auch die linke abgebildete Fläche $\infty\breve{P}\infty$ ($m$).

Krystall Nr. 6. Taf. IV. Fig. 6.

Der dem hiesigen mineralogischen Museum gehörige, von Pfitsch stammende Krystall Nr. 6 ist ziemlich gut ausgebildet. Die obere Fläche *p* zeigt nur einzelne Chloritschüppchen, während die untere Fläche *p* ziemlich dicht mit solchen besetzt ist. Während nun die obere Fläche *p* eine nicht unbeträchtliche positive Spannung besitzt, ist auf der unteren, wahrscheinlich infolge ihrer Bedeckung mit Chlorit, kaum eine Spur derselben wahrzunehmen. Da die beiden auf der rechten Seite liegenden Flächen *l* und *l* viel grösser sind als ihre parallelen Flächen auf der linken, so nimmt der Krystall eine nach der Richtung der Makrodiagonale etwas unsymmetrische Gestalt an.

## b. Zwillingskrystalle.

### α. Zwillingskrystalle der ersten Art.

Die Zwillinge des Periklins sind meistens nach folgendem Gesetze gebildet: Zwillingsaxe die in der Basis liegende Normale auf der Brachydiagonale, Zusammensetzungsfläche die Basis.

Die beiden Flächen 0P, in welchen das Zusammenwachsen erfolgt, sind zwar parallel, decken sich aber, weil die Drehung um die Normale auf der Brachydiagonale erfolgt, nicht vollständig; es fallen zwar ihre Brachydiagonalen zusammen, dagegen sind die Makrodiagonale oder die mit ihnen dieselbe Richtung inne haltenden Kanten von 0P und $\bar{P}\infty$ nicht parallel, sondern schneiden sich unter einem sehr spitzen Winkel. Durch diese Anordnung entstehen auf den Seitenflächen $\infty\breve{P}\infty$ (*m*) ein- und ausspringende Kanten von 172° 48′, und zwar kann, wenn wir die Fig. η gewählte Stellung beibehalten, die einspringende Kante rechts, die ausspringende links, oder die einspringende links und die ausspringende rechts liegen, je nachdem die beiden Individuen ihre unteren oder oberen Flächen einander zukehren. In den Figg. ϑ und ι sind zwei solche Zwillinge dargestellt. In Fig. ϑ liegt die einspringende Kante rechts und die ausspringende links, während in Fig. ι die einspringende links und die ausspringende rechts liegt.*) Die Zusammensetzungsfläche verläuft

*) Die beiden Figuren ϑ und ι sind einer Abhandlung von G. Rose (Pogg. Annal. Bd. 129. Taf. I) entnommen.

oft sehr unregelmässig, so dass auf den Flächen $\infty \breve{P} \infty$ (*m*) die ein- und ausspringenden Kanten einen unregelmässigen, vielfach geknickten Verlauf zeigen.

### Krystall Nr. 7. Taf. IV. Fig. 7.

Der aus Ober-Wallis stammende und dem Tübinger Museum gehörige Krystall unterscheidet sich in der Beschaffenheit seiner Masse sehr von den Tyrolern aus dem Pfitschthale. Seine Masse ist etwas durchscheinender und seine Oberfläche glätter als bei den Tyrolern; auch ist die Oberfläche an vielen Stellen mit braunem Eisenoxyd bedeckt. An der rechten hinteren Ecke bei $\alpha\beta$ liegen andere Periklinmassen. Die einspringende Kante von 172° 48′ liegt bei diesem Zwillinge auf der linken Fläche $\infty \breve{P} \infty$ (*m*). Fig. 7. Taf. IV stellt, so gut es ausführbar ist, das Netz dieses Krystalles in halber Grösse dar. Die Linie *abcdef* giebt den Verlauf der Zusammensetzungsfläche auf der linken Seite an.

Um die einzelnen Flächen besser hervortreten zu lassen, habe ich von den beobachteten Werthen der elektrischen Spannungen nur einzelne eingetragen.

### Krystall Nr. 8. Taf. IV. Fig. 8.

Von einer der hiesigen mineralogischen Sammlung gehörigen und vorzugsweise aus zwei grossen unregelmässig verwachsenen Zwillingskrystallen bestehenden Druse aus Tyrol bilde ich Fig. 8 nur die obere Seite (so weit sie frei ist) eines dieser Zwillinge nebst der links gelegenen Fläche $\infty \breve{P} \infty$ (*m*) in halber Grösse ab. Die auf dieser linken Fläche sichtbare Zwillingskante *ab* ist eine einspringende.

### β. Zwillingskrystalle zweiter Art.

Diese Zwillingskrystalle entsprechen den nach dem dritten Gesetze gebildeten Zwillingen des Orthoklases (S. 519). Man erhält sie also nach dem Gesetze: Zwillingsaxe die Normale auf 0P, Zusammensetzungsfläche 0P.

### Krystall Nr. 9. Taf. IV. Fig. 9.

Mir lag nur ein einziger, an der einen Seite verbrochener Krystall, der auf Taf. IV. Fig. 9 in halber Grösse abgebildet ist, vor. Ein Fundort ist nicht angegeben; seine ganze äussere Beschaffenheit

weist aber auf Pfunders in Tyrol hin. So viel sich an dem auf seiner linken Seite verbrochenen Krystalle erkennen lässt, ist er ein einfacher Zwilling nach dem in der Ueberschrift angegebenen Gesetze.*) Die *t* Flächen bilden vorn rechts die ausspringende, die *l* Flächen hinten rechts die einspringende Kante. Auf der rechten Seite entsteht durch das Zusammentreffen der beiden Flächen $\infty \breve{P} \infty$ (*m*) eine sehr stumpfe ausspringende Kante.

Jedes der beiden den Zwilling bildenden Individuen stellt eine Combination von 0P (*p*), $\frac{4}{3}\breve{P}\infty$ (*w*), $\infty P$ (*t* und *l*), $\infty\breve{P}\infty$ (*m*) dar, wozu noch schmale Flächen kommen, welche die Kanten zwischen *m* und *t*, und zwischen *m* und *l* abstumpfen, und wahrscheinlich dem Prisma $\infty\breve{P}\frac{3}{2}$ angehören, und endlich noch eine Fläche einer Pyramide, welche oberhalb $\infty\breve{P}\frac{3}{2}$ an den Endpunkten der Kanten zwischen *p* und *w* sich zeigt.

In die Zeichnung des Netzes Fig. 9 sind nur die Flächen *p*, *w*, *t*, *l* und *m* aufgenommen, und die Flächen des zweiten Individuums von denen des ersten durch Striche (*p'*, *w'*, *t'*, *l'*, *m'*) unterschieden. Die Bruchfläche auf der linken Seite ist in *b* dargestellt.

Der vorliegende Zwilling zeigt noch die Eigenthümlichkeit, dass das eine Individuum gegen das andere etwas parallel mit der Fläche 0P (*p*) verschoben ist. Nennen wir das Individuum, dessen Flächen *p*, *w*, *t*, *l*, *m* sind, das obere, das andere das untere, so ist das untere Individuum um ungefähr 1,5$^{mm}$ nach hinten verschoben.**)

Die Masse des Krystalles ist weiss und kaum durchscheinend; die Oberfläche desselben überall mit Chlorit bedeckt. In seinem elektrischen Verhalten stimmt er im Allgemeinen mit den früher beschriebenen Krystallen überein.

*) G. Rose beschreibt in seiner Abhandlung über die regelmässigen Verwachsungen, welche bei den Periklin genannten Abänderungen des Albits vorkommen (Pogg. Annal. Bd. 129 S. 1 ff.) ausser den in dem vorhergehenden Abschnitte behandelten und zuerst von Kayser (Pogg. Annal. Bd. 34. S. 109) richtig erklärten Zwillingen auch noch Zwillinge, bei welchen die Zwillingsaxe die Normale auf einer durch die kurze Diagonale von 0P gehenden und auf 0P senkrechten Ebene, und die Zusammensetzungsfläche diese Ebene selbst ist. Diese Zwillinge wachsen durch einander hindurch, und zwei solche durcheinander gewachsene Zwillinge verbinden sich wieder zu einem Doppelzwillinge nach dem Gesetze: Zwillingsaxe die Normale auf 0P und Zusammensetzungsfläche 0P. Der oben von mir beschriebene Zwilling ist einfacher gebildet.

**) In dem Netze liess sich dieser Umstand nicht wohl darstellen.

## Berichtigung.

S. 489 Z. 8 v. u. lies C′ anstatt C.

# DIOPTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

INSBESONDERE

# ÜBER DAS HANSEN'SCHE OBJECTIV

VON

**W. SCHEIBNER**

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

Des XI. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N° VI.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1876.

Vom Verfasser übergeben den 15. Februar 1876.
Der Abdruck vollendet den 20. August 1876.

# DIOPTRISCHE UNTERSUCHUNGEN

INSBESONDERE

## ÜBER DAS HANSEN'SCHE OBJECTIV

VON

**W. SCHEIBNER.**

# Vorwort.

Veranlassung zu eingehenderer Beschäftigung mit der theoretischen Dioptrik hat dem Verfasser die Herausgabe der hinterlassenen dioptrischen Untersuchungen Hansen's (Band X dieser Abhandlungen) gegeben. Das Studium der einschlagenden Arbeiten namentlich von Fraunhofer, Gauss und Hansen ermunterte ihn zu dem Versuche, einige daselbst enthaltene Winke weiter zu verfolgen, und das Resultat dieser Bemühungen erlaubt er sich in der gegenwärtigen Abhandlung vorzulegen.

Die dioptrischen Formeln schrecken auf den ersten Blick durch ihre Complication zurück, wenigstens wenn man über die erste Approximation hinausgehen will, und es wird schwerlich gelingen, sogenannte »elegante« Entwickelungen darauf zu gründen; dennoch ist es nicht ohne Reiz für den Mathematiker, den spröden Stoff nach Möglichkeit schmiegsam zu machen. Diesem Versuche sind die ersten Paragraphen der Abhandlung gewidmet; in den Reihenentwickelungen haben die den vierten Potenzen der Oeffnung proportionalen Glieder vollständig berücksichtigt werden können.

Bei der Aufstellung der Bedingungen für die Construction eines aplanatischen und achromatischen Linsensystems habe ich mich einiger Andeutungen von Gauss bedient, die derselbe vermuthlich aus dem Grunde nicht selbst weiter entwickelt hat, weil die für die Gestalt der sphärischen Oberflächen daraus sich ergebenden Modificationen bei dem damaligen Stande der praktischen Optik innerhalb der Fehlergrenzen der mechanischen Ausführung gefallen sein würden. Heute scheint die Sache anders zu liegen: ein Künstler wie Steinheil erklärte vor bereits 15 Jahren in einem Berichte an die K. Bayrische Akademie der Wissenschaften*): »die Ausführung selbst bietet keine »Schwierigkeit, wenn man im Besitze der Hülfsmittel ist, die gestatten, einen »Halbmesser auf fünf Zifferstellen genau herzustellen und Abweichungen der »siebenten Zifferstelle in der Sphäre zu erkennen«, und wie in Deutschland so hat auch im Auslande die praktische Optik in den letzten Jahrzehnten weitere anerkannte Fortschritte gemacht.

Aus diesem Grunde erscheint es gegenwärtig auch unerlässlich, die Zerstreuungsverhältnisse der angewandten Gläser mit möglichster Schärfe zu bestimmen, was freilich nur dann geschehen kann, wenn nach dem mustergültigen Vorgange Fraunhofer's die Optiker sich gewöhnen, die verschiedenen Glassorten in Bezug auf die Brechungsverhältnisse der einzelnen Strahlen des Spectrums auf das Genaueste zu untersuchen. Gauss und Hansen haben bei den von ihnen mitgetheilten Rechnungsbeispielen die rothen und violetten Strahlen zur Vereinigung gebracht, wodurch natürlich auch die zwischenliegenden Strahlen — an verschiedenen Punkten der Axe — paarweise zur Deckung gelangen. Es findet dabei gewissermassen ein Zusammenklappen des Spectrums statt, so dass an der Stelle des Umklappens die betreffenden Strahlen mit sich selbst zusammenfallen. Für die Deutlichkeit des Bildes dürfte es am vortheilhaftesten sein, da wo dasselbe entstehen resp. durch das Ocular beobachtet werden soll, die hellsten Strahlen mit sich selbst zur Vereinigung zu bringen. Dem entsprechend wird es sich empfehlen, auch die Zerstreuungsverhältnisse nicht aus den Differenzen der Brechungsexponenten der Strahlen vom Ende des Spectrums zu berechnen, sondern den genauen

*) Siehe Göttinger Nachrichten S. 80 f., Sitzung der Göttinger Societät vom 9. März 1861.

Werth des Differentialquotienten $dn' : dn$ für die hellsten Strahlen des Spectrums zu Grunde zu legen. FRAUNHOFER hat bereits versucht, bei der Berechnung des Zerstreuungsverhältnisses auf die relative Intensität der verschiedenen Strahlen des Spectrums Rücksicht zu nehmen, sieht sich aber gleichwohl zu dem Bekenntniss genöthigt, dass sich empirisch ein von dem berechneten abweichender Werth jenes Verhältnisses als vortheilhafter herausgestellt habe. Jener empirisch gefundene Werth stimmt für die betreffenden Glassorten mit dem erwähnten Werthe des Differentialquotienten $dn' : dn$ für die intensivsten Strahlen des Spectrums genau überein.

Ich habe versucht, das von HANSEN in seinen »dioptrischen Untersuchungen« angegebene Objectiv von drei Brechungen nach den dargelegten Principien zu berechnen, und dabei den von GAUSS gegebenen Andeutungen entsprechend nicht allein das von ihm und BESSEL, als Maass der durch die sphärische Abweichung entstehenden Undeutlichkeit, aufgestellte Integral zu einem Minimum zu machen, sondern auch die Linsendicken so zu bestimmen, dass die Strahlen von verschiedener Wellenlänge nahezu gleich grosse Bilder liefern. HANSEN hat zwei Objective berechnet, bei denen das Flintglas auf das Kronglas folgt. Kehrt man die Ordnung beider Linsen um, so erhält man zwei andere Objective von mässigen Krümmungen, von denen das eine in Bezug auf die Dicke der Linsen gewisse Vortheile darbietet. Die Anwendung einer allgemeinen Approximationsmethode gestattet, wenn man in der ersten Annäherung die Linsendicken vernachlässigt, dieselben später nebst den in die vierte Potenz des Oeffnungshalbmessers multiplicirten Gliedern so genau als man will in Rechnung zu ziehen.

Da die allgemeinen Formeln für eine unbestimmte Anzahl von Brechungen entwickelt worden sind, so ist es nicht schwer, auch die Vorschriften für Linsensysteme von vier und sechs Brechungen abzuleiten. Mit der Anzahl der verfügbaren Grössen wächst aber die Anzahl der erfüllbaren Bedingungen, und so habe ich neben der Bedingung der Achromasie für die Glieder der nächstfolgenden Ordnung, auch die von JOHN HERSCHEL empfohlene Bedingung untersucht, welche der Forderung der Accommodation für eine Aenderung der Entfernung des beobachteten Objects entspricht, und deren Erfüllung für terrestrische Beobachtungen, photographische Zwecke u. s. w. nicht unwichtig erscheint.

Bei vier Brechungen gestalten sich die Bedingungsgleichungen am einfachsten, wenn man entweder mit GAUSS zwei durch Luft getrennte Glaslinsen, oder mit HANSEN ein System von drei aneinanderstossenden Linsen betrachtet, von denen die erste und dritte gleiche Brechungsexponenten besitzen. HANSEN hat gezeigt, dass im letzteren Falle der GAUSS'schen Bedingung der Achromasie für die Glieder der zweiten Ordnung durch reelle Linsenkrümmungen nicht genügt werden kann; ein Resultat, welches sich auch für die von uns zu Grunde gelegte Form der Bedingungsgleichungen bestätigt. Die HERSCHEL'sche Bedingung führt ebensowenig auf reelle Krümmungen.

Als Beispiel für sechs Brechungen endlich ist ein sogenanntes dialytisches Objectiv näher ins Auge gefasst worden, welches aus zwei durch einen grösseren Zwischenraum getrennten Linsensystemen von je drei Brechungen besteht, denen ihrerseits gleiche Krümmungs- und Brechungsverhältnisse, aber in umgekehrter Lage, zukommen. Diese Einrichtung gestattet die früher zur Bestimmung der Dicken eingeführte Bedingung trotz des grossen Abstandes der beiden Systeme aufrecht zu erhalten.

Es ist vielleicht nicht überflüssig, wenn ich ausdrücklich hinzufüge, dass diese »dioptrischen Untersuchungen« Nichts weniger als den Zweck einer abschliessenden Theorie für die Berechnung von sphärischen Linsensystemen verfolgen. Bekanntlich ist es wünschenswerth, dass ein gutes Objectiv eine Menge Eigenschaften in sich vereinige, die sich bei sphärischen Linsen streng genommen gar nicht vereinigen lassen, so dass der Optiker schliesslich auf den Weg des Compromisses angewiesen ist. Von solchen Bedingungen, deren

Erfüllung mehr oder weniger wünschenswerth ist, habe ich einige untersucht, andere vielleicht nicht minder wichtige ganz unberührt gelassen; namentlich ist von den Strahlen, welche mit der Axe nicht in einer Ebene liegen und der Beschaffenheit der durch sie erzeugten Bilder, gar nicht die Rede. Eine vollständige Theorie wird letztere natürlich gleichfalls zu betrachten haben, wie von SCHLEIERMACHER, SEIDEL, HANSEN, ZINKEN-SOMMER u. A. mit Erfolg geschehen ist. Besondere Genugthuung würde es dem Verf. gewähren, wenn den in der gegenwärtigen Arbeit betonten Gesichtspunkten von den praktischen Optikern einige Aufmerksamkeit geschenkt würde, denn noch heisst es auf diesem Gebiete »Probiren geht über Studiren«!

---

Es sei mir gestattet, bei dieser Gelegenheit zu S. 705 der zweiten dioptrischen Abhandlung des X. Bandes eine Berichtigung folgen zu lassen, auf deren Nothwendigkeit ich durch Herrn Dr. SEELIGER aufmerksam gemacht worden bin. Wenn a. a. O. gesagt ist, dass »die Zuziehung der Veränderung »von $\pi$, $\pi'$ und $L$ nur Glieder höherer Ordnung als die, welche überhaupt »berücksichtigt worden sind, hervorbringen würde«, so ist diese Behauptung offenbar nicht zutreffend. Denn $\pi$ und $\pi'$ erhalten die Incremente oter Ordnung $\eta\lambda\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k'}\right)$ und $\eta'\lambda'\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k'}\right)$, wenn $k$ in $k'$ übergeht, und damit bekommt natürlich auch $L$ einen von $\frac{1}{k}-\frac{1}{k'}$ abhängenden Zuwachs gleicher Ordnung. Der Verfasser scheint seine Vernachlässigung auf den Umstand gegründet zu haben, dass sich allerdings die Differenz $n'(\pi'-\lambda')-n(\pi-\lambda)$ wie eine Grösse zweiter Ordnung verhält, wenn $\lambda$ und $\lambda'$ den Durchschnittspunkten zweier Strahlen vor und nach der Brechung angehören.

Um die vollständigen Gleichungen $(C)(D)$ resp. $(C')(D')$ und $(C'')(D'')$ zu erhalten, wird man auch in den mit $k^2$ behafteten Gliedern der Gl. $(B)$ $\pi$ und $\pi'$ zu eliminiren haben. Die Rechnung führt auf die folgenden Ausdrücke, in denen $R-\lambda=\varrho$ gesetzt worden ist:

$$n'\lambda'\eta' = n\lambda\eta + \frac{n(n'-n)}{2n'n'}\left\{\varrho(n\varrho-n'\lambda)\left[\varrho(k+k')+3\lambda\eta\right]kk'-(n'+n)\lambda^3\eta^3\right\} \quad (C)$$

$$n'\lambda' = n\lambda+(n'-n)R+\frac{n(n'-n)}{2n'n'}\left\{\varrho(n\varrho-n'\lambda)\left[\varrho(k^2+kk'+k'^2)+3\lambda\eta(k+k')\right]+\right.$$
$$\left.+\left[(3n+n')\varrho-2n'\lambda\right]\lambda^2\eta^2\right\} \quad (D)$$

mithin für $k'=k$

$$n'\lambda'\eta' = n\lambda\eta+\frac{n(n'-n)}{2n'n'}\left\{(n\varrho-n'\lambda)(2\varrho k+3\lambda\eta)\varrho k^2-(n'+n)\lambda^3\eta^3\right\} \quad . \quad (C')$$

$$n'\lambda' = n\lambda+(n'-n)R+\frac{n(n'-n)}{2n'n'}\left\{3(n\varrho-n'\lambda)(\varrho k+2\lambda\eta)\varrho k+\right.$$
$$\left.+\left[(3n+n')\varrho-2n'\lambda\right]\lambda^2\eta^2\right\} \quad (D')$$

sowie für $k'=0$

$$n'\lambda'\eta' = n\lambda\eta-\frac{n(n'^2-n^2)}{2n'n'}\lambda^3\eta^3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (C'')$$

$$n'\lambda' = n\lambda+(n'-n)R+\frac{n(n'-n)}{2n'n'}\left\{(n\varrho-n'\lambda)(\varrho k+3\lambda\eta)\varrho k+\right.$$
$$\left.+\left[(3n+n')\varrho-2n'\lambda\right]\lambda^2\eta^2\right\} \quad (D'')$$

Ausserdem bemerke ich, dass S. 750, Z. 5 $R'-\pi$ statt $R'-\pi'''$, S. 777, Z. 2 »Krümmungen der brechenden Oberflächen«, S. 780, Z. 15 $R''=+0.03041$, so wie S. 782, Z. 10 »Einheit« statt »Brennweite« zu lesen ist.

Endlich kann ich eine in Nr. 2049 der »Astronomischen Nachrichten« abgedruckte Kritik der »Irrthümer«, welche die in Rede stehende Abhandlung enthalten soll, um desswillen nicht ganz mit Stillschweigen übergehen, weil ein daselbst befindliches Citat des »Archiv für mikroskopische Anatomie« geeignet erscheint, das astronomische Publicum zu induciren. Die Artt. 77 und 78 der HANSEN'schen Abhandlung (die den Schluss des bekanntlich unvollendet hinterlassenen Manuscripts bilden) enthalten als numerisches Beispiel die Berechnung zweier aplanatischen Loupen *), bei denen die Randstrahlen mittlerer Brechung mit den gleichen Centralstrahlen zur Vereinigung gebracht worden sind. Den Schlusssatz bilden die folgenden Worte:

»Dass aplanatische Loupen der in Rede stehenden Form mit Erfolg ausgeführt »werden können, ist praktisch nachgewiesen, da die Herren STEINHEIL solche »anfertigen, die im ganzen nicht unbeträchtlichen Gesichtsfelde sehr reine »Bilder geben. Dass der Mangel an Achromasie hier keine merkliche Un»deutlichkeit hervorbringt, kann vielleicht als eine besondere Eigenthümlich»keit des Auges angesehen, und damit erklärt werden, dass das Auge bei »der Betrachtung eines Gegenstandes durch eine Loupe für die Abweichung »wegen Kugelgestalt weit empfindlicher ist, als für den Chromatismus.«

Es ist dem Autor sicher nicht beigefallen, dass in diesen Worten Jemand eine Herabsetzung der STEINHEIL'schen Loupen, »die im ganzen nicht unbeträchtlichen Gesichtsfelde sehr reine Bilder geben«, erblicken könnte. Dennoch knüpft der Kritiker daran die Anklage, die besagte Abhandlung enthalte »Behauptungen, welche durch die Praxis geradezu widerlegt werden«. Während HANSEN den Umstand, dass der Mangel an Achromasie hier keine merkliche Undeutlichkeit hervorbringe, durch eine Eigenthümlichkeit unseres bekanntlich selbst nicht achromatischen Auges**) zu erklären versucht, »erlaubt »sich dem gegenüber« unser Kritiker »zu constatiren, dass der Grund, wess»halb das Auge keine Farbenabweichung bei den aplanatischen Loupen be»merkt, einfach der ist, dass jene Loupen in Wirklichkeit achromatisch »sind, wie Solches MAX SCHULTZE gezeigt hat«. Dabei wird wie erwähnt auf das »Archiv für mikroskopische Anatomie«, Bd. II, S. 281, 1866 verwiesen.

Vergegenwärtigen wir uns den Sachverhalt. HANSEN zieht aus den auf Grund seiner Theorie entworfenen und in den Artt. 71—73 ausführlich dargelegten Rechnungsbeispielen (deren Resultate durch die Artt. 90—92 des Nachtrags eine geringe Modification erleiden) den Schluss, dass der von ihm theoretisch in bestimmter Form entwickelten Bedingung des Achromatismus durch ein Linsensystem von der in Rede stehenden Form überhaupt nicht genügt werden könne, also selbstverständlich auch nicht durch die STEINHEIL-schen Loupen, deren praktische Vorzüglichkeit gleichwohl constatirt wird. Als Gegenbeweis wird nun von dem Kritiker »einfach« jenes Citat und die Autorität von MAX SCHULTZE ins Treffen geführt. Wer daraus den Schluss ziehen wollte, dass in der citirten — aber wohlweislich nicht mitgetheilten — Stelle die Achromasie der Loupen durch eine exacte Rechnung dargethan worden oder wenigstens die Daten enthalten seien, um eine solche Rechnung anzustellen,

---

*) Da hierbei nur die Dicke der mittleren Linse in Rechnung gezogen ist, so fügt der Verf. am Schlusse des Art. 76 ausdrücklich die Worte hinzu: »Zur »scharfen und definitiven Berechnung einer solchen aplanatischen Loupe gehört »übrigens noch die Zuziehung der Dicken der beiden äusseren Linsen, die im »Vorstehenden übergangen worden sind. . . . Sie sollen übrigens weiter unten »angegeben werden.« Die verheissene Angabe ist jedoch wegen Nichtvollendung der Abhandlung unterblieben.

**) GAUSS drückt diess im Art. 22 seiner dioptrischen Untersuchungen mit folgenden Worten aus: »Es ist also klar, dass um im Auge ein vollkommen »farbenreines Bild hervorzubringen, das erste Bild eine gewisse von . . . dem Nicht»achromatismus des menschlichen Auges abhängende Längenabweichung haben muss.«

würde sich gleichwohl in völliger Täuschung befinden, wie aus dem Wortlaute jener Stelle, den wir uns anzuführen erlauben wollen, erhellt. »Herr Dr. STEINHEIL«, sagt nämlich der Herausgeber des Archivs, »hatte die Güte, mir eine Reihe seiner »zu Hand- und Präparirübungen geeigneten Linsen zur Prüfung einzusenden. »Da dieselben ein ebenes, unverzerrtes, in und ausser der Axe achromatisches »Bild geben und sich dadurch vor anderen Loupen sehr vortheilhaft auszeichnen, »auch einen sehr grossen Objectabstand zulassen, so hat ich den Verfertiger »um eine Notiz über das Princip, nach welchem dieselben construirt seien. »Mit sehr dankenswerther Bereitwilligkeit ist Herr Dr. STEINHEIL meiner Bitte »nachgekommen und gestattet mir die Veröffentlichung nachstehender Angaben, »welche bis auf die Brechungsindices der angewandten Glassorten, welche »natürlich ein Geheimniss des Verfertigers bleiben, jeden wünschbaren Auf- »schluss gewähren.«

Hieraus geht zunächst nur hervor, dass Herr Prof. SCHULTZE die Bilder, in völliger Uebereinstimmung mit HANSEN, in und ausser der Axe achromatisch gesehen habe. Wenden wir uns also zu jenen Aufschlüssen über das Princip der Construction. Für unseren Zweck kommen davon lediglich die folgenden Angaben über die Dimensionen in Betracht:

$$r_1 = +28''' \quad r_2 = +13''' \quad r_3 = -13''' \quad r_4 = -28'''$$
$$d_1 = 3''' \quad d_2 = 6''' \quad d_3 = 3'''$$
$$\Phi = 35''' \text{ (wahre Brennweite)}$$

»Die Combination ist in Bezug auf den optischen Mittelpunkt vollkommen »symmetrisch: eine biconvexe Crownglaslinse zwischen zwei Menisken aus »Flintglas.« Es ist aber auch für den Laien klar, dass über die Frage der Achromasie auf dem Wege der exacten Rechnung nicht ohne Kenntniss der speciellen Brechungs- und Zerstreuungsverhältnisse der Linsen entschieden werden kann. Da letztere in den gegebenen Aufschlüssen nicht enthalten sind, so bleibt also nur die Berufung auf die Geheimnisse der Optiker, mit welcher die Kritik der Nr. 2049 die Resultate der in aller Vollständigkeit mitgetheilten theoretischen und numerischen Rechnungen HANSEN's dem astronomischen Publicum gegenüber für widerlegt erachtet.

Der Inhalt des KRÜSS'schen Aufsatzes mit seinen unerwiesenen Behauptungen macht den Eindruck einer ungeschickten Reclame. Glücklicherweise bedürfen die STEINHEIL'schen Loupen einer solchen überhaupt nicht: es wäre in der That schlimm, wenn die durch Männer wie HANSEN und MAX SCHULTZE bezeugte praktische Vorzüglichkeit derselben von der Richtigkeit oder Unrichtigkeit der in der HANSEN'schen Abhandlung entwickelten Theorie abhängen sollte. Für den unbefangenen Beurtheiler kann eine solche theoretische Untersuchung nur den Zweck haben, von den »Geheimnissen der Optiker« den Schleier ein wenig zu lüften und ihnen Fingerzeige zu verschaffen, ihre Fabrikate womöglich noch weiter zu vervollkommnen. Dass dieses Ziel nicht mittelst der analytischen Rechnung allein erreicht werden kann, gibt der Schreiber dieser Zeilen am bereitwilligsten zu: gerade die Geschichte der Optik lehrt, dass der Vereinigung von Theorie und Praxis die für die Beobachtungskunst erfolgreichsten Fortschritte zu verdanken sind. Wo beide Richtungen sich die Hand reichen müssen, ist ein Versuch die Theorie zu fördern, ebenso dankenswerth, wie die auf Vervollkommnung der praktischen Ausführung gerichteten Bemühungen. In dieser Ueberzeugung sollen ihn weder allgemeine Bemerkungen über die Unzulänglichkeit der Analysis auf diesem Gebiete, noch die neuerdings hervorgetretene Neigung, dergleichen Studien als Beeinträchtigungen fremder Autorenrechte zu behandeln, wankend machen.

# Inhaltsverzeichniss.



---

# Berichtigungen.

S. 545, Z. 6 v. u. lies $\varrho_1(\pi_1 - \pi'')$ statt $\varrho$.

S. 548 resp. 553 kann man der Vollständigkeit halber die Gleichungen hinzufügen:

$$\frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{r_k \lambda_{k-1}}{\lambda_k} + \frac{p_1 p_2 \ldots p_k}{\lambda_k} \cdot \frac{u_1 u_2 \ldots u_k}{u_2 u_3 \ldots u_{k+1}}$$

$$\frac{1}{m_i \pi^i} = -\frac{\lambda_{2i-2}}{\lambda_{2i-1}} + \frac{1}{\lambda_{2i-1}} \cdot \frac{\pi_1 \pi_2 \ldots \pi_{i-1}}{m_i \pi' \pi'' \ldots \pi^i}$$

$$\frac{1}{\pi^i} = \frac{m_i}{\lambda_{2i-1}} \left\{ \frac{E_i}{m \pi_0} - \lambda_{2i-2} \right\}$$

S. 555, Z. 4 v. u. lies $a + C\nu^2 K^4$ statt $C\nu^2 K^2$.

S. 572, Z. 3 v. u. lies $(\varrho_1 + \varrho_2 - 3\pi'')$ statt $-3\pi_2$.

# Dioptrische Untersuchungen.

## §. 1. Bezeichnungen und strenge Formeln.

Gegeben sei ein System brechender sphärischer Oberflächen $O O_1 O_2 \ldots$, deren Mittelpunkte $R R_1 R_2 \ldots$ sämmtlich in der Axe $OA$ liegen. Die Radien $OR = r$, $O_1 R_1 = r_1$, $O_2 R_2 = r_2 \ldots$ sollen positiv im Sinne der aufeinanderfolgenden Medien $M M_1 M_2 \ldots$ gerechnet werden. Wir bezeichnen durch $m m_1 m_2 \ldots$ die Brechungsverhältnisse der letzteren (d. h. die Verhältnisse der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichts im Vacuum zu den Geschwindigkeiten, welche in den bez. Medien stattfinden,) und durch $OO_1 = d_1$, $O_1 O_2 = d_2 \ldots$ ihre in der Axe gemessenen Dicken.

Ein Lichtstrahl in der Ebene der Axe wird durch seine beiden Durchschnitte $P$ und $Q$ mit der Axe und der Fläche $O$ bestimmt. Nach der ersten Brechung schneide er in $P_1$ und $Q_1$ die Axe und die Fläche $O_1$, nach der zweiten Brechung in $P_2$ und $Q_2$ die Axe und die Fläche $O_2$, u. s. w. Sei ferner

$$OP = p, \quad O_1 P_1 = p_1, \quad O_2 P_2 = p_2 \ldots \; OP_1 = p', \quad O_1 P_2 = p'' \ldots$$

so hat man offenbar, wenn die oben definirte Richtung beibehalten wird

$$p' - p_1 = d_1, \quad p'' - p_2 = d_2 \text{ etc.}$$

Dagegen sollen die Strecken

$$QP = q, \quad Q_1 P_1 = q_1, \quad Q_2 P_2 = q_2 \ldots \; QP_1 = q', \quad Q_1 P_2 = q'' \ldots$$

positiv in der Richtung des Strahles gemessen werden. Endlich setze man die Winkel

$$PQR = \omega, \quad P_1 Q_1 R_1 = \omega_1, \quad P_2 Q_2 R_2 = \omega_2 \ldots \; P_1 QR = \omega', \quad P_2 Q_1 R_1 = \omega'' \ldots$$

$$OPQ = \alpha, \quad O_1 P_1 Q_1 = \alpha_1 \ldots \qquad ORQ = \vartheta, \quad O_1 R_1 Q_1 = \vartheta_1 \ldots$$

und zähle sie positiv etwa im Sinne des Uhrzeigers. Dann sind

$$\omega = \vartheta - \alpha, \quad \omega_1 = \vartheta_1 - \alpha_1, \quad \omega_2 = \vartheta_2 - \alpha_2 \ldots$$

die successiven Einfallswinkel und

$$\omega' = \vartheta - \alpha_1, \quad \omega'' = \vartheta_1 - \alpha_2 \ldots$$

die successiven Brechungswinkel, mithin

$$\omega - \omega' = \alpha_1 - \alpha, \quad \omega_1 - \omega'' = \alpha_2 - \alpha_1 \ldots$$

Vermöge des Brechungsgesetzes finden die Gleichungen statt

$$m \sin\omega = m_1 \sin\omega', \quad m_1 \sin\omega_1 = m_2 \sin\omega'' \ldots$$

wofür man auch schreiben kann

$$(m_1 + m)\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\omega - \omega') = (m_1 - m)\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\omega + \omega'), \text{ etc.}$$

welche die Brechungswinkel aus den Einfallswinkeln finden lehren. Es handelt sich demnach noch um die Bestimmung der Einfallswinkel. Dazu dienen die Gleichungen

$$r_1 \sin\omega_1 = r \sin\omega' + (r - r_1 - d_1) \sin\alpha_1$$
$$r_2 \sin\omega_2 = r_1 \sin\omega'' + (r_1 - r_2 - d_2) \sin\alpha_2$$
$$\ldots$$

oder

$$2r_1 \sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \omega_1)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \omega_1) = 2r \sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1 + \omega')\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \omega') - d_1 \sin\alpha_1$$
$$2r_2 \sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2 + \omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \omega_2) = 2r_1 \sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2 + \omega'')\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \omega'') - d_2 \sin\alpha_2$$
$$\ldots \qquad \ldots$$

welche mit den von Hansen*) benutzten Gleichungen identisch sind.

Wegen der sphärischen Gestalt der brechenden Flächen vereinigen sich alle Strahlen, die zur Axe symmetrisch einfallen, in den nämlichen Punkten $P P_1 P_2$ . . Desshalb heissen die Strecken $p p_1 p_2$ . . die Vereinigungsweiten vor und $p' p''$ . . die Vereinigungsweiten nach den Brechungen. Da in den Dreiecken $PQR$, $P_1QR$ und $P_1Q_1R_1$ . . . den resp. Seiten

$$p - r, \quad q, \quad r; \qquad p' - r, \quad q', \quad r; \qquad p_1 - r_1, \quad q_1, \quad r_1; \ldots$$

die Winkel gegenüberstehen

$$\omega, \quad \pi - \vartheta, \quad \alpha; \qquad \omega', \quad \pi - \vartheta, \quad \alpha_1; \qquad \omega_1, \quad \pi - \vartheta_1, \quad \alpha_1; \ldots$$

so erhält man die Formeln

*) Abhandl. der K. Sächs. Gesellschaft d. W. Math.-phys. Classe, Bd. X, S. 107, Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls etc.

$$\begin{array}{lcl}(p-r)\sin\alpha = r\sin\omega & & (2r-p)\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta = p\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha-\omega)\\ (p'-r)\sin\alpha_1 = r\sin\omega' & \text{oder} & (2r-p')\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta = p'\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\omega')\\ (p_1-r_1)\sin\alpha_1 = r_1\sin\omega_1 & & (2r_1-p_1)\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta_1 = p_1\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}(\alpha_1-\omega_1)\\ \ldots & & \ldots\end{array}$$

zur Berechnung der Vereinigungsweiten. Bildet man die Differenzen dieser Ausdrücke, so gehen die oben zur Bestimmung der Einfallswinkel aufgestellten Gleichungen hervor. Das Verhältniss

$$\frac{r_1\sin\vartheta_1}{r\sin\vartheta} = \frac{q_1}{q'} = \frac{p_1 - 2r_1\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_1}{p' - 2r\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}$$

endlich stellt die Beziehung zwischen den beiden successiven Centriwinkeln $\vartheta$ und $\vartheta_1$ dar.

## §. 2. Reihenentwickelungen für die Vereinigungsweiten.

Es sollen jetzt die Vereinigungsweiten $p'p''$ . . resp. ihre reciproken Werthe in Reihen entwickelt werden, welche nach den geraden Potenzen von $\varkappa = r\sin\vartheta$ fortschreiten. Hierzu erhält man

$$\frac{p'-r}{p-r}\cdot\frac{\sin\omega}{\sin\omega'} = \frac{q'}{q}$$

oder

$$\frac{m_1(p'-r)}{m(p-r)} = \sqrt{\frac{r^2 - 2r(r-p')\cos\vartheta + (r-p')^2}{r^2 - 2r(r-p)\cos\vartheta + (r-p)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{p'p' + 4r(r-p')\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}{pp + 4r(r-p)\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}}\,.$$

sowie

$$\frac{m_2(p''-r_1)}{m_1(p_1-r_1)} = \sqrt{\frac{p''p'' + 4r_1(r_1-p'')\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_1}{p_1p_1 + 4r_1(r_1-p_1)\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_1}}$$

wo vermöge der obigen Relation zwischen $\vartheta$ und $\vartheta_1$

$$\frac{r_1\sin\vartheta_1}{r\sin\vartheta} = \frac{\varkappa_1}{\varkappa} = \frac{p_1 - 2r_1\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_1}{p' - 2r\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}$$

u. s. w. Durch $\varkappa\varkappa_1\varkappa_2$ . . werden die Abstände der Durchschnittspunkte $QQ_1Q_2$ . . von der Axe ausgedrückt.

Bezeichnet man ferner durch $\varpi\varpi_1\varpi_2$ . . $\varpi'\varpi''$ . . $\varrho\varrho_1\varrho_2$ . . die reciproken Werthe von $pp_1p_2$ . . $p'p''$ . . $rr_1r_2$ . . und bedenkt, dass

$$4r^2\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta = \frac{\varkappa^2}{\cos^2\frac{1}{2}\vartheta} = \varkappa^2\{1 + \tfrac{1}{4}\varrho^2\varkappa^2 + \tfrac{1}{8}\varrho^4\varkappa^4\,..\}$$

so wird

$$\frac{m_1(\varpi'-\varrho)}{m(\varpi-\varrho)} = \sqrt{\frac{1+\varpi'(\varpi'-\varrho)\varkappa^2(1+\frac{1}{4}\varrho^2\varkappa^2\,..)}{1+\varpi\,(\varpi\,-\varrho)\varkappa^2(1+\frac{1}{4}\varrho^2\varkappa^2\,..)}}$$

nebst

$$\frac{\varkappa_1}{\varkappa} = \frac{\varpi'}{\varpi_1}\cdot\frac{1-\frac{1}{2}\varpi_1\varrho_1\varkappa_1^2\,..}{1-\frac{1}{2}\varpi'\varrho\varkappa^2\,..}$$

Die Reihenentwickelung ergibt ohne Schwierigkeit

$$\frac{m_1(\varpi'-\varrho)}{m(\varpi-\varrho)} = 1+\frac{1}{2}(\varpi'-\varpi)(\varpi'+\varpi-\varrho)\varkappa^2\left\{1+\frac{1}{4}(\varrho^2+3\varpi\varrho+\varpi'\varrho-3\varpi^2-\varpi'^2)\varkappa^2\ldots\right\}$$

so wie

$$\frac{\varkappa_1}{\varkappa} = \frac{\varpi'}{\varpi_1}\left\{1-\frac{1}{2}\varpi_1\varrho_1\varkappa_1^2+\frac{1}{2}\varpi'\varrho\varkappa^2\ldots\right\}$$

oder

$$\varkappa_1 = \varkappa\frac{\varpi'}{\varpi_1}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{\varpi'}{\varpi_1}(\varpi_1\varrho-\varpi'\varrho_1)\varkappa^2\ldots\right\}$$

Man setze jetzt

$$\varpi' = \pi'+\Delta\pi'+\delta\pi', \qquad \varpi_1 = \pi_1+\Delta\pi_1+\delta\pi_1,$$

u. s. w., wo $\Delta$ und $\delta$ Glieder von der Ordnung $\varkappa^2$ resp. $\varkappa^4$ bedeuten, während die Vereinigungsweiten $\pi'$ und $\pi_1$ den Centralstrahlen angehören, und schreibe zur Abkürzung

$$e_1 = \frac{\pi_1}{\pi'}, \qquad \varepsilon_1 = \frac{\pi'}{\pi_1}, \qquad e_2 = \frac{\pi_2}{\pi''}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{\pi''}{\pi_2}, \text{ etc.}$$

so wird wegen

$$d_1 = \frac{1}{\varpi'}-\frac{1}{\varpi_1} = \frac{1}{\pi'}-\frac{1}{\pi_1}$$

$$\frac{\Delta\pi'}{\pi'\pi'} = \frac{\Delta\pi_1}{\pi_1\pi_1}, \qquad \frac{\delta\pi'}{\pi'^2}-\frac{\Delta^2\pi'}{\pi'^3} = \frac{\delta\pi_1}{\pi_1^2}-\frac{\Delta^2\pi_1}{\pi_1^3}$$

Hiermit erhält man

$$\Delta\pi_1 = e_1^2\Delta\pi', \qquad \delta\pi_1 = e_1^2\delta\pi'+d_1e_1^3\Delta^2\pi'$$

nebst

$$\Delta\varepsilon_1 = \varepsilon_1\left(\frac{\Delta\pi'}{\pi'}-\frac{\Delta\pi_1}{\pi_1}\right) = -d_1\Delta\pi'$$

folglich

$$\varkappa_1 = \varkappa(\varepsilon_1+\Delta\varepsilon_1)\{1+\frac{1}{2}\varepsilon_1(\pi_1\varrho-\pi'\varrho_1)\varkappa^2\,..\}$$
$$= \varkappa\varepsilon_1\{1-d_1e_1\Delta\pi'+\frac{1}{2}\varepsilon_1(\pi_1\varrho-\pi'\varrho_1)\varkappa^2\,..\}$$

Ferner bekommt man wegen $\varpi = \pi_0$

$$\frac{m_1(\pi'-\varrho+\Delta\pi'+\delta\pi')}{m(\pi_0-\varrho)} =$$

$$1+\frac{1}{2}(\pi'-\pi_0)(\pi'+\pi_0-\varrho)\varkappa^2\left\{1+\frac{1}{4}(\varrho^2+3\pi_0\varrho+\pi'\varrho-3\pi_0^2-\pi'^2)\varkappa^2..\right\}+(\pi'-\frac{1}{2}\varrho)\varkappa^2\Delta\pi'\ldots$$

und hieraus gehen sogleich die Werthe hervor

$$m_1(\pi'-\varrho) = m(\pi_0-\varrho)$$

$$m_1 \varDelta\pi' = \frac{1}{2} m(\pi_0-\varrho)(\pi'-\pi_0)(\pi'+\pi_0-\varrho)\varkappa^2$$

$$m_1 \delta\pi' = \frac{1}{8} m(\pi_0-\varrho)(\pi'-\pi_0)(\pi'+\pi_0-\varrho)\left\{(\pi'-\pi_0)(3\pi'+3\pi_0-4\varrho)+\varrho(3\varrho-\pi'-\pi_0)\right\}\varkappa^4$$

Auf analoge Weise ergibt sich

$$\frac{m_2(\varpi''-\varrho_1)}{m_1(\varpi_1-\varrho_1)} =$$

$$1+\frac{1}{2}(\varpi''-\varpi_1)(\varpi''+\varpi_1-\varrho_1)\varkappa_1^2\left\{1+\frac{1}{4}(\varrho_1^2+3\varpi_1\varrho_1+\varpi''\varrho_1-3\varpi_1^2-\varpi''^2)\varkappa_1^2\ldots\right\}$$

$$\frac{m_2(\pi''-\varrho_1+\varDelta\pi''+\delta\pi'')}{m_1(\pi_1-\varrho_1+\varDelta\pi_1+\delta\pi_1)} =$$

$$1+\frac{1}{2}(\pi''-\pi_1)(\pi''+\pi_1-\varrho_1)\varkappa_1^2\left\{1+\frac{1}{4}(\varrho_1^2+3\pi_1\varrho_1+\pi''\varrho_1-3\pi_1^2-\pi''^2)\varkappa_1^2\ldots\right\}+$$

$$+(\pi''-\tfrac{1}{2}\varrho_1)\varkappa_1^2\varDelta\pi''-(\pi_1-\tfrac{1}{2}\varrho_1)\varkappa_1^2\varDelta\pi_1\ldots$$

folglich

$$m_2(\pi''-\varrho_1) = m_1(\pi_1-\varrho_1)$$

$$m_2\varDelta\pi'' = \frac{1}{2}m_1(\pi_1-\varrho_1)(\pi''-\pi_1)(\pi''+\pi_1-\varrho_1)\varkappa_1^2+m_1\varDelta\pi_1$$

$$m_2\delta\pi'' = \frac{1}{8}m_1(\pi_1-\varrho_1)(\pi''-\pi_1)(\pi''+\pi_1-\varrho_1)(\varrho_1^2+3\pi_1\varrho_1+\pi''\varrho_1-3\pi_1^2-\pi''^2)\varkappa_1^4$$

$$+m_1(\pi_1-\varrho_1)\left\{(\pi''-\tfrac{1}{2}\varrho_1)\varDelta\pi''-(\pi_1-\tfrac{1}{2}\varrho_1)\varDelta\pi_1\right\}\varkappa_1^2$$

$$+\frac{1}{2}m_1\varDelta\pi_1(\pi''-\pi_1)(\pi''+\pi_1-\varrho_1)\varkappa_1^2+m_1\delta\pi_1$$

Substituirt man hier die Ausdrücke von $\varDelta\pi_1$ und $\delta\pi_1$ durch $\varDelta\pi'$ und $\delta\pi'$ und führt die abgekürzten Bezeichnungen ein

*) $L = m(\pi'-\pi_0)(\pi_0-\varrho)(\pi'+\pi_0-\varrho)$

$L_1 = m_1(\pi''-\pi_1)(\pi_1-\varrho_1)(\pi''+\pi_1-\varrho_1)$

$M = \pi_1\varrho-\pi'\varrho_1,\qquad M_1 = \pi_2\varrho_1-\pi''\varrho_2$

$N = \varrho(3\varrho-\pi'-\pi_0),\qquad N_1 = \varrho_1(3\varrho_1-\pi''-\pi_1)$

$T = (\pi'-\pi_0)(3\pi'+3\pi_0-4\varrho) = 3(\pi'^2-\pi_0^2)+4\varrho(\pi_0-\pi')$

$T_1 = (\pi''-\pi_1)(3\pi''+3\pi_1-4\varrho_1) = 3(\pi''^2-\pi_1^2)+4\varrho(\pi_1-\pi'')$

u. s. w., so bekommt man die recurrirenden Gleichungensysteme

*) Schon Hansen hat in seinen »dioptrischen Untersuchungen«, Bd. X der Abhandlungen der K. Sächs. Gesellschaft S. 701, auf die mannichfachen Formen hingewiesen, welche den Ausdrücken der $L$ je nach Bedürfniss gegeben werden können. Wir führen die folgenden an:

$$m_1(\pi'-\varrho) = m(\pi_0-\varrho)$$
$$m_2(\pi''-\varrho_1) = m_1(\pi_1-\varrho_1)$$
$$\cdot\ \cdot$$
$$m_{i+1}(\pi^{i+1}-\varrho_i) = m_i(\pi_i-\varrho_i)$$
$$m_1 \varDelta\pi' = \frac{1}{2} L x^2$$
$$m_2 \varDelta\pi'' = \frac{1}{2} L_1 x_1^2 + e_1^2 m_1 \varDelta\pi'$$
$$\cdot\ \cdot$$
$$m_{i+1} \varDelta\pi^{i+1} = \frac{1}{2} L_i x_i^2 + e_i^2 m_i \varDelta\pi^i$$

$$m_1 \delta\pi' = \frac{1}{8} L(N+T) x^4$$
$$m_2 \delta\pi'' = \frac{1}{8} L_1(N_1+T_1)x_1^4 + \frac{1}{2} e_1^2 T_1 x_1^2 m_1 \varDelta\pi' + e_1^3 \frac{d_1}{m_1}(m_1\varDelta\pi')^2 + e_1^2 m_1 \delta\pi'$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$m_{i+1}\delta\pi^{i+1} = \frac{1}{8} L_i(N_i+T_i)x_i^4 + \frac{1}{2} e_i^2 T_i x_i^2 m_i \varDelta\pi^i + e_i^3 \frac{d_i}{m_i}(m_i\varDelta\pi^i)^2 + e_i^2 m_i \delta\pi^i$$

Verbindet man hiermit die frühere Recursionsformel

$$x_1 = x\varepsilon_1 \left\{ 1 - \frac{d_1}{m_1} e_1 m_1 \varDelta\pi' + \frac{1}{2} \varepsilon_1 M x^2 \right\}$$

oder allgemein

$$x_i = x_{i-1}\varepsilon_i \left\{ 1 - \frac{d_i}{m_i} e_i m_i \varDelta\pi^i + \frac{1}{2} \varepsilon_i M_{i-1} x_{i-1}^2 \right\}$$

so ist es nunmehr leicht, $m_i \varpi^{(i)}$ nach den Potenzen von $x^2$ zu entwickeln, und es braucht wohl nicht besonders hervorgehoben zu werden, dass aus den in den Werthen von $m_i \varDelta\pi^i$ mit $x_1^2\, x_2^2$ .. behafteten Gliedern hierbei Terme entstehen müssen, die in $x^4$ .. multiplicirt sind.

---

$$L = m_1(\pi'-\pi_0)(\pi'-\varrho)(\pi'+\pi_0-\varrho) = (m-m_1)(\pi_0-\varrho)(\pi'-\varrho)(\pi'+\pi_0-\varrho)$$
$$= m_1\pi'(\pi'-\varrho)^2 - m\pi_0(\pi_0-\varrho)^2 = (\pi_0-\varrho)(\pi'-\varrho)(m\pi'-m_1\pi_0)$$
$$= \frac{m(m-m_1)}{m_1}(\pi_0-\varrho)^2(\pi'+\pi_0-\varrho) = \frac{m_1(m-m_1)}{m}(\pi'-\varrho)^2(\pi'+\pi_0-\varrho)$$
$$= \frac{m(m-m_1)}{m_1 m_1}(\pi_0-\varrho)^2(\overline{m+m_1}\pi_0 - m\varrho) = \frac{m_1(m-m_1)}{m m}(\pi'-\varrho)^2(\overline{m+m_1}\pi' - m_1\varrho)$$
$$= \frac{m}{m_1}(\pi_0-\varrho)^2(m\pi'-m_1\pi_0) = \frac{m_1}{m}(\pi'-\varrho)^2(m\pi'-m_1\pi_0)$$
$$= \frac{m m_1}{m-m_1}(\pi'-\pi_0)^2(\pi'+\pi_0-\varrho) = \frac{m m_1}{(m-m_1)^2}(\pi'-\pi_0)^2(m\pi'-m_1\pi_0)$$

denen sich die allgemeinere Formel

$$L = \frac{m(m-\mu)}{\mu\mu}(\pi_0-\varrho)^2(m\overline{\pi_0-\varrho}+\mu\pi_0) - \frac{m_1(m_1-\mu)}{\mu\mu}(\pi'-\varrho)^2(m_1\overline{\pi'-\varrho}+\mu\pi')$$

anreiht, in welcher $\mu$ eine willkürliche Grösse bedeutet.

## §. 3. Kettenbrüche.

MÖBIUS, BESSEL und GAUSS haben gezeigt, dass die Werthe $\pi_0 \pi' \pi_1 \pi'' \pi_2$ . . von der Berechnung eines Kettenbruchs abhängen. In der That geben die Gleichungen

$$m_{i+1}(\pi^{i+1} - \varrho_i) = m_i(\pi_i - \varrho_i)$$

$$\frac{1}{\pi^i} - \frac{1}{\pi_i} = d_i$$

$$m_i(\pi^i - \varrho_{i-1}) = m_{i-1}(\pi_{i-1} - \varrho_{i-1})$$

durch einfache Transposition

$$\frac{1}{m_{i+1}\pi^{i+1}} = \frac{1}{(m_{i+1} - m_i)\varrho_i} \dot{+} m_i\pi_i, \quad m_i\pi_i = \frac{1}{-\frac{d_i}{m_i}} \dot{+} \frac{1}{m_i\pi^i}$$

$$\frac{1}{m_{i-1}\pi_{i-1}} = \frac{1}{(m_{i-1} - m_i)\varrho_{i-1}} \dot{+} m_i\pi^i, \quad m_i\pi^i = \frac{1}{\frac{d_i}{m_i}} \dot{+} \frac{1}{m_i\pi_i}$$

folglich, wenn zur Abkürzung

$$(m_i - m_{i+1})\varrho_i = s_i, \quad \frac{d_i}{m_i} = t_i$$

geschrieben wird,

$$\frac{1}{m_i\pi^i} = -\frac{1}{s_{i-1}} \dot{+} \frac{1}{t_{i-1}} \dot{+} \frac{1}{s_{i-2}} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{1}{t_1} \dot{+} \frac{1}{s} \dot{-} m\pi_0$$

$$\frac{1}{m\pi_0} = \frac{1}{s} \dot{+} \frac{1}{t_1} \dot{+} \frac{1}{s_1} \dot{+} \frac{1}{t_2} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{1}{t_{i-1}} \dot{+} \frac{1}{s_{i-1}} \dot{+} m_i\pi^i$$

$$m_i\pi_i = -\frac{1}{t_i} \dot{+} \frac{1}{s_{i-1}} \dot{+} \frac{1}{t_{i-1}} \dot{+} \ldots \dot{+} \frac{1}{t_1} \dot{+} \frac{1}{s} \dot{-} m\pi_0$$

$$m_1\pi' = \frac{1}{t_1} \dot{+} \frac{1}{s_1} \dot{+} \frac{1}{t_2} \dot{+} \frac{1}{s_2} \dot{+} \ldots + \frac{1}{t_{i-1}} \dot{+} \frac{1}{s_{i-1}} \dot{+} m_i\pi^i$$

Wenn hier einer der Abstände $d$ verschwindet, so wird z. B. für $d_2 = 0$

$$\frac{1}{m\pi_0} = \frac{1}{s} \dot{+} \frac{1}{t_1} \dot{+} \frac{1}{s_1 + s_2} \dot{+} \frac{1}{t_3} \dot{+} \text{etc.}$$

wogegen für $m_1 = m_2$

$$\frac{1}{m\pi_0} = \frac{1}{s} \dot{+} \frac{1}{t_1 + t_2} \dot{+} \frac{1}{s_2} \dot{+} \frac{1}{t_3} \dot{+} \text{etc.}$$

Vermöge der Gleichungen

$$\frac{\pi'}{\pi_1} = 1 - d_1\pi', \qquad \frac{\pi_1}{\pi'} = 1 + d_1\pi_1$$

oder allgemein

$$e_i = 1 + t_i m_i \pi_i, \qquad \varepsilon_i = 1 - t_i m_i \pi^i$$

ergeben sich ferner die Kettenbrüche

$$e_i = \frac{1}{1+t_i s_{i-1}} \dot{+} \frac{t_i}{t_{i-1}} \dot{+} \frac{1}{s_{i-2}} \dot{+} \quad . \quad . \quad \dot{+} \frac{1}{t_1} \dot{+} \frac{1}{s} \dot{+} m\pi_0$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{1+t_1 s_1} \dot{+} \frac{t_1}{t_2} \dot{+} \frac{1}{s_2} \dot{+} \frac{1}{t_3} \dot{+} \quad . \quad . \quad \dot{+} \frac{1}{t_{i-1}} \dot{+} \frac{1}{s_{i-1}} \dot{+} m_i \pi^i$$

Alle diese Kettenbrüche lassen sich mit Hülfe der Gauss'schen Logarithmen sehr bequem berechnen.

Im Folgenden sollen einige elementare Sätze aus der Theorie der Kettenbrüche benutzt werden*). Bekanntlich entspricht einem System recurrirender Gleichungen von der Form

$$p_i u_{i-1} - q_i u_i + r_i u_{i+1} = 0$$

die Kettenbruchsentwickelung

$$\frac{u_1}{u} = \frac{p_1}{q_1} \dot{-} \frac{p_2 r_1}{q_2} \dot{-} \frac{p_3 r_2}{q_3} \dot{-} \quad . \quad . \quad . \quad \dot{-} \frac{p_k r_{k-1}}{q_k} \dot{-} \frac{r_k u_{k+1}}{u_k}.$$

Bezeichnet man die Zähler und Nenner der Näherungswerthe dieses Kettenbruchs durch $\lambda_k$ und $\mu_k$, so dass also

$$\frac{\lambda_k}{\mu_k} = \frac{p_1}{q_1} \dot{-} \frac{p_2 r_1}{q_2} \dot{-} \frac{p_3 r_2}{q_3} \dot{-} \quad . \quad . \quad . \quad \dot{-} \frac{p_k r_{k-1}}{q_k}$$

so gelten die Gleichungen

$$p_k r_{k-1} \lambda_{k-2} - q_k \lambda_{k-1} + \lambda_k = 0, \qquad \lambda_1 = p_1, \qquad \lambda_0 = 0$$

$$p_k r_{k-1} \mu_{k-2} - q_k \mu_{k-1} + \mu_k = 0, \qquad \mu_1 = q_1, \qquad \mu_0 = 1$$

$$\lambda_k \mu_{k-1} - \lambda_{k-1} \mu_k = p_1 p_2 \, . \, . \, p_k r_1 r_2 \, . \, . \, r_{k-1}$$

so wie

$$r_1 r_2 \, . \, . \, r_k u_{k+1} = \mu_k u_1 - \lambda_k u$$

nebst

$$p_1 p_2 \, . \, . \, p_k u = \mu_k u_k - r_k \mu_{k-1} u_{k+1}$$

$$p_1 p_2 \, . \, . \, p_k u_1 = \lambda_k u_k - r_k \lambda_{k-1} u_{k+1}$$

Hieraus folgt

$$\frac{u_1}{u} = \frac{\lambda_k}{\mu_k} + \frac{r_1 r_2 \, . \, . \, r_k}{\mu_k} \, . \, \frac{u_1}{u} \, . \, \frac{u_2}{u_1} \, . \, . \, \frac{u_{k+1}}{u_k}$$

$$\frac{u_k}{u_{k+1}} = \frac{r_k \mu_{k-1}}{\mu_k} + \frac{p_1 p_2 \, . \, . \, p_k}{\mu_k} \, . \, \frac{u u_1 \, . \, . \, u_k}{u_1 u_2 \, . \, . \, u_{k+1}}$$

*) Vergl. Berichte der K. S. Gesellschaft d. W. Math. Classe, 1864, S. 45.

Wendet man diese Formeln auf die obigen Kettenbrüche für $\frac{1}{m\pi_0}$ und $\frac{1}{m_i\pi^i}$ an, und setzt demgemäss

$$\frac{\lambda_{2i-1}}{\mu_{2i-1}} = \frac{1}{s} \dot{+} \frac{1}{t_1} \dot{+} \frac{1}{s_1} \dot{+} \frac{1}{t_2} \dot{+} \ \ldots \ \dot{+} \frac{1}{t_{i-1}} \dot{+} \frac{1}{s_{i-1}}$$

$$\frac{u_1}{u} = \frac{1}{m\pi_0}, \quad \frac{u_2}{u_1} = m_1\pi', \quad \frac{u_3}{u_2} = \frac{1}{m_1\pi_1}, \quad \frac{u_4}{u_3} = m_2\pi'' \ldots$$

bis $\frac{u_{2i}}{u_{2i-1}} = m_i\pi^i$, so ergibt sich wegen $p_1 = p_2 \ldots = 1$, $r_1 = r_2 \ldots = -1$

$$\frac{1}{m\pi_0} = \frac{\lambda_{2i-1}}{\mu_{2i-1}} - \frac{1}{\mu_{2i-1}} \frac{m_i\pi'\pi'' \ldots \pi^i}{m\pi_0\pi_1 \ldots \pi_{i-1}}$$

$$\frac{1}{m_i\pi^i} = -\frac{\mu_{2i-2}}{\mu_{2i-1}} + \frac{1}{\mu_{2i-1}} \frac{m\pi_0\pi_1 \ldots \pi_{i-1}}{m_i\pi'\pi'' \ldots \pi^i}$$

wo der Quotient $\frac{\mu_{2i-2}}{\mu_{2i-1}}$ seinerseits durch den Kettenbruch gegeben ist

$$\frac{\mu_{2i-2}}{\mu_{2i-1}} = \frac{1}{s_{i-1}} \dot{+} \frac{1}{t_{i-1}} \dot{+} \frac{1}{s_{i-2}} \dot{+} \frac{1}{t_{i-2}} \dot{+} \ \ldots \ \dot{+} \frac{1}{t_1} \dot{+} \frac{1}{s}$$

Auf die gefundenen Kettenbrüche ist ferner mit Vortheil eine allgemeine Transformationsformel anwendbar, welche sich auf folgendem Wege leicht ableiten lässt. In dem recurrirenden System $p_i u_{i-1} - q_i u_i + r_i u_{i+1} = 0$ kann man die Grössen $u_2 u_5 u_8 \ldots$ eliminiren und erhält dadurch das neue System

$$\begin{aligned}
p_1 q_2 u - (q_1 q_2 - p_2 r_1) u_1 + r_1 r_2 u_3 &= 0 \\
p_2 p_3 u_1 - (q_2 q_3 - p_3 r_2) u_3 + q_2 r_3 u_4 &= 0 \\
p_4 q_5 u_3 - (q_4 q_5 - p_5 r_4) u_4 + r_4 r_5 u_6 &= 0 \\
p_5 p_6 u_4 - (q_5 q_6 - p_6 r_5) u_6 + q_5 r_6 u_7 &= 0 \\
\ldots &
\end{aligned}$$

welches sich seinerseits in den Kettenbruch auflöst:

$$\frac{u_1}{u} = \frac{p_1 q_1}{q_1 q_2 - p_2 r_1} \dot{-} \frac{p_2 p_3 r_1 r_2}{q_2 q_3 - p_3 r_2} \dot{-} \frac{p_4 q_2 q_5 r_3}{q_4 q_5 - p_5 r_4} \dot{-} \frac{p_5 p_6 r_4 r_5}{q_5 q_6 - p_6 r_5} \dot{-} \ldots$$

$$\text{bis} \ \dot{-} \frac{p_{3i-1} p_{3i} r_{3i-2} r_{3i-1}}{q_{3i-1} q_{3i} - p_{3i} r_{3i-1}} \dot{-} \frac{q_{3i-1} r_{3i} u_{3i+1}}{u_{3i}}$$

$$\text{oder bis} \ \dot{-} \frac{p_{3i+1} q_{3i-1} q_{3i+2} r_{3i}}{q_{3i+1} q_{3i+2} - p_{3i+2} r_{3i+1}} \dot{-} \frac{r_{3i+1} r_{3i+2} u_{3i+3}}{u_{3i+1}}$$

Auf analoge Weise ergibt sich durch Elimination von $u_2 u_4 u_6 \ldots$ das Gleichungensystem

$$p_1 q_2 u - (q_1 q_2 - p_2 r_1)\, u_1 + r_1 r_2 u_3 = 0$$
$$p_2 p_3 q_4 u_1 - (q_2 q_3 q_4 - p_3 q_4 r_2 - p_4 q_2 r_3)\, u_3 + q_2 r_3 r_4 u_5 = 0$$
$$p_4 p_5 q_6 u_3 - (q_4 q_5 q_6 - p_5 q_6 r_4 - p_6 q_4 r_5)\, u_5 + q_4 r_5 r_6 u_7 = 0$$
$$\cdots$$

nebst der Kettenbruchsentwickelung

$$\frac{u_1}{u} = \frac{p_1 q_2}{q_1 q_2 - p_2 r_1} \dot{-} \frac{p_2 p_3 q_4 r_1 r_2}{q_2 q_3 q_4 - p_3 q_4 r_2 - p_4 q_2 r_3} \dot{-} \frac{p_4 p_5 q_2 q_6 r_3 r_4}{q_4 q_5 q_6 - p_5 q_6 r_4 - p_6 q_4 r_5} \dot{-} \cdots$$
$$\text{bis} \dot{-} \frac{p_{2i} p_{2i+1} q_{2i-2} q_{2i+2} r_{2i-1} r_{2i}}{q_{2i} q_{2i+1} q_{2i+2} - p_{2i+1} q_{2i+2} r_{2i} - p_{2i+2} q_{2i} r_{2i+2}} \dot{-} \frac{q_{2i} r_{2i+2} r_{2i+2} u_{2i+3}}{u_{2i+1}}$$

Sollen diese Resultate auf die Transformation des Kettenbruchs

$$v_i = \frac{p_1}{q_1} \dot{+} \frac{p_2}{q_2} \dot{+} \frac{p_3}{q_3} \dot{+} \cdots \dot{+} \frac{p_i}{q_i}$$

angewandt werden, so wird man $r_i = -1$ zu setzen haben und erhält

$$v_{3i} = \frac{p_1 q_2}{p_2 + q_1 q_2} \dot{-} \frac{p_2 p_3}{p_3 + q_2 q_3} \dot{+} \frac{p_4 q_2 q_5}{p_5 + q_4 q_5} \dot{-} \frac{p_5 p_6}{p_6 + q_5 q_6} \dot{\pm} \cdots \text{bis} \dot{-} \frac{p_{3i-1} p_{3i}}{p_{3i} + q_{3i-1} q_{3i}}$$

$$v_{3i+2} = \frac{p_1 q_2}{p_2 + q_1 q_2} \dot{-} \frac{p_2 p_3}{p_3 + q_2 q_3} \dot{\pm} \cdots \text{bis} \dot{-} \frac{p_{3i-1} p_{3i}}{p_{3i} + q_{3i-1} q_{3i}} \dot{+} \frac{p_{3i+1} q_{3i-1} q_{3i+2}}{p_{3i+2} + q_{3i+1} q_{3i+2}}$$

nebst

$$\frac{1}{v_{3i+1}} = \frac{q_1}{p_1} \dot{-} \frac{p_1 p_2}{p_2 + q_1 q_2} \dot{+} \frac{p_3 q_1 q_4}{p_4 + q_3 q_4} \dot{-} \frac{p_4 p_5}{p_5 + q_4 q_5} \dot{\pm} \cdots \text{bis} \dot{+} \frac{p_{3i} q_{3i-2} q_{3i+1}}{p_{3i+1} + q_{3i} q_{3i+1}}$$

so wie

$$v_{2i} = \frac{p_1 q_2}{p_2 + q_1 q_2} \dot{-} \frac{p_2 p_3 q_4}{q_2 q_3 q_4 + p_3 q_4 - p_4 q_2} \dot{-} \frac{p_4 p_5 q_2 q_6}{q_4 q_5 q_6 + p_5 q_6 + p_6 q_4} \dot{-} \cdots$$
$$\text{bis} \dot{-} \frac{p_{2i-2} p_{2i-1} q_{2i-4} q_{2i}}{q_{2i-2} q_{2i-1} q_{2i} + p_{2i-1} q_{2i} + p_{2i} q_{2i-2}}$$

nebst

$$\frac{1}{v_{2i+1}} = \frac{q_1}{p_1} \dot{-} \frac{p_1 p_2 q_3}{q_1 q_2 q_3 + p_2 q_3 + p_3 q_1} \dot{-} \frac{p_3 p_4 q_1 q_5}{q_3 q_4 q_5 + p_4 q_5 + p_5 q_3} \dot{-} \cdots$$
$$\text{bis} \dot{-} \frac{p_{2i-1} p_{2i} q_{2i-3} q_{2i+1}}{q_{2i-1} q_{2i} q_{2i+1} + p_{2i} q_{2i+1} + p_{2i+1} q_{2i-1}}$$

Die letzten Formeln liefern z. B. die Entwickelungen

$$m_i \pi^i = -\frac{s_{i-1}}{1} \dot{-} \frac{s_{i-2}}{\sigma_{i-1}} \dot{-} \frac{s_{i-1}s_{i-3}}{\sigma_{i-2}} \dot{-} \ldots \text{ bis } \dot{-} \frac{s_2(s-m\pi_0)}{\sigma_1 - m\pi_0(1+s_1t_1)}$$

$$m\pi_0 = \frac{s}{1} \dot{-} \frac{s_1}{\sigma_1} \dot{-} \frac{ss_2}{\sigma_2} \dot{-} \frac{s_1s_3}{\sigma_3} \dot{-} \ldots \text{ bis } \dot{-} \frac{s_{i-3}(s_{i-1}+m_i\pi^i)}{\sigma_{i-1}+m_i\pi^i(1+s_{i-2}t_{i-1})}$$

$$m_i\pi_i = -\frac{s_{i-1}}{1+s_{i-1}t_{i-1}} \dot{-} \frac{s_{i-2}}{\sigma_{i-1}} \dot{-} \frac{s_{i-1}s_{i-3}}{\sigma_{i-2}} \dot{-} \ldots \text{ bis } \dot{-} \frac{s_2(s-m\pi_0)}{\sigma_1-m\pi_0(1+s_1t_1)}$$

$$m_1\pi' = \frac{s_1}{1+s_1t_1} \dot{-} \frac{s_2}{\sigma_2} \dot{-} \frac{s_1s_3}{\sigma_3} \dot{-} \ldots \text{ bis } \dot{-} \frac{s_{i-3}(s_{i-1}+m_i\pi^i)}{\sigma_{i-1}+m_i\pi^i(1+s_{i-2}t_{i-1})}$$

nebst

$$\frac{1}{m_i\pi^i} = -\frac{t_{i-1}}{1+s_{i-1}t_{i-1}} \dot{-} \frac{t_{i-2}}{\tau_{i-1}} \dot{-} \frac{t_{i-1}t_{i-3}}{\tau_{i-2}} \dot{-} \ldots \dot{-} \frac{t_3t_1}{\tau_2} \dot{-} \frac{t_2}{1+st_1-m\pi_0t_1}$$

$$\frac{1}{m\pi_0} = \frac{1}{1+st_1} \dot{-} \frac{t_2}{\tau_2} \dot{-} \frac{t_1t_3}{\tau_3} \dot{-} \ldots \dot{-} \frac{t_{i-3}t_{i-1}}{\tau_{i-1}} \dot{-} \frac{t_{i-2}}{1+s_{i-1}t_{i-1}+m_i\pi^i}$$

$$\frac{1}{m_i\pi_i} = -\frac{t_i}{1} \dot{-} \frac{t_{i-1}}{\tau_i} \dot{-} \frac{t_it_{i-2}}{\tau_{i-1}} \dot{-} \ldots \dot{-} \frac{t_3t_1}{\tau_2} \dot{-} \frac{t_2}{1+st_1-m\pi_0t_1}$$

$$\frac{1}{m_1\pi'} = \frac{t_1}{1} \dot{-} \frac{t_2}{\tau_2} \dot{-} \frac{t_1t_3}{\tau_3} \dot{-} \ldots \dot{-} \frac{t_{i-3}t_{i-1}}{\tau_{i-1}} \dot{-} \frac{t_{i-2}}{1+s_{i-1}t_{i-1}+m_i\pi^i}$$

in denen zur Abkürzung

$$\sigma_i = s_i+s_{i-1}+s_is_{i-1}t_i, \qquad \tau_i = t_i+t_{i-1}+s_{i-1}t_it_{i-1}$$

gesetzt ist. Wir bemerken die Uebereinstimmung der obigen Ausdrücke mit den in Art. 49 der ersten dioptrischen Abhandlung HANSEN's*) enthaltenen Formeln. Eine Vereinfachung tritt ein, wenn die brechenden Medien abwechselnd aus Luft bestehen, so dass $m = m_2 = m_4 \ldots = 1$ werden.

## §. 4. Grösse der Bilder. Charakteristische Punkte des Systems.

Wenn wir die Durchschnittspunkte gebrochener Lichtstrahlen als Bilder des leuchtenden Punktes auffassen, die um so vollkommener werden, je mehr Strahlen zusammentreffen, so fällt die Frage nach dem Orte des nach der Brechung entstehenden Bildes mit der Frage

*) Abhandl. der K. S. Gesellsch. Bd. X, S. 125. Man vergleiche auch Möbius in Crelle's Journal Bd. VI, S. 227 ff.

nach den Vereinigungspunkten der gebrochenen Strahlen zusammen. Liegt der leuchtende Punkt in der Axe, so ist durch die Berechnung der reciproken Vereinigungsweite $\varpi^i$ die Lage des Bildes bestimmt, welches der Vereinigung aller im Abstande $\varkappa$ auffallenden Strahlen entspricht. Den verschiedenen Werthen von $\varkappa$ oder $\vartheta$ entsprechen folglich eine ganze Reihe in der Axe liegender Bilder, welche im Allgemeinen einen Zerstreuungskreis hervorrufen, aber als zusammenfallend angesehen werden können, wenn man Grössen von der Ordnung $\varkappa^2$ vernachlässigen will.

Liegt dagegen der leuchtende Punkt ausserhalb der Axe, so ist die genaue Berechnung der Bahn des ausgesandten Strahlenkegels aus dem Grunde nicht ohne Weitläufigkeit*), weil im Allgemeinen solche Strahlen mit der Axe nicht in derselben Ebene liegen. Indess wird die Betrachtung sehr einfach, wenn man wiederum $\varkappa^2$ vernachlässigt. Nach der ersten Brechung wird das Bild $P_1'$ in der durch den leuchtenden Punkt $P'$ und den Mittelpunkt $R$ des Mediums $M_1$ gezogenen Geraden liegen, welche die brechende Fläche in $O'$ schneiden mag. Setzt man $O'P' = s$, $O'P_1' = s'$ (positiv im Sinne der Fortpflanzung des Lichts gerechnet), so ergibt sich analog wie früher

$$m_1 s(r-s') = m s'(r-s)$$

oder nach Einführung der reciproken Werthe $\varrho$ und $\sigma$

$$m_1(\sigma'-\varrho) = m(\sigma-\varrho)$$

Für $\sigma = \pi_0$ wird folglich $\sigma' = \pi'$, und man kann den aus $R$ beschriebenen Kreisbogen $P_1P_1'$ als das Bild des concentrischen Bogens $PP'$ betrachten. Mithin ist das Grössenverhältniss des Bildes durch

$$\frac{P_1P_1'}{PP'} = \frac{RP_1}{RP} = \frac{r-p'}{r-p} = \frac{mp'}{m_1 p} = \frac{m\pi_0}{m_1\pi'}$$

gegeben, dessen Werth positiv oder negativ ist, je nachdem das Bild aufrecht oder verkehrt erscheint.

Unterwirft man nun das Bild einer zweiten Brechung, so würde sich die entsprechende Gleichung

$$\frac{P_2P_2'}{P_1P_1'} = \frac{m_1\pi_1}{m_2\pi''}, \quad \text{mithin} \quad \frac{P_2P_2'}{PP'} = \frac{m\pi_0\pi_1}{m_2\pi'\pi''}$$

---

*) Siehe z. B. Hansen's Abhandlung »Weg eines Lichtstrahls etc.« §. 1.

ergeben, wenn der Bogen $P_1 P_1'$ seinen Mittelpunkt zugleich in $R_1$ hätte. Die durch die mangelhafte Coincidenz von $R$ und $R_1$ entstehende Ungenauigkeit wird unschädlich, wenn wir den Gesichtswinkel des leuchtenden Gegenstandes so klein voraussetzen, dass die betrachteten Kreisbogen als zusammenfallend mit ihren zur Axe senkrechten Tangenten angesehen werden können. Unter dieser Voraussetzung wird folglich

$$\frac{P_i P_i'}{P P'} = \frac{m \pi_0 \pi_1 \ldots \pi_{i-1}}{m_i \pi' \pi'' \ldots \pi^i} = e_1 e_2 \ldots e_{i-1} \frac{m \pi_0}{m_i \pi^i}$$

der Ausdruck für das Vergrösserungsverhältniss nach $i$ Brechungen.

Wenn insbesondere der leuchtende Gegenstand in quasi-unendlicher Entfernung sich befindet, so kann man das Product $PP'.\pi_0$ durch den Gesichtswinkel $\gamma$ des ausgedehnten Gegenstandes ersetzen, so dass die Grösse des Bildes durch

$$P_i P_i' = e_1 e_2 \ldots e_{i-1} \frac{m \gamma}{m_i \pi^i}$$

ausgedrückt wird. Verschwindet gleichzeitig auch $\pi^i$, d. h. treten parallel einfallende Strahlen auch parallel aus, wie diess beim astronomischen Fernrohr für weitsichtige Augen stattfindet, so ist

$$P_i P_i' . \pi^i = \beta$$

der Gesichtswinkel des Bildes, und

$$\frac{\beta}{\gamma} = e_1 e_2 \ldots e_{i-1} \frac{m}{m_i}$$

die Vergrösserung desselben.

Die in §. 3 abgeleiteten Formeln gestatten die Einführung der sogenannten charakteristischen Punkte des brechenden Systems. Bezeichnen wir das Vergrösserungsverhältniss nach $i$ Brechungen durch den Buchstaben $E_i$, so nehmen jene Formeln die Gestalt an

$$\frac{1}{\pi_0} = \frac{m}{\mu_{2i-1}} \left( \lambda_{2i-1} - \frac{1}{E_i} \right), \qquad \frac{1}{\pi^i} = \frac{m_i}{\mu_{2i-1}} \left( E_i - \mu_{2i-2} \right)$$

Da in den beiden Brennpunkten, als den Bildern unendlich entfernter Punkte der Axe, die parallel austretenden, resp. parallel einfallenden Strahlen die Axe schneiden, so sind ihre resp. Abstände $F$ und $F'$ von der ersten und letzten Linsenfläche durch die Werthe

gegeben, welche $\frac{1}{\pi_0}$ resp. $\frac{1}{\pi^i}$ annehmen, wenn $\pi^i$ resp. $\pi_0$ verschwinden. Im ersten Falle wird folglich

$$F = m\frac{\lambda_{2i-1}}{\mu_{2i-1}} = m\left\{\frac{1}{s} \dotplus \frac{1}{t_1} \dotplus \frac{1}{s_1} \dotplus \;..\; \dotplus \frac{1}{t_{i-1}} \dotplus \frac{1}{s_{i-1}}\right\}$$

im zweiten

$$F' = -m_i\frac{\mu_{2i-2}}{\mu_{2i-1}} = -m_i\left\{\frac{1}{s_{i-1}} \dotplus \frac{1}{t_{i-1}} \dotplus \frac{1}{s_{i-2}} \dotplus \;..\; \dotplus \frac{1}{t_1} \dotplus \frac{1}{s}\right\}$$

Die Bilder der letzten und ersten Linsenfläche schneiden die Axe in den sogenannten Augenpunkten. In ihnen verschwinden resp. $\frac{1}{\pi^i}$ und $\frac{1}{\pi_0}$, was für $E_i = \mu_{2i-2}$ und $E_i = \frac{1}{\lambda_{2i-1}}$ eintritt. Bezeichnet man durch $G$ und $G'$ die bezüglichen Werthe von $\frac{1}{\pi_0}$ und $\frac{1}{\pi^i}$, und beachtet, dass

$$\lambda_{2i-1}\mu_{2i-2} - \lambda_{2i-2}\mu_{2i-1} = 1$$

so wird

$$G = \frac{m}{\mu_{2i-1}}\left\{\lambda_{2i-1} - \frac{1}{\mu_{2i-2}}\right\} = m\frac{\lambda_{2i-2}}{\mu_{2i-2}}$$

$$G' = \frac{m_i}{\mu_{2i-1}}\left\{\frac{1}{\lambda_{2i-1}} - \mu_{2i-2}\right\} = -m_i\frac{\lambda_{2i-2}}{\lambda_{2i-1}}$$

wofür die Kettenbruchsentwickelungen gelten

$$\frac{\lambda_{2i-2}}{\mu_{2i-2}} = \frac{1}{s} \dotplus \frac{1}{t_1} \dotplus \frac{1}{s_1} \dotplus \;..\; \dotplus \frac{1}{s_{i-2}} \dotplus \frac{1}{t_{i-1}}$$

$$\frac{\lambda_{2i-2}}{\lambda_{2i-1}} = \frac{1}{s_{i-1}} \dotplus \frac{1}{t_{i-1}} \dotplus \frac{1}{s_{i-2}} \dotplus \;..\; \dotplus \frac{1}{s_1} \dotplus \frac{1}{t_1}$$

Die Hauptpunkte und die Knotenpunkte entsprechen den Werthen $E_i = 1$ und $E_i = -1$, als in welchen beiden Fällen Bild und Gegenstand von gleicher Grösse sind. Die daraus entspringenden Werthe von $\frac{1}{\pi_0}$ und $\frac{1}{\pi^i}$ sind resp.

$$H = m\frac{\lambda_{2i-1}-1}{\mu_{2i-1}}, \qquad H' = m_i\frac{1-\mu_{2i-2}}{\mu_{2i-1}}$$

und

$$K = m\frac{\lambda_{2i-1}+1}{\mu_{2i-1}}, \qquad K' = -m_i\frac{\mu_{2i-2}+1}{\mu_{2i-1}}$$

Die beiden Brennweiten $\Phi$ und $\Phi'$ endlich sind durch die Abstände der betreffenden Haupt- und Brennpunkte gegeben, so dass

$$\Phi = H - F = -\frac{m}{\mu_{2i-1}}, \qquad \Phi' = F' - H' = -\frac{m_i}{\mu_{2i-1}}$$

die zugehörigen Werthe darstellen, welche für den Fall der Identität des ersten und letzten Mittels in einen einzigen übergehen.

Von dem Gebrauche, welchen man von der Einführung dieser charakteristischen Punkte zur einfachen Darstellung der Gleichung der gebrochenen Strahlen u. s. w. gemacht hat, wollen wir hier absehen.

## §. 5. Maass der durch die sphärische Abweichung entstehenden Undeutlichkeit. Einfluss der Absorption und Reflexion.

Sei vermöge der im §. 2 gegebenen Entwickelung

$$\varpi^{(i)} = A + Bx^2 + Cx^4 \ldots,$$

der reciproke Werth der Vereinigungsweite für Strahlen von gegebener Wellenlänge, welche aus einem Punkte der Axe in der Entfernung $PO = -p = -\frac{1}{\pi_0}$ vor der Mitte eines Objectivs von der Oeffnung $2K$, dasselbe im Abstande $x$ von der Axe treffen. Wenn das Linsensystem des Objectivs so construirt ist, dass die den Werthen $x = \lambda K$ und $\lambda' K$ entsp.echenden Strahlen die Axe in der Entfernung $\frac{1}{a}$ von der letzten Linsenfläche schneiden, so sind $\lambda K$ und $\lambda' K$ Wurzeln der Gleichung $\varpi^{(i)} = a$, folglich mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$\varpi^{(i)} - a = C(x^2 - \lambda^2 K^2)(x^2 - \lambda'^2 K^2)$$

Sei

$$\lambda^2 + \lambda'^2 = \mu^2, \qquad \lambda^2 \lambda'^2 = \nu^2$$

so wird

$$A = a + C\nu^2 K^2, \qquad 0 = B + C\mu^2 K^2$$

mithin

$$a = A + B\left(\frac{\nu}{\mu} K\right)^2$$

Legt man durch den Vereinigungspunkt $P_i$ eine zur Axe senk-

rechte Ebene, so schneidet dieselbe den Strahlenkegel des Objectivs in einem Zerstreuungskreise, über dessen Fläche das Integral

$$u = \int j h h d\sigma$$

ausgedehnt werden soll, welches von Gauss und Bessel als Maass für die wegen unvollkommener Aufhebung der sphärischen Aberration zurückbleibende Undeutlichkeit des von einem leuchtenden Punkte entworfenen Bildes eingeführt worden ist. In demselben bezeichnet $h$ den Abstand des Elements $d\sigma$ der Kreisfläche von der Axe und $j$ die Intensität der Strahlen in

$$d\sigma = h\,dh\,d\chi$$

Hier sollen zunächst $h$ und $j$ als Functionen von $\varkappa$ bestimmt werden. Man findet leicht aus der Figur

$$\pm h = \frac{\varkappa_{i-1}\left(\frac{\varpi^i}{a} - 1\right)}{1 - 2\varpi^i r_{i-1} \sin^2 \frac{1}{2}\vartheta_{i-1}}$$

$$= \varkappa_{i-1} \frac{\varpi^i - a}{a}\left(1 + \frac{1}{2}\varrho_{i-1}\varpi^i \varkappa^2_{i-1} \ldots\right)$$

und mit Vernachlässigung von $\varkappa^7$

$$h = \pm \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{i-1} \frac{C}{A} \varkappa (\varkappa^4 - \mu^2 K^2 \varkappa^2 + \nu^2 K^4)$$

Etwas umständlicher ist die Bestimmung der Intensität $j$. Sei $J$ die Intensität der in der Mitte des Objectivs, also in der Entfernung $-p$ vom leuchtenden Punkte, einfallenden Strahlen, so erhält man die Gesammtintensität derjenigen Strahlen, deren Neigung gegen die Axe zwischen $\alpha$ und $\alpha + d\alpha$ enthalten ist, wenn man $J$ mit der Fläche der entsprechenden Zone einer Kugel vom Radius $p$ multiplicirt. Damit folgt für diese Gesammtintensität der Werth $2\pi J p^2 \sin\alpha\, d\alpha$. Diese Strahlen gelangen schliesslich mit der Intensität $j$ auf die zwischen $h$ und $h + dh$ enthaltene Zone des Zerstreuungskreises, deren Fläche $2\pi h\,dh$ beträgt. Wenn durch Absorption und durch Reflexion kein Licht verloren ginge, würde folglich

$$ppJ \sin\alpha\, d\alpha = jh\, dh$$

sein und

$$u = \iint j h^3 dh\, d\chi = 2\pi p^2 J \int h^2 \sin\alpha\, d\alpha$$

werden.

Zur Bestimmung von $\sin\alpha\, d\alpha$ dient die Gleichung

$$q \cos\alpha = p - 2r \sin^2 \tfrac{1}{2}\vartheta$$

oder

$$\cos\alpha = \frac{p - 2r\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{p^2 + 4r(r-p)\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}} = \frac{\varrho - 2\varpi\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}{\sqrt{\varrho^2 + 4\varpi(\varpi-\varrho)\sin^2\frac{1}{2}\vartheta}}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2}\varpi\varrho x^2 (1 + \frac{1}{4}\varrho^2 x^2 \dots)}{\sqrt{1 + \varpi(\varpi-\varrho)x^2(1+\frac{1}{4}\varrho^2 x^2 \dots)}}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\pi_0^2 x^2 + \frac{1}{8}\pi_0^3 (3\pi_0 - 4\varrho) x^4 \dots$$

woraus durch Differentiation

$$p^2 \sin\alpha\, d\alpha = \left\{1 - \frac{1}{2}\pi_0 (3\pi_0 - 4\varrho) x^2 \dots\right\} x\, dx$$

Allein an jeder sphärischen Fläche wird ein Theil der auffallenden Strahlen reflectirt, und in jedem durchlaufenen Medium wird ein Theil des Lichtes absorbirt. Sei $\zeta_i$ der Absorptionscoefficient des Mediums $M_i$, in welchem die Strecke $q^i - q_i$ durchlaufen wird, so wird die Schwächung der Intensität durch das Hinzutreten des Factors $(1 - \zeta_i)^{q^i - q_i}$ ausgedrückt. Ebenso führt die Reflexion an den Flächen $O_i$ nach den von FRESNEL aufgestellten und von HANKEL*) geprüften Formeln Factoren von der Form

$$1 - \frac{1}{2}\frac{\sin^2(\omega_i - \omega^{i+1})}{\sin^2(\omega_i + \omega^{i+1})} - \frac{1}{2}\frac{\operatorname{tg}^2(\omega_i - \omega^{i+1})}{\operatorname{tg}^2(\omega_i + \omega^{i+1})} = \Omega_i$$

herbei.

Um auch diese Grössen nach den Potenzen von $x^2$ zu entwickeln, setzen wir zunächst

$$q^i - q_i = \frac{1}{\varpi^i}\sqrt{1 + 4\varpi^i(\varpi^i - \varrho_{i-1})\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta_{i-1}} - \frac{1}{\varpi_i}\sqrt{1 + 4\varpi_i(\varpi_i - \varrho_i)\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta_i}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{2}\pi^i(\pi^i - \varrho_{i-1})x_{i-1}^2}{\pi^i + \Delta\pi^i} - \frac{1 + \frac{1}{2}\pi_i(\pi_i - \varrho_i)x_i^2}{\pi_i + \Delta\pi_i}$$

$$= \frac{1}{\pi^i} - \frac{\Delta\pi^i}{\pi^i\pi^i} + \frac{1}{2}(\pi^i - \varrho_{i-1})x_{i-1}^2 - \frac{1}{\pi_i} + \frac{\Delta\pi_i}{\pi^i\pi^i} - \frac{1}{2}(\pi_i - \varrho_i)x_i^2$$

$$= d_i + \frac{1}{2}(\varepsilon_1\varepsilon_2 \dots \varepsilon_{i-1})^2 (\pi^i\pi^i d_i - \varrho_{i-1} + \varepsilon_i^2\varrho_i) x^2 \dots$$

*) Abhandl. d. K. S. Gesellschaft d. W. Math. Classe, Bd. VI, S. 78.

folglich

$$(1-\zeta_i)^{q^i-q_i} = (1-\zeta_i)^{d_i}\left\{1+\frac{1}{2}\varkappa_{i-1}^2\, D_i \log(1-\zeta_i)\ldots\right\}$$

$$D_i = \pi^i n^i d_i - \varrho_{i-1} + \varepsilon_i^2\varrho_i$$

Zur Discussion der Factoren $\Omega_i$ führen wir die Grössen

$$s = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\omega+\omega'), \qquad t = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\omega-\omega')$$

ein, wodurch

$$\Omega = 1-\frac{1}{2}\frac{\sin^2(\omega-\omega')}{\sin^2(\omega+\omega')}\left\{1+\frac{\cos^2(\omega+\omega')}{\cos^2(\omega-\omega')}\right\}$$

$$= 1-\frac{t^2}{2s^2}\left\{\left(\frac{1+s^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{1-s^2}{1-t^2}\right)^2\right\}$$

$$= 1-\frac{t^2}{s^2}\,\frac{(1-s^2t^2)^2+(s^2-t^2)^2}{(1-t^4)^2}$$

Da nun vermöge des Brechungsgesetzes

$$(m_1+m)\,t = (m_1-m)\,s$$

so erhält man für $\eta = \frac{m_1-m}{m_1+m}$

$$\Omega = 1-\eta^2\,\frac{(1-\eta^2 s^4)^2+(1-\eta^2)^2 s^4}{(1-\eta^4 s^4)^2}$$

$$= (1-\eta^2)\,\frac{(1-\eta^2 s^4)\,(1+\eta^4 s^4)}{(1-\eta^4 s^4)^2}$$

Zur Entwickelung von $s$ dienen die Gleichungen

$$q\sin\omega = (p-r)\sin\vartheta, \qquad q\cos\omega = p+2(r-p)\sin^2\tfrac{1}{2}\vartheta$$

oder

$$\varpi q\sin\omega = (\varrho-\varpi)\,\varkappa, \qquad \varpi' q'\sin\omega' = (\varrho-\varpi')\,\varkappa$$

wofür hier mit hinreichender Genauigkeit

$$\omega = (\varrho-\pi_0)\,\varkappa, \qquad \omega' = (\varrho-\pi')\,\varkappa$$

also

$$s = \frac{1}{2}(2\varrho-\pi_0-\pi')\,\varkappa$$

gesetzt werden darf. Damit erhält man

$$\Omega = (1-\eta^2)\left\{1-\frac{1}{16}\eta^2(1-3\eta^2)(2\varrho-\pi_0-\pi')^4\varkappa^4\ldots\right\}$$

oder wegen

$$\eta_i = \frac{m_{i+1}-m_i}{m_{i+1}+m_i} = \frac{\pi^{i+1}-\pi_i}{\pi^{i+1}+\pi_i-2\varrho_i}$$

$$\Omega_i = (1-\eta_i^2)\left\{1-\frac{1}{16}(1-3\eta_i^2)(\pi^{i+1}-\pi_i)^2(\pi^{i+1}+\pi_i-2\varrho_i)^2 x_i^4 \ldots\right\}$$

Es ist der Umstand hervorzuheben, dass wie bei $q^i - q_i$ der Factor von $x^2$, so hier der Coefficient von $x^4$ von $\Delta\pi^i$ unabhängig geworden ist.

## §. 6. Minimum des Zerstreuungskreises.

Kehren wir jetzt zu unserem Integrale $u$ zurück und behalten, wie bereits bei der Entwickelung von $h$ geschehen, nur die Glieder niedrigster Ordnung bei, so wird

$$u = 2\pi\left(\frac{C}{a}\right)^2 \Pi J\int_0^K (x^4-\mu^2K^2x^2+\nu^2K^4)^2x^3\,dx$$

$$= 2\pi\left(\frac{C}{a}\right)^2 \Pi J K^{12}\left\{\frac{1}{12}-\frac{1}{5}\mu^2+\frac{1}{4}\nu^2+\frac{1}{8}\mu^4-\frac{1}{3}\mu^2\nu^2+\frac{1}{4}\nu^4\right\}$$

wo $\Pi$ das Product aller Factoren von der Form $\varepsilon_i^2(1-\zeta_i)^{d_i}(1-\eta_i^2)$ bedeutet.

Das Minimum dieses Integrals tritt ein für

$$0 = \frac{\partial u}{\partial \mu^2} = \frac{\partial u}{\partial \nu^2}$$

woraus zur Bestimmung von $\mu$ und $\nu$ die Gleichungen

$$\frac{1}{4}\mu^2 - \frac{1}{3}\nu^2 - \frac{1}{5} = 0 \qquad \text{und} \qquad \frac{1}{2}\nu^2 - \frac{1}{3}\mu^2 + \frac{1}{4} = 0$$

folglich

$$\mu^2 = \frac{6}{5}, \qquad \nu^2 = \frac{3}{10}$$

nebst

$$u = \frac{1}{600}\pi J\Pi\left(\frac{C}{a}\right)^2 K^{12}$$

hervorgehen, so dass $\lambda$ und $\lambda'$ die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 - \frac{6}{5}x^2 + \frac{3}{10} = 0$$

werden. Man erhält durch Auflösung derselben

$$\lambda = \sqrt{\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\sqrt{6}} = 0.9192111$$

$$\lambda' = \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\sqrt{6}} = 0.5958618$$

übereinstimmend mit Gauss*), wenn man den aus Gehler's Wörterbuch, Bd. VI, S. 437 in Bd. V der Werke, S. 509 übergegangenen und bereits in Schmidt's analytischer Optik gerügten Druckfehler verbessert, der in der Weglassung der äusseren Wurzelzeichen besteht.

Auch die übrigen von Gauss a. a. O. gemachten Angaben finden in der abgeleiteten Formel volle Bestätigung. Zunächst ist aus der Gleichung

$$0 = B + C\mu^2 K^2$$

zu entnehmen, dass allgemein Strahlen, welche das Objectiv in $lK$ und $l'K$ treffen, die Axe in den nämlichen Punkten schneiden, wenn $l^2 + l'^2 = \mu^2$ ist, nur ändert sich dabei der Abstand dieser Durchschnittspunkte vom Objective. Für Centralstrahlen oder $l = 0$, $l' = \mu$ erhält man z. B.

$$\varpi^i = A = a + \nu^2 CK^4 = a + \frac{3}{10} CK^4$$

während für Randstrahlen oder $l = 1$, $l' = \sqrt{\frac{1}{5}}$

$$\varpi^i = a + (1 - \mu^2 + \nu^2)\, CK^4 = a + \frac{1}{10} CK^4$$

wird. Auf der anderen Seite tritt das Maximum der Abweichung für solche Strahlen ein, für welche $\frac{\partial \varpi^i}{\partial x^2} = 0$, d. h.

$$B + 2C\varkappa^2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad \varkappa^2 = -\frac{B}{2C} = \frac{1}{2}\mu^2 K^2$$

also für $\varkappa = K\sqrt{\frac{3}{5}}$, mit anderen Worten für $l = l'$ oder

$$\varpi^i = a - \left(\frac{1}{4}\mu^4 - \nu^2\right) CK^4 = a - \frac{3}{50} CK^4$$

---

*) In einem an Brandes gerichteten Briefe aus dem Jahre 1830.

Lässt man $\mu$ willkürlich und bestimmt nur $\nu$ durch die Gleichung $\frac{\partial u}{\partial \nu^2} = 0$, setzt also demgemäss

$$\nu^2 = \frac{2}{3}\mu^2 - \frac{1}{2}$$

so wird

$$u = 2\pi J\Pi\left(\frac{C}{a}\right)^2 K'^2 \left\{\frac{1}{12} - \frac{1}{5}\mu^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\mu^2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8}\mu^4 - \frac{1}{3}\mu^2\left(\frac{2}{3}\mu^2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\mu^2 - \frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{24}\pi J\Pi\left(\frac{C}{a}\right)^2 K'^2 \left\{1 - \frac{8}{5}\mu^2 + \frac{2}{3}\mu^4\right\}$$

wie bei GAUSS. Für $\mu = 0$ wird $\nu^2 = -\frac{1}{2}$, d. h.

$$\lambda^2 = -\lambda'^2, \qquad \lambda^2\lambda'^2 = -\frac{1}{2}, \qquad \lambda^2 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \qquad \lambda'^2 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

so dass sich keine Strahlen für verschiedene $\varkappa$ in der Axe schneiden können. Von allen Strahlen treffen nur die Centralstrahlen $l = l' = 0$ mit den Nachbarstrahlen zusammen, da für $\mu = 0$ in $\varpi^i$ die in $B$ oder $\varkappa^2$ multiplicirten Glieder verschwinden:

$$\varpi^i = A + C\varkappa^4$$

Setzt man hier $A = a$, so entspricht diess den Werthen $\nu = 0$ und $u = \frac{1}{6}\pi J\Pi\left(\frac{C}{a}\right)^2 K'^2$, welche letztere Grösse GAUSS durch $E$ bezeichnet.

Will man endlich die Centralstrahlen mit den Randstrahlen zusammenfallen lassen, so geschieht diess für

$$\lambda = 0, \qquad \lambda' = 0, \qquad \mu = 1, \qquad \nu = 0$$

$$u = \frac{1}{60}\pi J\Pi\left(\frac{C}{a}\right)^2 K'^2, \qquad \varpi^i = a + C\varkappa^2(\varkappa^2 - K'^2)$$

und das Maximum der Längenabweichung

$$\varpi^i = a + \frac{1}{4}CK'^4$$

entspricht den Strahlen, für welche $\varkappa^2 = \frac{1}{2}K'^2$ oder $l = \sqrt{\frac{1}{2}}$, wofür GAUSS in seinem Aufsatze im 4. Bande der »Zeitschrift für Astronomie«, December 1817 (Werke, Bd. V, S. 505) den approximativen Werth $l = \frac{7}{10}$ angibt, während er in dem Rechnungsbeispiele daselbst für $K = \sin 18^0 30'$ $\varkappa = \sin 13^0$ setzt.

Natürlich lässt sich eine weitere Steigerung der Bildschärfe, bez.

lassen, mit anderen Worten $l = l'$ zu setzen. Im Allgemeinen werden dann auch die Strahlen von grösserer und kleinerer Wellenlänge sich paarweise vereinigen, nur dass diese Vereinigungspunkte nicht mit dem Orte des Bildes zusammenfallen.

Wenn $m m_1 m_2 \ldots$ resp. $m' m'_1 m'_2 \ldots$ die Brechungsverhältnisse der Strahlen von der Wellenlänge $l$ und $l'$ in den verschiedenen Medien bedeuten, so kommt die gestellte Forderung offenbar darauf hinaus, die zur Beseitigung der sphärischen Abweichung aufgestellten Gleichungen nach $m m_1 m_2 \ldots$ zu differentiiren. Wir haben jene Gleichungen in der Form betrachtet:

$$a = A + \frac{1}{4} BK^2, \qquad 0 = B + \frac{6}{5} CK^2$$

mithin treten die Differentialformeln hinzu

$$0 = \left(\frac{\partial A}{\partial m} + \frac{1}{4} K^2 \frac{\partial B}{\partial m}\right) dm + \left(\frac{\partial A}{\partial m_1} + \frac{1}{4} K^2 \frac{\partial B}{\partial m_1}\right) dm_1 + \ldots$$

$$0 = \left(\frac{\partial B}{\partial m} + \frac{6}{5} K^2 \frac{\partial C}{\partial m}\right) dm + \left(\frac{\partial B}{\partial m_1} + \frac{6}{5} K^2 \frac{\partial C}{\partial m_1}\right) dm_1 + \ldots$$

Indessen werden wir in der zweiten Formel uns die Vernachlässigung der in $K^2$ multiplicirten Glieder erlauben, wodurch die Gleichungen für die Achromasie die einfachere Gestalt annehmen*)

$$0 = dA = \Sigma \frac{\partial A}{\partial m} dm$$

$$0 = dB = \Sigma \frac{\partial B}{\partial m} dm$$

---

*) Es entspricht diese Vernachlässigung der folgenden Betrachtung. Der für die Wellenlänge $l$ aufgestellte Ausdruck $\varpi^i = A + Bx^2 + Cx^4$ wird den Zuwachs

$$\delta \varpi^i = \delta A + x^2 \delta B + x^4 \delta C$$

erhalten, wenn $l$ in $l + \delta l$ übergeht. Hier sind

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial l} \delta l + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 A}{\partial l^2} \delta l^2 \ldots$$

$$\delta B = \frac{\partial B}{\partial l} \delta l \ldots, \qquad \delta C = \frac{\partial C}{\partial l} \delta l \ldots$$

Soll nun $\delta \varpi^i$ für alle Strahlen verschwinden, so müssen die einzelnen Differentialquotienten für sich Null sein. Sehen wir also von dem Verschwinden von $\frac{\partial^2 A}{\partial l^2}$ und $\frac{\partial C}{\partial l}$ ab, wodurch die obigen Gleichungen $dA = dB = 0$ hervorgehen, so vernachlässigen wir Glieder, welche in $\delta l^2$ und $x^4 \delta l$ multiplicirt sind.

Um die Beziehung zwischen den Differentialen $dm\ dm_1\ dm_2$ .. auszudrücken, hat man sich statt derselben etwa die nach der Wellenlänge genommenen Differentialquotienten $\frac{dm}{dl}, \frac{dm_1}{dl}, \frac{dm_2}{dl}$ .. zu denken, welche freilich erst gebildet werden können, wenn die Abhängigkeit der Brechungsexponenten von der Wellenlänge gegeben ist. Da es aber in den obigen Gleichungen im Grunde nur auf die Verhältnisse dieser Grössen ankommt, so handelt es sich um die Ermittelung der sogenannten Zerstreuungsverhältnisse $dm : dm_1 : dm_2 \ldots$, welche bei den FRAUNHOFER'schen Objectiven für verschiedene Glassorten empirisch bestimmt worden sind. Wenigstens führt FRAUNHOFER in seiner berühmten Abhandlung über die Dispersion*) ausdrücklich an, dass der Werth eines solchen Verhältnisses, den er mit Rücksicht auf die verschiedene Intensität der Strahlen des Spectrums aus den für verschiedenfarbige Strahlen gemessenen Werthen von $m$ und $m_1$ durch eine auf theoretische Gründe basirte Rechnung abgeleitet (2.012), mit dem empirisch als vortheilhafter ermittelten (1.98) nicht völlig übereinstimme.

Es zeigt sich aber, und hierin darf wohl eine Bestätigung für die Triftigkeit der oben angestellten Betrachtungen erblickt werden, dass dieser empirische Werth für die von FRAUNHOFER geprüften Glassorten den genauen Werth des Differentialquotienten $\frac{dm_1}{dm}$ für die Strahlen grösster Intensität (von der Wellenlänge $l$) darstellt.

Wenn es die Construction des Linsensystems gestattet, wird man mit den Strahlen von der Wellenlänge $l = l'$ noch weitere Strahlen von passender Wellenlänge $l''$ zur Vereinigung bringen. So könnte z. B. bei drei Linsen die Forderung erfüllt werden, dass mit den doppelten gelben Strahlen auch die violetten zusammentreffen sollen, wodurch nicht allein die Länge des Spectrums (der Radius des chromatischen Zerstreuungskreises) auf den dritten Theil sich reduciren, sondern auch solche Farben zur Deckung gelangen würden, welche

---

*) Détermination du pouvoir réfringent et dispersif .., abgedruckt in Schumacher's Astronom. Abhandlungen, Heft II S. 38. — Es ist historisch nicht uninteressant zu bemerken, dass Newton den Werth $\frac{dm_1}{dm} = \frac{m_1 - 1}{m - 1}$, Euler $\frac{dm_1}{dm} = \frac{m_1 \log m_1}{m \log m}$ ihren Speculationen zu Grunde gelegt haben, bis Letzterer in seiner Dioptrik die Dollond'schen Resultate adoptirte und theoretisch weiter verfolgte.

(vergl. Helmholtz physiologische Optik, S. 277) sich nahe zu Weiss ergänzen. Die sieben Spectralfarben

roth orange gelb grün cyan blau violett

werden praeter propter bei vier Brechungen etwa die Gruppirung

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| gelb | grün | cyan | blau | violett |
| gelb | orange | roth , | | |

im Falle von sechs Brechungen die folgende

| | | |
|---|---|---|
| violett | blau | cyan |
| gelb | grün | cyan |
| gelb | orange | roth |

annehmen.

## §. 8. Berechnung des Zerstreuungsverhältnisses.

Es soll jetzt für zwei Medien $M$ und $M'$ der Werth des Zerstreuungsverhältnisses für die hellsten Strahlen aus den gegebenen Brechungsexponenten berechnet werden.

Sei $M$ das von Fraunhofer sogen. Kronglas Nr. 13, $M'$ das sogen. Flintglas Nr. 30, so sind in der angeführten Abhandlung S. 31 für die den sieben Spectrallinien $BCDEFGH$ entsprechenden Brechungsexponenten folgende Werthe gefunden worden:

| | | |
|---|---|---|
| $l_1 = 2539.73$ | $n_1 = 1.524312$ | $n'_1 = 1.623570$ |
| $l_2 = 2426.29$ | $n_2 = 1.525299$ | $n'_2 = 1.625477$ |
| $l_3 = 2178.59$ | $n_3 = 1.527982$ | $n'_3 = 1.630585$ |
| $l_4 = 1948.24$ | $n_4 = 1.531372$ | $n'_4 = 1.637356$ |
| $l_5 = 1797.27$ | $n_5 = 1.534337$ | $n'_5 = 1.643466$ |
| $l_6 = 1592.34$ | $n_6 = 1.539908$ | $n'_6 = 1.655406$ |
| $l_7 = 1467.18$ | $n_7 = 1.544684$ | $n'_7 = 1.666072$ |

Die beigefügten Werthe der $l$ stellen nach Angström*) die Wellenlängen der entsprechenden Strahlen in Hundertmilliontheilen eines Pariser Zolles dar. Ausserdem findet sich die Angabe Fraunhofer's,

*) Poggendorff's Annalen, Bd. 123, S. 489.

dass die grösste Intensität den Strahlen zukomme, welche zwischen den Linien $D$ uud $E$, etwa in einem Drittel oder einem Viertel Abstand von $D$ liegen. Wir setzen demnach für einen Abstand von 0.3

$$n = 1.528999, \qquad n' = 1.632616$$

Die bekannten Regeln der Interpolationsrechnung gestatten, den zugehörigen Werth des Differentialquotienten $\frac{dn'}{dn}$ abzuleiten. Indessen wird dieses immerhin weitläufige Geschäft wesentlich erleichtert durch die von W. SCHMIDT in seinem Werke über »Die Brechung des Lichts in Gläsern« für die vorliegenden Glassorten mit besonderer Sorgfalt eruirten Interpolationsformeln:

$n = 1.506107 + 0.0118381\,\lambda + 0.00021838\,\lambda^4$ Kronglas Nr. 13
$n' = 1.592354 + 0.0196004\,\lambda + 0.00060648\,\lambda^4$ Flintglas Nr. 30

welche für $\lambda = 1.75815$ die oben gewählten Werthe mit ausreichender Genauigkeit repräsentiren. Der reciproke Werth von $\lambda$ stellt zugleich die Wellenlänge $l = \frac{1}{\lambda}$ der betreffenden Strahlen in Tausendstel Millimetern dar. In den von ANGSTRÖM gewählten Einheiten würde dem obigen Werthe von $\lambda$ $l = 2101.15$ entsprechen.

Man erhält nun leicht

$$\frac{dn'}{dn} = \frac{0.0196004 + 0.00242592\,\lambda^3}{0.0118381 + 0.00087352\,\lambda^3} = 1.97670$$

mit dem FRAUNHOFER'schen empirischen Werthe des Zerstreuungsverhältnisses für die beiden gewählten Glassorten, wie bereits angeführt, im Einklang.

Auch für die übrigen von FRAUNHOFER geprüften Glassorten hat SCHMIDT analoge Formeln abgeleitet, die wir hier folgen lassen:

| | |
|---|---|
| Flintglas Nr. 13 | $n = 1.594345 + 0.0211634\,\lambda + 0.00058263\,\lambda^4$ |
| Kronglas Nr. 9 | $n = 1.507369 + 0.0120103\,\lambda + 0.00022260\,\lambda^4$ |
| Flintglas Nr. 3 | $n = 1.573555 + 0.0179565\,\lambda + 0.000537739\,\lambda^4$ |
| Kronglas L^a $M$ | $n = 1.533984 + 0.0133805\,\lambda + 0.00029364\,\lambda^4$ |
| Flintglas Nr. 23 | $n = 1.594909 + 0.0198651\,\lambda + 0.00061619\,\lambda^4$ |

Die gegenseitigen Zerstreuungsverhältnisse dieser sieben Glasarten, unter Zugrundelegung des vorhin für die hellsten Strahlen adoptirten Werthes $\lambda = 1.75815$, sind in der nachstehenden Tabelle enthalten:

| | F. 13 | F. 23 | F. 30 | F. 3 | K. L* M | K. 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| K. 13 | 2.03969 | 2.00540 | 1.97671 | 1.78703 | 1.19165 | 1.01592 |
| K. 9 | 2.00773 | 1.97398 | 1.94574 | 1.75903 | 1.17297 | |
| K. M | 1.71166 | 1.68288 | 1.65881 | 1.49964 | | |
| F. 3 | 1.14138 | 1.12219 | 1.10614 | | | |
| F. 30 | 1.03186 | 1.01451 | | | | |
| F. 23 | 1.01710 | | | | | |

*) während für die Brechungsverhältnisse der hellsten Strahlen sich die Werthe ergeben

| | | | |
|---|---|---|---|
| F. 13 | 1.637120 | K. L* M | 1.560315 |
| F. 23 | 1.635723 | K. 9 | 1.530612 |
| F. 30 | 1.632609 | K. 13 | 1.529007 |
| F. 3 | 1.610260 | | |

## §. 9. Correctionen wegen der Achromasie der Bilder und der Accommodation für verschiedene Entfernungen.

Der im §. 4 für die Bildgrösse gefundene Ausdruck war

$$P_i P_i' = E_i . PP'$$

wo

$$E_i = e_1 e_2 \ldots e_{i-1} \frac{m \pi_0}{m_i \pi^i}$$

Diese Grösse wird für die verschiedenfarbigen Strahlen des Spectrums beständig abnehmend oder zunehmend verharren, so lange der Differentialquotient, nach der Wellenlänge genommen, sein Vorzeichen nicht ändert. Für die Beseitigung farbiger Contouren und die Reinheit des Bildes ist es wesentlich, dass Strahlen von verschiedener Wellenlänge nahezu gleich grosse Bilder liefern**). Soll aber für

---

*) Aus der obigen Zusammenstellung geht die geringe Wahrscheinlichkeit hervor, dass das Flint- und Kronglas des Königsberger Heliometerobjectivs, wie noch neuerdings behauptet worden (Astronom. Nachrichten Nr. 2049, S. 143) beide unter den oben aufgeführten sieben Fraunhofer'schen Gläsern (als K. 9 und F. 13) enthalten sind. Wir müssen es dahin gestellt sein lassen, wie weit die an die Voraussetzung dieser Identität a. a. O. geknüpften Folgerungen aufrecht erhalten werden können.

**) Gauss macht auf diesen Umstand im Art. 22 seiner dioptrischen Untersuchungen mit folgenden Worten aufmerksam: »zur Vollkommenheit eines achro-

Strahlen zweier Wellenlängen $l$ und $l'$ die Bildgrösse die nämliche sein, so muss jener Differentialquotient für einen dazwischenliegenden Werth der Wellenlänge durch Null hindurchgehen, und wenn wir wie früher $l$ und $l'$ zusammenfallen und beide den intensivsten Strahlen angehören lassen, so ist

$$d E_i = \Sigma \frac{\partial E_i}{\partial m} d m = 0$$

die zu erfüllende Bedingung. Die Grösse des Bildes ändert sich dann möglichst wenig für die hellsten Strahlen des Spectrums, welche nach dem Früheren in der Entfernung $\frac{1}{a}$ zur Vereinigung gebracht worden sind.

Da wegen $\varkappa_{i-1} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{i-1} \varkappa$

$$E_i = \frac{m \pi_0}{m_i \pi^i} \cdot \frac{\varkappa}{\varkappa_{i-1}}$$

so folgt, dass der Werth von $\varkappa_{i-1}$ sich für die dem nämlichen $\varkappa$ angehörigen verschiedenfarbigen Strahlen möglichst wenig ändert; dieselben vereinigen sich also nicht allein nahe in demselben Punkte der Axe, sondern treten aus dem Objective auch an nahe derselben Stelle aus: eine Eigenschaft, welche man auch wohl »Stabilität der Achromasie« genannt hat.

Eine weitere Bedingung ist von John Herschel*) aufgestellt worden und betrifft die Forderung der Accommodation für verschiedene Ent-

---

»matischen Objectivs wird aber erforderlich sein, dass . . . die verschiedenfarbigen »Bilder . . . nicht bloss in Eine Ebene fallen, sondern auch gleiche Grösse haben. »Die erste Bedingung beruht auf der Identität des zweiten Brennpunkts für ver»schiedenfarbige Strahlen, die zweite auf der Gleichheit der Brennweite, und da »diese die Entfernung des zweiten Brennpunkts vom zweiten Hauptpunkte ist, so »kann man auch die beiden Bedingungen dadurch ausdrücken, dass beide Punkte zu»gleich für rothe und violette Strahlen dieselben sein müssen. . . In der Theorie der »achromatischen Objective pflegt man nur die erste Bedingung zu berücksichtigen. »Allein bei der gewöhnlichen Construction dieser Objective, wo die beiden Linsen »entweder in Berührung oder in einem äusserst geringen Abstande von einander »sich befinden, wird die Lage der Hauptpunkte von der ungleichen Brechbarkeit »der Lichtstrahlen so wenig afficirt, dass die zweite Bedingung von selbst erfüllt »ist, wenn nicht genau, doch so nahe, dass eine merkliche Unvollkommenheit nicht »daraus entstehen kann: auch lässt sich, wenn man es der Mühe werth hält, die »Dicke der Linsen so berechnen, dass eine genaue Identität des zweiten »Hauptpunktes für ungleiche Strahlen stattfindet. Anders verhält es sich hin»gegen, wenn die convexe Kronglaslinse von der concaven Flintglaslinse durch »einen beträchtlichen Abstand getrennt ist. . .«

*) Philosoph. Transactions, 1821, S. 227 u. 255.

fernungen. Der Ausdruck für die reciproke Vereinigungsweite $\varpi^i$ hängt von der durch die Entfernung des leuchtenden Punktes bedingten Grösse $\pi_0$ ab, und man hat den Einfluss einer Aenderung $\delta\pi_0$ zu untersuchen, wenn das Linsensystem für verschiedene Entfernungen des beobachteten Gegenstandes eingerichtet werden soll.

Sei der genannten Aenderung entsprechend

$$\delta\varpi^i = \delta A + \varkappa^2\delta B + \varkappa^4\delta C \ldots$$

so wird der Term $\delta A = \delta\pi^i$ allen Strahlen gemeinschaftlich sein, während die übrigen Terme von dem Abstande $\varkappa$ abhängen. Diese Glieder müssen also bei einer Aenderung der Entfernung die für einen bestimmten Werth von $\pi_0$ bestehende Aplanasie beeinträchtigen, wenn sie nicht für sich verschwinden. Da

$$\delta B = \frac{\partial B}{\partial \pi_0}\delta\pi_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 B}{\partial \pi_0^2}\delta\pi_0^2 \ldots, \qquad \delta C = \frac{\partial C}{\partial \pi_0}\delta\pi_0 \ldots$$

so wird, wenn Grössen von der Ordnung $\varkappa^2\delta\pi_0^2$ und $\varkappa^4\delta\pi_0$ vernachlässigt werden sollen, die Bedingung

$$\frac{\partial B}{\partial \pi_0} = 0$$

ausreichen, um $\varpi^i$ durch $\varpi^i + \delta A$ zu ersetzen, mit anderen Worten, um das deutliche Bild aus der Entfernung $\frac{1}{a}$ in die Entfernung $\frac{1}{a+\delta A}$ zu versetzen. Da die Längeneinheit beliebig gewählt werden kann, so ist diese Verrückung unbedenklich und hat nur eine Verschiebung des Oculars zur Folge. Dagegen fragt sich, ob nicht der Achromasie dadurch Eintrag geschieht. In der That muss für eine Aenderung der Wellenlänge um $\delta l$

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial \pi_0}\delta\pi_0 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 A}{\partial \pi_0^2}\delta\pi_0^2 \ldots \quad \text{um} \quad \frac{\partial^2 A}{\partial \pi_0 \partial l}\delta\pi_0\delta l$$

sich ändern. Allein man zeigt leicht, dass nicht bloss die sämmtlichen Terme von

$$\frac{\partial^2 \pi^i}{\partial \pi_0 \partial l} = \frac{\partial}{\partial l}(e_1 e_2 \ldots e_{i-1})^2$$

noch in die Dicken $d_k$ multiplicirt sind, sondern es ist dieser Betrag auch in Folge der Bedingung $dE_i = 0$ zu vernachlässigen.

## §. 10. Entwickelung der Bedingungsgleichungen.

Bevor wir zu numerischen Anwendungen übergehen, werden die verschiedenen im Vorstehenden enthaltenen Bedingungsgleichungen

$$A + \frac{1}{4} B K^2 = a\,, \qquad B + \frac{6}{5} C K^2 = 0$$

$$dA = 0\,, \quad dB = 0\,, \quad dE_i = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial B}{\partial \pi_0} = 0$$

der weiteren Entwickelung zu unterwerfen sein. Wir beginnen mit der Ableitung der Werthe von $A$ und $B$.

Die Addition der Gleichungen

$$m_i(\pi^i - \varrho_{i-1}) = m_{i-1}(\pi_{i-1} - \varrho_{i-1})$$

ergibt sofort

$$m_i \pi^i = m(\pi_0 - \varrho) + m_i \varrho_{i-1} + \Sigma' m_k(\varrho_{k-1} - \varrho_k) + \Sigma' m_k(\pi_k - \pi^k)$$

wo $k$ die Werthe von 1 bis $i-1$ durchläuft. Nimmt man das erste und das letzte Mittel identisch, z. B. als Luft, und setzt demgemäss

$$m_i = m\,, \qquad \text{allgemein} \qquad m_k = m n_k\,, \qquad dm_k = m\, dn_k$$

so wird wegen

$$\pi_k - \pi^k = \pi^k \pi_k d_k$$

$$A = \pi^i = \pi_0 + \Sigma'(n_k - 1)(\varrho_{k-1} - \varrho_k) + \Sigma' n_k \pi^k \pi_k d_k$$

Auf ähnliche Weise folgt aus der Combination der Gleichungen

$$m_i \varDelta \pi^i = \frac{1}{2} L_{i-1} \varkappa_{i-1}^2 + e_{i-1}^2 m_{i-1} \varDelta \pi^{i-1}$$

des § 2

$$m_i \varDelta \pi^i = \frac{1}{2}\{L_{i-1}\varkappa_{i-1}^2 + e_{i-1}^2 L_{i-2}\varkappa_{i-2}^2 + e_{i-2}^2 e_{i-1}^2 L_{i-3}\varkappa_{i-3}^2 .. + (e_1 e_2 .. e_{i-1})^2 L \varkappa^2\}$$

Da $B$ den Coefficienten der in $\varkappa^2$ multiplicirten Glieder in $\varDelta \pi^i$ darstellt, so hat man einfach

$$\varkappa_i = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \,..\, \varepsilon_{i-1} \varkappa$$

$$x^4 - \frac{6}{5}x^2 + \frac{3}{10} = 0$$

werden. Man erhält durch Auflösung derselben

$$\lambda = \sqrt{\frac{3}{5} + \frac{1}{10}\sqrt{6}} = 0.9192111$$

$$\lambda' = \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\sqrt{6}} = 0.5958618$$

übereinstimmend mit GAUSS*), wenn man den aus GEHLER's Wörterbuch, Bd. VI, S. 437 in Bd. V der Werke, S. 509 übergegangenen und bereits in SCHMIDT's analytischer Optik gerügten Druckfehler verbessert, der in der Weglassung der äusseren Wurzelzeichen besteht.

Auch die übrigen von GAUSS a. a. O. gemachten Angaben finden in der abgeleiteten Formel volle Bestätigung. Zunächst ist aus der Gleichung

$$0 = B + C\mu^2 K^2$$

zu entnehmen, dass allgemein Strahlen, welche das Objectiv in $lK$ und $l'K$ treffen, die Axe in den nämlichen Punkten schneiden, wenn $l^2 + l'^2 = \mu^2$ ist, nur ändert sich dabei der Abstand dieser Durchschnittspunkte vom Objective. Für Centralstrahlen oder $l = 0$, $l' = \mu$ erhält man z. B.

$$\varpi^i = A = a + \nu^2 CK^4 = a + \frac{3}{10} CK^4$$

während für Randstrahlen oder $l = 1$, $l' = \sqrt{\frac{1}{5}}$

$$\varpi^i = a + (1 - \mu^2 + \nu^2)\, CK^4 = a + \frac{1}{10} CK^4$$

wird. Auf der anderen Seite tritt das Maximum der Abweichung für solche Strahlen ein, für welche $\frac{\partial \varpi^i}{\partial x^2} = 0$, d. h.

$$B + 2Cx^2 = 0 \qquad \text{oder} \qquad x^2 = -\frac{B}{2C} = \frac{1}{2}\mu^2 K^2$$

also für $x = K\sqrt{\frac{3}{5}}$, mit anderen Worten für $l = l'$ oder

$$\varpi^i = a - \left(\frac{1}{4}\mu^4 - \nu^2\right) CK^4 = a - \frac{3}{50} CK^4$$

*) In einem an Brandes gerichteteten Briefe aus dem Jahre 1830.

Lässt man $\mu$ willkürlich und bestimmt nur $\nu$ durch die Gleichung $\frac{\partial u}{\partial \nu^2} = 0$, setzt also demgemäss

$$\nu^2 = \frac{2}{3}\mu^2 - \frac{1}{2}$$

so wird

$$u = 2\pi J\Pi\left(\frac{C}{a}\right)^2 K'^{12}\left\{\frac{1}{12} - \frac{1}{5}\mu^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\mu^2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8}\mu^4 - \frac{1}{3}\mu^2\left(\frac{2}{3}\mu^2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\mu^2 - \frac{1}{2}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{24}\pi J\Pi\left(\frac{C}{a}\right)^2 K'^{12}\left\{1 - \frac{8}{5}\mu^2 + \frac{2}{3}\mu^4\right\}$$

wie bei GAUSS. Für $\mu = 0$ wird $\nu^2 = -\frac{1}{2}$, d. h.

$$\lambda^2 = -\lambda'^2, \qquad \lambda^2\lambda'^2 = -\frac{1}{2}, \qquad \lambda^2 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \qquad \lambda'^2 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$$

so dass sich keine Strahlen für verschiedene $\varkappa$ in der Axe schneiden können. Von allen Strahlen treffen nur die Centralstrahlen $l = l' = 0$ mit den Nachbarstrahlen zusammen, da für $\mu = 0$ in $\varpi^i$ die in $B$ oder $\varkappa^2$ multiplicirten Glieder verschwinden:

$$\varpi^i = A + C\varkappa^4$$

Setzt man hier $A = a$, so entspricht diess den Werthen $\nu = 0$ und $u = \frac{1}{6}\pi J\Pi\left(\frac{C}{a}\right)^2 K^{12}$, welche letztere Grösse GAUSS durch $E$ bezeichnet.

Will man endlich die Centralstrahlen mit den Randstrahlen zusammenfallen lassen, so geschieht diess für

$$\lambda = 0, \qquad \lambda' = 0, \qquad \mu = 1, \qquad \nu = 0$$

$$u = \frac{1}{60}\pi J\Pi\left(\frac{C}{a}\right)^2 K^{12}, \qquad \varpi^i = a + C\varkappa^2(\varkappa^2 - K^2)$$

und das Maximum der Längenabweichung

$$\varpi^i = a + \frac{1}{4}CK^4$$

entspricht den Strahlen, für welche $\varkappa^2 = \frac{1}{2}K^2$ oder $l = \sqrt{\frac{1}{2}}$, wofür GAUSS in seinem Aufsatze im 4. Bande der »Zeitschrift für Astronomie«, December 1817 (Werke, Bd. V, S. 505) den approximativen Werth $l = \frac{7}{10}$ angibt, während er in dem Rechnungsbeispiele daselbst für $K = \sin 18^0 30'$ $\varkappa = \sin 13^0$ setzt.

Natürlich lässt sich eine weitere Steigerung der Bildschärfe, bez.

denen sich die Gleichungen

$$d\pi_i = e_i^2 d\pi^i, \qquad de_i = d_i e_i^2 d\pi^i, \qquad d\varepsilon_i = -d_i d\pi^i$$

anreihen. Für die Differentiation nach $\pi_0$ wird einfach

$$m_i \frac{\partial \pi^i}{\partial \pi_0} = m(e_1 e_2 \ldots e_{i-1})^2, \qquad m_i \frac{\partial \pi_i}{\partial \pi_0} = m(e_1 e_2 \ldots e_i)^2$$
$$m_i \frac{\partial e_i}{\partial \pi_0} = m(e_1 e_2 \ldots e_i)^2 d_i, \qquad m_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \pi_0} = -m(e_1 e_2 \ldots e_{i-1})^2 d_i$$

Hiermit folgt weiter:

$$\frac{\partial L_i}{\partial m_{k<i}} = (e_{k+1} e_{k+2} \ldots e_i)^2 S_k T_i$$
$$\frac{\partial L_i}{\partial m_i} = (\pi_i - \varrho_i)^2 (2\pi_i - \varrho_i) + S_i T_i$$
$$\frac{\partial L_i}{\partial m_{i+1}} = -(\pi^{i+1} - \varrho_i)^2 (2\pi^{i+1} - \varrho_i)$$
$$\frac{\partial L_i}{\partial m_{k>i+1}} = 0$$
$$\frac{\partial L_i}{\partial \pi_0} = m(e_1 e_2 \ldots e_i)^2 T_i$$

nebst den abgekürzten Bezeichnungen

$$L_i = m_i(\pi^{i+1} - \pi_i)(\pi_i - \varrho_i)(\pi^{i+1} + \pi_i - \varrho_i)$$
$$^{*)} = \frac{m_i(m_i - m)}{mm} (\pi_i - \varrho_i)^2 [m_i(\pi_i - \varrho_i) + m\pi_i] -$$
$$- \frac{m_{i+1}(m_{i+1} - m)}{mm} (\pi^{i+1} - \varrho_i)^2 [m_{i+1}(\pi^{i+1} - \varrho_i) + m\pi^{i+1}]$$

$$S_i = \pi_i - \varrho_i - e_i^2(\pi^i - \varrho_{i-1}) = e_i^2 \varrho_{i-1} - \varrho_i - \pi_i^2 d_i$$

$$T_i = (\pi^{i+1} - \pi_i)(3\pi^{i+1} + 3\pi_i - 4\varrho_i) = 2(\pi^{i+1} - \varrho_i)^2 - 2(\pi_i - \varrho_i)^2 + \pi^{i+1}\pi^{i+1} - \pi_i \pi_i$$

---

*) Die obige identische Transformation von $L_i$, auf die bereits Hansen (2. dioptr. Abh. S. 719 des X. Bandes) aufmerksam gemacht hat, führt zu einer eigenthümlichen Umformung des Aggregats

$$\Omega_i = L + \varepsilon_1^3 L_1 + (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^3 L_2 \ \ldots \ + (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{i-1})^3 L_{i-1}$$

welches dem Ausdrucke für $B$ analog gebildet ist. Schreibt man nämlich

$$L_i^0 = \frac{m_i(m_i - m)}{mm} (\pi_i - \varrho_i)^2 [m_i(\pi_i - \varrho_i) + m\pi_i]$$
$$L'_{i-1} = \frac{m_i(m_i - m)}{mm} (\pi^i - \varrho_{i-1})^2 [m_i(\pi^i - \varrho_{i-1}) + m\pi^i]$$
$$\Psi_i = \frac{m_i}{m} \{(\pi_i - \varrho_i)^2 + e_i(\pi^i - \varrho_{i-1})(\pi_i - \varrho_i) + e_i^2(\pi^i - \varrho_{i-1})^2\} + \pi_i\{\pi_i - \varrho_i + e_i(\pi^i - \varrho_{i-1})\}$$

welchen wir zum demnächstigen Gebrauche noch beifügen

$$R_i = (\pi_i - \varrho_i)^2 (2\pi_i - \varrho_i) \mp e_i^4 (\pi^i - \varrho_{i-1})^2 (2\pi^i - \varrho_{i-1})$$

$$\Lambda_k^i = \frac{1}{m} (e_{k+1} \ldots e_{i-1})^2 \{L_k + \varepsilon_{k+1}^4 L_{k+1} + \varepsilon_{k+1}^4 \varepsilon_{k+2}^4 L_{k+2} \ldots + (\varepsilon_{k+1} \ldots \varepsilon_{i-1})^4 L_{i-1}\}$$

## §. 11. Fortsetzung.

Schreibt man ferner

$$c_h^i = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{h-1} e_h e_{h+1} \ldots e_{i-1}$$

so ist

$$\frac{1}{c_h^i} dc_h^i = -d_1 e_1 d\pi' - d_2 e_2 d\pi'' \ldots - d_{h-1} e_{h-1} d\pi^{h-1} + d_h e_h d\pi^h \ldots + d_{i-1} e_{i-1} d\pi^{i-1}$$

folglich

$$\frac{\partial}{\partial m_k} \left\{\frac{e_h e_{h+1} \ldots e_{i-1}}{e_1 e_2 \ldots e_{h-1}}\right\}^2 = 2 c_h^i c_h^i \left\{d_{i-1} e_{i-1} \frac{\partial \pi^{i-1}}{\partial m_k} \ldots \pm d_k e_k \frac{\partial \pi_k}{\partial m_k}\right\}$$

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem $k > h$ oder $k < h$ ist. Damit wird

$$m \frac{\partial B}{\partial m_k} = \frac{1}{2} c_k^i c_k^i \left\{\frac{\partial L_{k-1}}{\partial m_k} + \varepsilon_k^4 \frac{\partial L_k}{\partial m_k} + \varepsilon_k^4 \varepsilon_{k+1}^4 \frac{\partial L_{k+1}}{\partial m_k} \ldots + (\varepsilon_k \varepsilon_{k+1} \ldots \varepsilon_{i-1})^4 \frac{\partial L_{i-1}}{\partial m_k}\right\}$$

$$+ L c_1^i \frac{\partial c_1^i}{\partial m_k} + L_1 c_2^i \frac{\partial c_2^i}{\partial m_k} \ldots + L_{i-1} c_i^i \frac{\partial c_i^i}{\partial m_k}$$

— — · — —

so nimmt die Differenz $L_i^0 - e_i^3 L'_{i-1}$ die Form an

$$L_i^0 - e_i^3 L'_{i-1} = \frac{m_i(m_i - m)}{m} (e_i \varrho_{i-1} - \varrho_i) \Psi_i$$

Da nun für $m = m_i$

$$\Omega_i = \sum_{k=1}^{i-1} (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k)^3 (L_k^0 - e_k^3 L'_{k-1})$$

so erhält man schliesslich den Ausdruck

$$\Omega_i = \Sigma \frac{m_k(m_k - m)}{m} (e_k \varrho_{k-1} - \varrho_k)(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_k)^3 \Psi_k$$

von welchem später Gebrauch gemacht werden soll.

Ferner geht die obige Formel für $L_i^0 - e_i^3 L'_{i-1}$, wenn man darin $m = m_i$ setzt, über in

$$(2\pi_i - \varrho_i)(\pi_i - \varrho_i)^2 - e_i^3 (2\pi^i - \varrho_{i-1})(\pi^i - \varrho_{i-1})^2 = (e_i \varrho_{i-1} - \varrho_i) \mathrm{P}_i$$

$$\mathrm{P}_i = \{(\pi_i - \varrho_i)^2 + e_i(\pi_i - \varrho_i)(\pi^i - \varrho_{i-1}) + e_i^2 (\pi^i - \varrho_{i-1})^2\} + \pi_i\{\pi_i - \varrho_i + e_i(\pi^i - \varrho_{i-1})\}$$

Ebenso erhält man

$$\frac{\partial}{\partial \pi_0}\left\{\frac{e_h e_{h+1} \cdot\cdot e_{i-1}}{e_1 e_2 \cdot\cdot e_{h-1}}\right\}^2 = 2\, \overset{i}{c}_h \overset{i}{c}_h \left\{d_{i-1} e_{i-1} \frac{\partial \pi^{i-1}}{\partial \pi_0} \cdots - d_1 e_1 \frac{\partial \pi'}{\partial \pi_0}\right\}$$

sowie

$$m \frac{\partial B}{\partial \pi_0} = \frac{1}{2}\, \overset{i}{c}_1 \overset{i}{c}_1 \left\{\frac{\partial L}{\partial \pi_0} + \overset{4}{\varepsilon}_1 \frac{\partial L_1}{\partial \pi_0} + \overset{4}{\varepsilon}_1 \overset{4}{\varepsilon}_2 \frac{\partial L_2}{\partial \pi_0} \cdots + (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot\cdot \varepsilon_{i-1})^4 \frac{\partial L_{i-1}}{\partial \pi_0}\right\}$$

$$+ L \overset{i}{c}_1 \frac{\partial \overset{i}{c}_1}{\partial \pi_0} + L_1 \overset{i}{c}_2 \frac{\partial \overset{i}{c}_2}{\partial \pi_0} \cdot\cdot + L_{i-1} \overset{i}{c}_i \frac{\partial \overset{i}{c}_i}{\partial \pi_0}$$

Endlich ergibt sich durch logarithmische Differentiation des Werthes

$$E_i = e_1 e_2 \cdot\cdot e_{i-1} \frac{\pi_0}{\pi^i}$$

$$\frac{dE_i}{E_i} = d_1 e_1 d\pi' + d_2 e_2 d\pi'' \ldots + d_{i-1} e_{i-1} d\pi^{i-1} - \frac{d\pi^i}{\pi^i}$$

wenn $\pi_0$ als constant betrachtet wird. Da nun für Strahlen von der Wellenlänge $l$ bis auf Grössen von der Ordnung $K^4$ die Gleichungen

$$A = \pi^i = a\,, \qquad d\pi^i = 0$$

zu erfüllen sind, und bei Ableitung der Vergrösserung $E_i$ $\varkappa^2$ vernachlässigt worden ist, so geht, wenn die Dicken $d_i$ nicht kleiner als von der Ordnung $K^2$ genommen werden, der Ausdruck hervor

$$d \log E_i = \Sigma \left\{d_k e_k \frac{\partial \pi^k}{\partial m_k} + d_{k+1} e_{k+1} \frac{\partial \pi^{k+1}}{\partial m_k} \cdots + d_{i-1} e_{i-1} \frac{\partial \pi^{i-1}}{\partial m_k}\right\} dm_k$$

Man sieht, dass bei gegebenen Brechungs- und Zerstreuungsverhältnissen das Verschwinden dieses Ausdrucks wesentlich durch die Wahl der Dicken $d_i$ bedingt sein wird.

Es ist nun nicht schwer, die noch erforderlichen Substitutionen zu machen, nach deren Vornahme die folgenden Werthe erhalten werden:

$$dA = \Sigma \frac{\partial \pi^i}{\partial m_k} dm_k = \Sigma (e_{k+1} e_{k+2} \cdot\cdot e_{i-1})^2 S_k dn_k$$

$$dB = \overset{i}{c}_1 \overset{i}{c}_1 \Sigma dn_k \Big[\frac{1}{2} (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot\cdot \varepsilon_k)^4 \left\{R_k + S_k (T_k + \overset{2}{\varepsilon}_{k+1} T_{k+1} + \overset{2}{\varepsilon}_{k+1} \overset{2}{\varepsilon}_{k+2} T_{k+2} \cdot\cdot + (\varepsilon_{k+1} \cdot\cdot \varepsilon_{i-1})^2 T_{i-1})\right\} -$$

$$- \frac{d_k}{n_k} e_k (\pi^k - \varrho_{k-1}) \mathrm{B}_k^i + S_k \left\{\frac{d_{k+1}}{n_{k+1}} e_{k+1} \mathrm{B}_{k+1}^i + \frac{d_{k+2}}{n_{k+2}} \overset{2}{e}_{k+1} e_{k+2} \mathrm{B}_{k+2}^i \cdot\cdot + \frac{d_{i-1}}{n_{i-1}} (e_{k+1} \cdot\cdot e_{i-2})^2 e_{i-1} \mathrm{B}_{i-1}^i\right\}\Big]$$

$$\frac{\partial B}{\partial \pi_0} = c_1^i c_1^i \left\{ \frac{1}{2} (T + \varepsilon_1^2 T_1 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 T_2 \,..\, + (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \,..\, \varepsilon_{i-1})^2 T_{i-1}) + \right.$$
$$\left. + \frac{d_1}{n_1} e_1 \mathrm{B}_1^i + \frac{d_2}{n_2} e_1^2 e_2 \mathrm{B}_2^i \,..\, + \frac{d_{i-1}}{n_{i-1}} (e_1 e_2 \,..\, e_{i-2})^2 e_{i-1} \mathrm{B}_{i-1}^i \right\}$$

$$\frac{dE_i}{E_i} = \Sigma\, dn_k \left\{ -\frac{d_k}{n_k} e_k (\pi^k - \varrho_{k-1}) + S_k \left( \frac{d_{k+1}}{n_{k+1}} e_{k+1} + \frac{d_{k+2}}{n_{k+2}} e_{k+1}^2 e_{k+2} \,..\, + \frac{d_{i-1}}{n_{i-1}} (e_{k+1} \,..\, e_{i-2})^2 e_{i-1} \right) \right\}$$

nebst

$$\mathrm{B}_k^i = \frac{1}{m} \left\{ L + \varepsilon_1^4 L_1 \ldots + (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{k-1})^4 L_{k-1} - (\varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_k)^4 L_k - \,..\, - (\varepsilon_1 \,..\, \varepsilon_{i-1})^4 L_{i-1} \right\}$$
$$= (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \,..\, \varepsilon_{i-1})^2 \left\{ (e_k e_{k+1} \,..\, e_{i-1})^2 \varDelta_0^k - (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \,..\, \varepsilon_k)^2 \varDelta_k^i \right\}$$

In $dB$ enthalten die in $T_{i-1}$ multiplicirten Glieder den Factor $dA$ und dürfen desshalb weggelassen werden. Das Gleiche gilt von den mit $d_{i-1}$ behafteten Termen in $dB$ und $dE$, wenn man die Glieder

$$-\frac{d_{i-1}}{n_{i-1}} \varepsilon_{i-1} (\pi_{i-1} - \varrho_{i-1}) \mathrm{B}_{i-1}^i dn_{i-1} \quad \text{und resp.} \quad -\frac{d_{i-1}}{n_{i-1}} \varepsilon_{i-1} (\pi_{i-1} - \varrho_{i-1}) dn_{i-1}$$

ausnimmt. Da ferner bei Aufstellung der Bedingungsgleichungen $dB = 0$, $\frac{\partial B}{\partial \pi_0} = 0$ und $dE_i = 0$ Grössen von der Ordnung $K^2$ vernachlässigt worden sind, so kann man nicht allein die Gleichung $dA = 0$ damit combiniren, sondern auch die Relation $B = 0$, welche nur bis auf Grössen von der Ordnung $K^2$ exclusive genau ist, zur Vereinfachung anwenden. Damit ergibt sich wegen

$$2B = (e_k e_{k+1} \,..\, e_{i-1})^2 \varDelta_0^k + (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \,..\, \varepsilon_k)^2 \varDelta_k^i$$
$$\mathrm{B}_k^i = 2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \,..\, \varepsilon_{k-1})^2 \varDelta_0^k = -2(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \,..\, \varepsilon_{i-1})^2 (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \,..\, \varepsilon_k)^2 \varDelta_k^i$$

Folglich darf man schreiben:

$$dB = \sum_k (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \,..\, \varepsilon_k)^2 dn_k \left[ \frac{1}{2} (e_{k+1} \,..\, e_{i-1})^2 \left\{ R_k - S_k (T_k + \varepsilon_{k+1}^2 T_{k+1} + \varepsilon_{k+1}^2 \varepsilon_{k+2}^2 T_{k+2} \,..\, + (\varepsilon_{k+1} \,..\, \varepsilon_{i-2})^2 T_{i-2}) \right\} \right.$$
$$+ 2 \frac{d_k}{n_k} e_k (\pi^k - \varrho_{k-1}) \varDelta_k^i - 2 S_k \left\{ \frac{d_{k+1}}{n_{k+1}} \varepsilon_{k+1} \varDelta_{k+1}^i + \frac{d_{k+2}}{n_{k+2}} \varepsilon_{k+2} \varDelta_{k+2}^i \,..\, \text{bis } \frac{d_{i-1}}{n_{i-1}} \varepsilon_{i-1} \varDelta_{i-1}^i \right\} \Bigg]$$

oder bis $\frac{d_{i-2}}{n_{i-2}} \varepsilon_{i-2} \varDelta_{i-2}^i \Big\} \Big]$, Letzteres wenn man für $k = i - 1$ das Glied

$$+ 2 \frac{d_{i-1}}{n_{i-1}} e_{i-1} (\pi^{i-1} - \varrho_{i-2}) \varDelta_{i-1}^i \quad \text{durch} \quad + 2 \frac{d_{i-1}}{n_{i-1}} \varepsilon_{i-1} (\pi_{i-1} - \varrho_{i-1}) \varDelta_{i-1}^i \quad \text{ersetzt;}$$

$$\frac{\partial B}{\partial \pi_0} = \frac{1}{2} (e_1 e_2 \,..\, e_{i-1})^2 \left\{ T + \varepsilon_1^2 T_1 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 T_2 \,..\, + (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \,..\, \varepsilon_{i-1})^2 T_{i-1} \right\}$$
$$- 2 \left\{ \frac{d_1}{n_1} \varepsilon_1 \varDelta_1^i + \frac{d_2}{n_2} \varepsilon_2 \varDelta_2^i \,..\, + \frac{d_{i-1}}{n_{i-1}} \varepsilon_{i-1} \varDelta_{i-1}^i \right\}$$

während die Combination von $dA = 0$ mit $dE$ den Werth

$$dE_i = E_i \Sigma dn_k \left\{ -\frac{d_k}{n_k}(\pi_k - e_k\varrho_{k-1}) + S_k \left( \frac{d_{k+1}}{n_{k+1}} e_{k+1} + \frac{d_{k+2}}{n_{k+2}} e_{k+1}^2 e_{k+2} \ldots + \frac{d_{i-2}}{n_{i-2}} (e_{k+1} \ldots e_{i-3})^2 e_{i-2} \right) \right\}$$

mit den beiden letzten Gliedern

$$-\frac{d_{i-2}}{n_{i-2}}(\pi_{i-2} - e_{i-2}\varrho_{i-3})\,dn_{i-2} - \frac{d_{i-1}}{n_{i-1}}(\pi^{i-1} - \varepsilon_{i-1}\varrho_{i-1})\,dn_{i-1}$$

oder

$$-\frac{n_{i-3}}{n_{i-2}^2} d_{i-2} e_{i-2} (\pi_{i-3} - \varrho_{i-3})\,dn_{i-2} - \frac{1}{n_{i-1}^2} d_{i-1}\varepsilon_{i-1}(\pi^i - \varrho_{i-1})\,dn_{i-1}$$

liefert.

## §. 12. Bedingungsgleichungen für drei und vier Brechungen.

Für $i = 3$ und $i = 4$ werden die Bedingungsgleichungen verhältnissmässig einfach. Man erhält

für drei Brechungen:

$$A = \pi_0 + (n_1 - 1)(\varrho - \varrho_1) + (n_2 - 1)(\varrho_1 - \varrho_2) + n_1 \pi' \pi_1 d_1 + n_2 \pi'' \pi_2 d_2$$

$$dA = e_2^2 S_1 dn_1 + S_2 dn_2$$

$$B = \frac{1}{2m}\left\{ e_1^2 e_2^2 L + \varepsilon_1^2 e_2^2 L_1 + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 L_2 \right\}$$

$$dB = \varepsilon_1^2 dn_1 \left\{ \frac{1}{2} e_2^2 (R_1 + S_1 T_1) + 2\frac{d_1}{n_1} e_1 (\pi' - \varrho) \varLambda_1^3 \right\} + \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 dn_2 \left\{ \frac{1}{2} R_2 + 2\frac{d_2}{n_2} \varepsilon_2 (\pi_2 - \varrho_2) \varLambda_2^3 \right\}$$

$$\frac{\partial B}{\partial \pi_0} = \frac{1}{2}\left\{ e_1^2 e_2^2 T + e_2^2 T_1 + T_2 \right\} - 2\left\{ \frac{d_1}{n_1}\varepsilon_1 \varLambda_1^3 + \frac{d_2}{n_2}\varepsilon_2 \varLambda_2^3 \right\}$$

$$dE = -E\left\{ \frac{d_1}{n_1}(\pi_1 - e_1\varrho)\,dn_1 + \frac{d_2}{n_2}(\pi'' - \varepsilon_2\varrho_2)\,dn_2 \right\}$$

$$= -E\left\{ \frac{d_1}{n_1^2} e_1 (\pi_0 - \varrho)\,dn_1 + \frac{d_2}{n_2^2}\varepsilon_2(\pi''' - \varrho_2)\,dn_2 \right\}$$

für vier Brechungen:

$$A = \pi_0 + (n_1 - 1)(\varrho - \varrho_1) + (n_2 - 1)(\varrho_1 - \varrho_2) + (n_3 - 1)(\varrho_2 - \varrho_3)$$
$$+ n_1 \pi' \pi_1 d_1 + n_2 \pi'' \pi_2 d_2 + n_3 \pi''' \pi_3 d_3$$

$$dA = e_2^2 e_3^2 S_1 dn_1 + e_3^2 S_2 + S_3 dn_3$$

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1}{2m}\left\{(e_1e_2e_3)^2L + (\varepsilon_1e_2e_3)^2L_1 + (\varepsilon_1\varepsilon_2e_3)^2L_2 + (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)^2L_3\right\} \\
dB &= \varepsilon_1^2 dn_1\left\{\frac{1}{2}e_2^2e_3^2(R_1 + S_1(T_1 + \varepsilon_2^2T_2)) + 2\frac{d_1}{n_1}e_1(\pi' - \varrho)\Delta_1^4 - 2\frac{d_2}{n_2}\varepsilon_2S_1\Delta_2^4\right\} \\
&\quad + (\varepsilon_1\varepsilon_2)^2 dn_2\left\{\frac{1}{2}e_3^2(R_2 + S_2T_2) + 2\frac{d_2}{n_2}e_2(\pi'' - \varrho_1)\Delta_2^4\right\} \\
&\quad + (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3)^2 dn_3\left\{\frac{1}{2}R_3 + 2\frac{d_3}{n_3}\varepsilon_3(\pi_3 - \varrho_3)\Delta_3^4\right\} \\
\frac{\partial B}{\partial \pi_0} &= \frac{1}{2}\left\{(e_1e_2e_3)^2T + (e_2e_3)^2T_1 + e_3^2T_2 + T_3\right\} - 2\left\{\frac{d_1}{n_1}\varepsilon_1\Delta_1^4 + \frac{d_2}{n_2}\varepsilon_2\Delta_2^4 + \frac{d_3}{n_3}\varepsilon_3\Delta_3^4\right\} \\
\frac{dE}{E} &= -\left\{\frac{d_1}{n_1}(\pi_1 - e_1\varrho) - \frac{d_2}{n_2}e_2S_1\right\}dn_1 - \frac{d_2}{n_2}(\pi_2 - e_2\varrho_1)\,dn_2 - \frac{d_3}{n_3}(\pi''' - \varepsilon_3\varrho_3)\,dn_3 \\
&= -\frac{d_1}{n_1^2}e_1(\pi_0 - \varrho)dn_1 + \frac{d_2}{n_2^2}e_2\left\{S_1dn_1 - \frac{n_1}{n_2}(\pi_1 - \varrho_1)dn_2\right\} - \frac{d_3}{n_3^2}\varepsilon_3(\pi^{IV} - \varrho_3)dn_3
\end{aligned}
$$

Drei Brechungen finden statt, wenn bei zwei Linsen die Hinterfläche der ersteren mit der Vorderfläche der zweiten zusammenfällt. Man hat mithin über drei Krümmungshalbmesser und das Verhältniss der Dicken zu verfügen. Dies geschieht durch die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
A + \tfrac{1}{4}BK^2 &= a\,, & B + \tfrac{6}{5}CK^2 &= 0 \\
dA &= 0\,, & dE &= 0
\end{aligned}
$$

so dass die Werthe von $dB$ und $\frac{\partial B}{\partial \pi_0}$ ausser Spiel bleiben müssen*).

Bei vier Brechungen stossen im Allgemeinen drei Linsen von verschiedener Brechbarkeit aneinander. Als speciellen Fall hat man es anzusehen, wenn zwei durch Luft getrennte Linsen das brechende System bilden; man hat dann einfach $m = m_2 = m_4$, $dn_2 = 0$ zu setzen. Da jetzt ein Krümmungshalbmesser mehr zu bestimmen ist, so kann eine der beiden übrigen Bedingungsgleichungen, also entweder

$$dB = 0 \qquad \text{oder} \qquad \frac{\partial B}{\partial \pi_0} = 0$$

hinzutreten, deren Auswahl von dem Zwecke des Apparates abhängen

---

*) Es könnte scheinen, als ob in denjenigen Fällen, in welchen von dem Stattfinden der Gleichung $dB = 0$ abstrahirt werden muss, die Bedingung $dA = 0$ vielmehr durch $dA + \frac{1}{4}K^2dB = 0$ zu ersetzen wäre. Zieht man indessen in Betracht, dass S. 555 die ursprüngliche Form der Bedingungsgleichungen

$$A = a + \frac{3}{10}CK^4\,, \qquad 0 = B + \frac{6}{5}CK^2$$

gefunden wurde, so ergiebt sich durch Differentiation der ersteren, bei Vernachlässigung von $K^4dC$ und unabhängig von dem Werthe von $dB$, die benutzte Gleichung $dA = 0$. (Vgl. die Anmerkung zu S. 564.)

wird. Uebrigens versteht sich von selbst, dass den aufgestellten Bedingungsgleichungen nicht Genüge geleistet werden kann, sobald sich für die Krümmungshalbmesser imaginäre, oder — wenigstens bei dioptrischen Systemen — für die Linsendicken negative Werthe ergeben.

In den bisherigen Entwickelungen ist über das Maass der Dicken der einzelnen Medien, so wenig wie über deren Brechungsverhältnisse, irgend eine beschränkende Voraussetzung gemacht worden, so dass die gegebenen Formeln gleichmässig anwendbar sind auf Objective oder Oculare, auf ganze Fernröhre oder Mikroskope, ja endlich auch auf katoptrische wie auf dioptrische Systeme, nur muss bei spiegelnden Flächen der Brechungsexponent $m$ sein Vorzeichen umkehren. Da unser nächster Zweck die Untersuchung eines astronomischen Fernrohrobjectivs sein soll, wollen wir im Folgenden die Dicken $d_i$ als kleine Grössen betrachten, welche in der ersten Annäherung vernachlässigt werden können; ebenso soll später $\pi_0 = 0$ gesetzt werden.

## §. 13. Allgemeine Approximationsmethode. Gleichungen der ersten Approximation für drei Brechungen.

Die Auflösung der Bedingungsgleichungen findet zweckmässig auf indirectem Wege, d. h. durch successive Approximationen statt. Wir bedienen uns zu diesem Zwecke der folgenden

allgemeinen Approximationsmethode.

Sei die Gleichung $Fx = y$ nach $x$ aufzulösen, wo

$$Fx = fx + \delta fx$$

aus einem Haupt- und Nebengliede besteht, welches letztere von der ersten Ordnung angenommen werden mag. Wenn nun $x'$ der Gleichung

$$fx' = y$$

genügt, so ist offenbar

$$Fx' - y = \delta fx'$$

eine kleine Grösse erster Ordnung. Bestimmt man hierauf $x''$ aus der Gleichung

$$f x'' = 2y - Fx'$$

so ist nicht allein $f x' - f x'' = Fx' - y = \delta f x'$ von der ersten, sondern auch

$$Fx'' - y = \delta f x'' - \delta f x'$$

von der zweiten Ordnung. Setzt man ferner

$$f x''' = 3y - Fx' - Fx''$$

so ergibt sich analog $f x'' - f x''' = Fx'' - y = \delta f x'' - \delta f x'$ von der zweiten Ordnung und

$$Fx''' - y = \delta f x''' - \delta f x''$$

von der dritten Ordnung u. s. w. Allgemein erhält man durch beliebige Fortsetzung dieses Verfahrens die Differenz $Fx^{(n)} - y$ von der $n^{ten}$ Ordnung; wenn folglich Grössen dieser Ordnung vernachlässigt werden dürfen, so ist $x = x^{(n)}$ die gesuchte Auflösung der Gleichung $Fx = y$. Wesentlich bei der entwickelten Methode ist, dass wenn $Fx$ und $f x$ bekannt sind, $\delta f x$ nicht direct gegeben zu sein braucht.

Das Verfahren behält unverändert seine Anwendbarkeit bei Auflösung eines Systems von $i$ Gleichungen von der Form

$$F_1(x_1 x_2 \ldots x_i) = y_1 \quad \ldots \quad F_i(x_1 x_2 \ldots x_i) = y_i$$

wo wiederum $F_k = f_k + \delta f_k$. Denn seien $x_1' x_2' \ldots x_i'$ die Lösungen des Gleichungensystems $f_k(x_1' x_2' \ldots x_i') = y_k$, wofür wir kürzer $f_k' = y_k$ schreiben wollen, so sind die Differenzen $F_k' - y_k = \delta f_k'$ von der ersten Ordnung. Sei ferner für die Argumente $x_1'' x_2'' \ldots x_i''$

$$f_k'' = 2y_k - F_k'$$

so erhält man genau wie früher

$$f_k' - f_k'' = F_k' - y_k = \delta f_k', \qquad F_k'' - y_k = \delta f_k'' - \delta f_k',$$

Grössen resp. von der ersten und von der zweiten Ordnung, u. s. w.

Um die vorstehend charakterisirte Approximationsmethode auf den vorliegenden Fall anzuwenden, wollen wir in Gemässheit der am Schlusse des vorigen Paragraphen gemachten Voraussetzungen in der ersten Approximation von den in $d_i$ und $K^2$ multiplicirten Gliedern absehen, und demzufolge $\pi^i = \pi_i$, $e_i = \varepsilon_i = 1$ setzen. Dadurch vereinfachen sich die zu behandelnden Ausdrücke wesentlich und man erhält zur

ersten Approximation für drei Brechungen:

$$
\begin{aligned}
a - \pi_0 &= (n_1 - 1)(\rho - \rho_1) + (n_2 - 1)(\rho_1 - \rho_2) \\
0 &= (\rho - \rho_1)\, d n_1 + (\rho_1 - \rho_2)\, d n_2 \\
0 &= \frac{1}{2m}(L + L_1 + L_2) \\
0 &= \frac{d_1}{n_1^2}(\pi_0 - \rho)\, d n_1 + \frac{d_2}{n_2^2}(\pi''' - \rho_2)\, d n_2
\end{aligned}
$$

Da für $e = 1 : 2mB$ mit $\Omega$ zusammenfällt, so kann die Gleichung $B = 0$ in der Form des § 10 (Anmerkung zu S. 575) angewandt und durch

$$\frac{1}{2}\{n_1(n_1 - 1)(\rho - \rho_1)\Psi_1 + n_2(n_2 - 1)(\rho_1 - \rho_2)\Psi_2\} = 0$$

ersetzt werden.

Es bleiben noch die reciproken Vereinigungsweiten $\pi' = \pi_1$ und $\pi'' = \pi_2$ mit Hülfe der Fundamentalgleichungen

$$\pi_0 - \rho = n_1(\pi' - \rho)\,, \qquad n_2(\pi_2 - \rho_2) = \pi''' - \rho_2$$

zu eliminiren. Man erhält sogleich, wenn

$$\rho = \rho_1 + g_1\,, \qquad \rho_2 = \rho_1 + g_2$$

gesetzt werden, die Werthe

$$
\begin{aligned}
\pi_1 = \pi' &= \frac{1}{n_1}[\pi_0 + (n_1 - 1)(g_1 + \rho_1)] \\
\pi_2 = \pi'' &= \frac{1}{n_2}[\pi''' + (n_2 - 1)(g_2 + \rho_1)]
\end{aligned}
$$

und damit wegen

$$
\begin{aligned}
\Psi_1 &= (3n_1 + 2)\pi_1^2 - (3n_1 + 1)\pi_1(\rho + \rho_1) + n_1(\rho^2 + \rho\rho_1 + \rho_1^2) \\
\Psi_2 &= (3n_2 + 2)\pi_2^2 - (3n_2 + 1)\pi_2(\rho_1 + \rho_2) + n_2(\rho_1^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_2^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n_1^2\Psi_1 = {} & (n_1 + 2)\rho_1^2 - [(2n_1^2 - n_1 - 4)g_1 + 4(n_1 + 1)\pi_0]\rho_1 + \\
& + (n_1^3 - 2n_1^2 + 2)g_1^3 + (3n_1^2 - 3n_1 - 4)\pi_0 g_1 + (3n_1 + 2)\pi_0^2 \\
n_2^2\Psi_2 = {} & (n_2 + 2)\rho_1^2 - [(2n_2^2 - n_2 - 4)g_2 + 4(n_2 + 1)\pi''']\rho_1 + \\
& + (n_2^3 - 2n_2^2 + 2)g_2^2 + (3n_2^2 - 3n_2 - 4)\pi''' g_2 + (3n_2 + 2)\pi'''^2
\end{aligned}
$$

Man hat folglich zuerst $g_1$ und $g_2$ aus den linearen Gleichungen

$$(n_1-1)g_1-(n_2-1)g_2 = u-\pi_0$$

$$g_1 dn_1 - g_2 dn_2 = 0$$

zu bestimmen und hierauf die quadratische Gleichung

$$\tfrac{1}{2}n_1(n_1-1)g_1\Psi_1 - \tfrac{1}{2}n_2(n_2-1)g_2\Psi_2 = 0$$

nach $\rho_1$ aufzulösen, wodurch die Werthe der reciproken Krümmungshalbmesser vermöge der zwischen $\rho$ und $g_1$, $\rho_2$ und $g_2$ bestehenden Relationen bekannt sind. Für das Verhältniss der Linsendicken folgt endlich

$$\frac{d_1}{d_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{\pi'''-\rho_2}{\rho-\pi_0}\cdot\frac{dn_2}{dn_1}$$

HANSEN*) schreibt vor, die obige quadratische Gleichung nicht in Bezug auf $\rho_1$, sondern in Bezug auf die neue Unbekannte

$$g = n_1(\pi_1-\rho_1) = n_2(\pi''-\rho_1) = \frac{n_1 n_2}{n_1+n_2}(\pi_1+\pi''-2\rho_1)$$

aufzulösen. Durch Einführung dieser Grösse nehmen die Werthe für $\Psi_1$ und $\Psi_2$ die elegante Form an

$$n_1\Psi_1 = \left(1+\frac{2}{n_1}\right)g^2-(3g_1-2\pi_0)g+n_1g_1(g_1-\pi_0)$$

$$n_2\Psi_2 = \left(1+\frac{2}{n_2}\right)g^2-(3g_2-2\pi''')g+n_2g_2(g_2-\pi''')$$

und man erhält schliesslich vermöge

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(\pi_1+\pi'') - \frac{n_1+n_2}{2n_1n_2}g$$

in der ersten Approximation

$$\rho_1 = \pi_0+(n_1-1)g_1-g = \pi'''+(n_2-1)g_2-g$$

so wie

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{n_1^2 g_1}{n_2^2 g_2}\cdot\frac{g-n_2g_2}{n_1g_1-g}.$$

---

*) Vgl. die dioptrische Abhandlung Bd. X, S. 720.

## §. 14. Berechnung des Hansen'schen Objectivs.

Der numerischen Rechnung, welche überhaupt hier nur beispielsweise geführt werden kann, wollen wir mit Hansen die optischen Constanten der Glassorten des berühmten Königsberger Heliometerobjectivs zu Grunde legen, für welche Bessel*) nach Fraunhofer die Zahlen gibt

$$n = 1.529130 \qquad n' = 1.639121 \qquad \frac{dn'}{dn} = 2.02500$$

Wir setzen dabei voraus, dass diese Werthe in der That den hellsten Strahlen des Spectrums angehören. Auch werden wir die beiden Combinationen untersuchen, welche sich ergeben, wenn man $n_1 = n$, $n_2 = n'$ und $n_1 = n'$, $n_2 = n$ annimmt. Ausserdem setzen wir $a = 1$, $\pi_0 = 0$.

Es werden dadurch vier verschiedene Objective von mässigen Krümmungen erhalten.

Die Bedingungsgleichungen

$$A + \tfrac{1}{4} B K^2 = 1\,, \qquad dA = 0$$

$$B + \tfrac{6}{5} C K^2 = 0\,, \qquad \frac{dE}{E} = 0$$

nebst

$$A = \pi''' = (n_1 - 1)(\varrho - \varrho_1) + (n_2 - 1)(\varrho_1 - \varrho_2) + n_1 \pi' \pi_1 d_1 + n_2 \pi'' \pi_2 d_2$$

$$dA = e_2^2 (e_1^2 \varrho - \varrho_1 - \pi_1^2 d_1)\, dn_1 + (e_2^2 \varrho_1 - \varrho_2 - \pi_2^2 d_2)\, dn_2$$

$$B = \frac{1}{2} \Big\{ (e_1 e_2)^2 \pi' \varrho (\varrho - \pi') + (\varepsilon_1 e_2)^2 n_1 (\pi_1 - \varrho_1)(\pi'' - \pi_1)(\pi'' + \pi_1 - \varrho_1) +$$
$$+ (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 (\pi''' - \varrho_2)(\pi''' - \pi_2)(\pi''' + \pi_2 - \varrho_2) \Big\}$$

$$\frac{dE}{E} = d_1 e_1 \varrho \frac{dn_1}{n_1^2} - d_2 \varepsilon_2 (\pi''' - \varrho_2) \frac{dn_2}{n_2^2}$$

*) Bessel in den Astronomischen Nachrichten No. 415, sowie in der ausführlichen Untersuchung des Königsberger Objectivs, Astronomische Untersuchungen Bd. I, S. 101.

reducirten sich in der ersten Approximation auf

$$1 = (n_1 - 1)\,g_1 - (n_2 - 1)\,g_2 \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{g_1} = n_1 - 1 - (n_2 - 1)\frac{dn_1}{dn_2}$$

$$0 = g_1 dn_1 - g_2 dn_2 \qquad\qquad \frac{1}{g_2} = (n_1 - 1)\frac{dn_2}{dn_1} - (n_2 - 1)$$

$$0 = ag^2 + bg + c = \tfrac{1}{2}(n_1 - 1)\,g_1\left\{\left(1 + \frac{2}{n_1}\right)g^2 - 3g_1 g + n_1 g_1^2\right\}$$

$$- \tfrac{1}{2}(n_2 - 1)\,g_2\left\{\left(1 + \frac{2}{n_2}\right)g^2 - (3g_2 - 2)\,g + n_2 g_2 (g_2 - 1)\right\}$$

$$0 = d_1 \varrho \frac{dn_1}{n_1^2} - d_2 (1 - \varrho_2)\frac{dn_2}{n_2^2}$$

Durch Substitution der numerischen Werthe erhält man ohne Schwierigkeit

I. für $n_1 = n$, $n_2 = n'$

$$g_1 = +4.683518\,, \qquad g_2 = +2.312848$$

$$1.218834\,gg - 13.75992\,g + 37.88319 = 0$$

mithin die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$g' = +4.760852\,, \qquad g'' = +6.528558$$

II. für $n_1 = n'$, $n_2 = n$

$$g_1 = -2.312848\,, \qquad g_2 = -4.683518$$

$$1.218834\,gg + 14.75992\,g + 43.95530 = 0$$

nebst den beiden Wurzeln

$$g' = -5.281079\,, \qquad g'' = -6.828764$$

Da $g_1$ und $-g_2$ mit einander vertauscht werden, bleibt der Coefficient von $g^2$ ungeändert, also $a' = a$, während zugleich

$$b' + b = 1\,, \qquad c' - c = \tfrac{1}{2} n_1 (n_1 - 1)\,g_1^2 - \tfrac{1}{2} n_2 (n_2 - 1)\,g_2^2$$

Für die Dimensionen der hieraus entspringenden vier Objective ergeben sich wegen

$$g = \frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}(\pi_1 + \pi'' - 2\varrho_1)\,{}^{*)}, \qquad g_1 = \varrho - \varrho_1\,, \qquad g_2 = \varrho_2 - \varrho_1$$

---

*) In der ersten Approximation darf man dem vorigen Paragraphen zufolge $\varrho_1 = (n_1 - 1)\,g_1 - g$ setzen.

die Werthe:

| 1. | 2. | 3. | 4. |
| --- | --- | --- | --- |
| $\varrho = +2.400856$, | $\varrho = +1.490041$, | $\varrho = +0.633150$, | $\varrho = +3.037726$ |
| $\varrho_1 = -2.282662$, | $\varrho_1 = +3.802889$, | $\varrho_1 = -4.050368$, | $\varrho_1 = +5.350574$ |
| $\varrho_2 = +0.030186$, | $\varrho_2 = -0.880629$, | $\varrho_2 = -1.737520$, | $\varrho_2 = +0.667056$ |
| $d_1 = 0.711892 d_2$, | $d_1 = 0.716165 d_2$, | $d_1 = 7.619781 d_2$, | $d_1 = 0.0621915 d_2$ |

Bei den Objectiven 1. und 3. geht die Kronglaslinse voran, bei 2. und 4. dagegen die Flintglaslinse. Die Krümmungshalbmesser der ersteren stimmen mit den von Hansen gefundenen Werthen*) überein. Das Objectiv 1. besteht aus einer doppelt convexen Kronglaslinse und einer doppelt concaven Flintglaslinse; das Objectiv 2. besteht aus einer convex-concaven Flintglaslinse und einer doppelt convexen Kronglaslinse; das Objectiv 3. besteht aus einer doppelt convexen Kronglaslinse und einer concav-convexen Flintglaslinse; das Objectiv 4. endlich besteht aus einer convex-concaven Flintglaslinse und einer ebensolchen Kronglaslinse. Die Krümmungen können sämmtlich als wohl ausführbar gelten, und die Dicken sind wie erforderlich überall positiv, obgleich beim 3. und 4. Objective die Kronglaslinse übermässig dick werden würde. Wir beschränken uns desshalb auf die weitere Untersuchung des 1. und 2. Objectivs, welche auch geringere Krümmungen als die beiden anderen besitzen. Die vortheilhaftesten Krümmungsverhältnisse bietet das von Hansen aufgestellte Objectiv 1, während das Verhältniss der Dicken sich bei No. 2 günstiger gestaltet, sofern die doppelt convexe Kronglaslinse bei ersterem von geringerer, bei letzterem von grösserer Dicke sein soll als die anschliessende Flintglaslinse.

Da die Oeffnung eines Objectivs caeteris paribus um so grösser genommen werden darf, je kleiner die Linsenkrümmungen sind, und die Summe der $\varrho$ bei No. 1) 4.71, bei No. 2) 6.17 beträgt, so mag bei 1) $K = \frac{1}{20}$, bei 2) $K = \frac{1}{25}$ gesetzt werden**). Bei den Convexlinsen sind die Minima der Dicken durch die Formel

$$d = \frac{1}{2} K^2 (\varrho - \varrho_1) \ldots$$

---

*) S. 723 der »dioptrischen Untersuchungen«.

**) Selbstverständlich ohne damit diese Werthe für die Praxis als besonders vortheilhaft präjudiciren zu wollen.

gegeben. Diess würde für die Kronglaslinse des ersten Objectivs $d_1 = 0.0058544$, beim zweiten Objectiv $d_2' = 0.0037468$ ergeben. Mit Rücksicht auf die S. 602 citirten Bemerkungen REPSOLD's müssen wir diese Werthe auf $d_1 = 0.0066667$, $d_2' = 0.0053333$ erhöhen, und erhalten die zugehörigen Flintglasdicken in der ersten Approximation $d_2 = 0.0093648$, $d_1' = 0.0038195$. Immerhin würden die FRAUNHOFER'schen Maasse beim Königsberger Heliometer, nämlich

$$K = 35\,, \qquad d_1 = 6\,, \qquad d_2 = 4$$

eine weitere Vergrösserung der Dicken indiciren, beim ersten Objectiv etwa um $\frac{2}{7}$, beim zweiten um $\frac{1}{4}$. Eine Vergrösserung der Flintglasdicke $d_2$ dürfte jedoch beim ersten Objectiv kaum zulässig erscheinen, während beim zweiten Objectiv $d_1'$ auf $0.0047744$, $d_2'$ auf $0.0066667$ ohne Bedenken erhöht werden kann. Wir werden desshalb bei den Kronglaslinsen beider Objective den Werth $d = \frac{1}{150}$ der weiteren Rechnung zu Grunde legen. Endlich wollen wir noch das zweite Objectiv 2* für die Oeffnung $K = \frac{1}{20}$ und die Kronglasdicke $d = \frac{1}{120}$ untersuchen.

## §. 15. Zweite Approximation.

Wenn wir uns zur zweiten Approximation wenden, sind vor Allem die Coefficienten $A\ B\ C$ in der Entwickelung von $\varpi'''$ aufzusuchen. Durch die Berechnung des Kettenbruchs

$$\frac{1}{s_2} \dot{+} \frac{1}{t_2} \dot{+} \frac{1}{s_1} \dot{+} \frac{1}{t_1} \dot{+} \frac{1}{s} = -\frac{1}{A}$$

oder, was dasselbe ist, des Gleichungensystems (vergl. S. 547)

$$n_1\pi' = -s\,, \qquad \frac{1}{n_1\pi_1} = \frac{1}{n_1\pi'} - t_1$$

$$n_2\pi'' = n_1\pi_1 - s_1\,, \qquad \frac{1}{n_2\pi_2} = \frac{1}{n_2\pi''} - t_2$$

$$\pi''' = n_2\pi_2 - s_2$$

ergeben sich für die beiden Objective die reciproken Werthe der Vereinigungsweiten der Axenstrahlen

| | 1. | 2. | 2*. |
|---|---|---|---|
| $\pi' =$ | 0.8307763 | 0.5809922 | 0.5809922 |
| $\pi_1 =$ | 0.8354031 | 0.5826084 | 0.5830137 |
| $\pi'' =$ | 0.6261696 | 0.3509721 | 0.3514067 |
| $\pi_2 =$ | 0.6298632 | 0.3517953 | 0.3524387 |
| $\pi''' =$ | 1.0131292 | 1.0039077 | 1.0048918 |

Zur Controle rechne man

$$A = \pi''' = (n_1 - 1) g_1 - (n_2 - 1) g_2 + n_1 \pi' \pi_1 d_1 + n_2 \pi'' \pi_2 d_2$$

Für die Ableitung der Werthe von $B$ und $C$, d. i.

$$B = \frac{1}{2m}\left\{(e_1 e_2)^2 L + (\varepsilon_1 e_2)^2 L_1 + (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 L_2\right\}$$

$$C = \frac{3\varepsilon_1^2}{8m}\left\{(e_1 e_2)^2 L\,[(\varrho - \varrho_1)(\varrho + \varrho_1 - 3\pi_1) + \pi''(\pi'' - \varrho_1) - \pi_0(\pi_0 - \varrho)] - \right.$$
$$\left. - (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 L_2 [(\varrho_1 - \varrho_2)(\varrho_1 + \varrho_2 - 3\pi'') + \pi'''(\pi''' - \varrho_2) - \pi_1(\pi_1 - \varrho_1)]\right\}^{*)}$$

bedarf man der früher eingeführten Hülfsgrössen

$$\frac{1}{m} L = \frac{m - m_1}{m_1 m_1} (\pi_0 - \varrho)^2 (\overline{m + m_1} \pi_0 - m\varrho) = \frac{n_1 - 1}{n_1 n_1} \varrho^3$$

$$\frac{1}{m} L_1 = \frac{n_1 (n_1 - n_2)}{n_2} (\pi_1 - \varrho_1)^2 (\pi'' + \pi_1 - \varrho_1) = \frac{n_2 (n_1 - n_2)}{n_1} (\pi'' - \varrho_1)^2 (\pi'' + \pi_1 - \varrho_1)$$

$$\frac{1}{m} L_2 = \frac{m_2 - m}{m_2 m_2} (\pi''' - \varrho_2)^2 (\overline{m_2 + m} \pi''' - m\varrho_2) = \frac{n_2 - 1}{n_2 n_2} (\pi''' - \varrho_2)^2 (\overline{n_2 + 1} \pi''' - \varrho_2)$$

Da $C$ in den Bedingungsgleichungen nur in $K^2$ multiplicirt vorkommt, haben wir bei der Entwickelung des obigen Ausdrucks nicht allein $B = 0$ gesetzt, sondern uns auch die Vernachlässigung der Dicken gestattet. Wie leicht ersichtlich kann man daher auch schreiben

$$C = \frac{3}{8m}\left\{L [g_1 (\varrho + \varrho_1 - 3\pi_1) + \frac{1}{n_2} g \pi''] + \right.$$
$$\left. + L_2 [g_2 (\varrho_1 + \varrho_2 - 3\pi'') + \frac{1}{n_1} g \pi_1 - \pi'''(\pi''' - \varrho_2)]\right\}$$

---

*) Der vollständige Ausdruck für $C$ enthält ausserdem noch die Glieder

$$+ \frac{3\varepsilon_1^2}{8m} (e_1 e_2)^2 L\, d_1 e_1 \left\{(\pi' + \pi_1)(\varrho^2 + \pi_0 \varrho - \pi_0^2) - 3\pi' \pi_1 \varrho + 2 e_1^2 \frac{L}{m_1}\right\}$$
$$- \frac{3\varepsilon_1^2}{8m} (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 L_2 d_2 \varepsilon_2 \left\{(\pi'' + \pi_2)(\varrho_2^2 + \pi''' \varrho_2 - \pi''' \pi''') - 3\pi'' \pi_2 \varrho_2 - 2 \varepsilon_2^2 \frac{L_2}{m_2}\right\}$$
$$+ B \left\{\varepsilon_1 M + \frac{1}{4} \varepsilon_1^2 (N_1 + T_1) + \frac{1}{2} \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 T_2 - \frac{1}{m_1} L\, d_1 e_1 + \frac{1}{m_2} (m B - 2 \varepsilon_1^2 \varepsilon_2^2 L_2) d_2 \varepsilon_2\right\}$$

Die numerische Rechnung ergibt

| | 1. | 2. | 2*. |
|---|---|---|---|
| $\lg \frac{1}{m} L =$ | 0.4957719 | 9.8959557 | 9.8959557 |
| $\lg \frac{1}{m} L_1 =$ | 0.5723239*n* | 0.5450885*n* | 0.5448523*n* |
| $\lg \frac{1}{m} L_2 =$ | 9.7836111 | 0.4390635 | 0.4398328 |
| $B =$ | + 0.0301033 | + 0.0050896 | + 0.0063488 |
| $C =$ | − 12.8098 | − 15.6849 | − 15.7054 |

folglich

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A + \frac{1}{4} B K^2 =$ | 1.0131480 | 1.0039097 | 1.0048958 |
| $B + \frac{6}{5} C K^2 =$ | −0.008326 | −0.025025 | −0.040767 |

Ferner erhält man die Werthe

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\lg S_1 =$ | 0.6726225 | 0.3628909*n* | 0.3625747*n* |
| $\lg S_2 =$ | 0.3698782*n* | 0.6721489 | 0.6725461 |

und damit

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{dA}{dn_1} =$ | +0.0156268 | +0.0042620 | +0.0053393 |

Gehen wir zu den Strahlen über, welche das Objectiv in den Entfernungen $\varkappa = \lambda K$, $\bar{\varkappa} = \lambda' K$ von der Axe treffen, wo wegen

$$\lambda = 0.9192111 \qquad \lg \lambda = 9.9634152$$
$$\lambda' = 0.5958618 \qquad \lg \lambda' = 9.7751455$$

| | 1. | 2. | 2*. |
|---|---|---|---|
| $\lg \varkappa =$ | 8.6623852 | 8.5654752 | 8.6623852 |
| $\lg \bar{\varkappa} =$ | 8.4741155 | 8.3772055 | 8.4741155 |

so hat man für $\alpha = 0$ die strengen Gleichungen des § 1

$$n_1 \sin \omega' = \sin \omega = \varkappa \varrho$$
$$\varrho \sin \omega_1 = \varrho_1 \sin \omega' - (g_1 + \varrho \varrho_1 d_1) \sin (\omega - \omega' = \alpha_1)$$
$$n_2 \sin \omega'' = n_1 \sin \omega_1$$
$$\varrho_1 \sin \omega_2 = \varrho_2 \sin \omega'' + (g_2 - \varrho_1 \varrho_2 d_2) \sin (\alpha_1 + \omega_1 - \omega'' = \alpha_2)$$
$$\sin \omega''' = n_2 \sin \omega_2$$

$$\frac{\varrho_2}{\varpi'''} = 1 + \frac{\sin\omega'''}{\sin(\alpha_2+\omega_2-\omega'''=\alpha_3)}$$

oder

$$2\frac{\varpi'''}{\varrho_2} = 1 + \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha_3-\omega''')}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(\alpha_2+\omega_2)}$$

Wenn $\varrho_2$ sehr klein ist*), so rechnet man genauer, indem man durch Multiplication der Formeln

$$\varrho_1\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\omega_2)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\omega_2) = \varrho_2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\omega'')\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\omega'') - \tfrac{1}{2}\varrho_1\varrho_2 d_2\sin\alpha_2$$

$$\frac{\varrho_2}{\varpi'''} = \frac{2\sin\frac{1}{2}(\alpha_2+\omega_2)\cos\frac{1}{2}(\alpha_3-\omega''')}{\sin\alpha_3}$$

$\varrho_2$ eliminirt, wodurch

$$\frac{\varrho_1}{\varpi'''} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha_3-\omega''')}{\sin\alpha_3\cos\frac{1}{2}(\alpha_2-\omega_2)}\left\{2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2+\omega'')\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2-\omega'') - \varrho_1 d_2\sin\alpha_2\right\}$$

Man erhält für

$$\varkappa = \lambda K$$

| | 1. | 2. | 2*. |
|---|---|---|---|
| $\omega$ = | 6° 20′ 6″.663 | 3° 8′ 26″.183 | 3° 55′ 36″.717 |
| $\omega'$ = | 4 8 17.371 | 1 54 55.542 | 2 23 40.331 |
| $\alpha_1$ = | 2 11 49.292 | 1 13 30.641 | 1 31 56.386 |
| $\omega_1$ = | −8 12 37.822 | +6 46 58.170 | 8 29 2.288 |
| $\omega''$ = | −7 39 22.050 | +7 16 23.751 | 9 5 57.222 |
| $\alpha_2$ = | +1 38 33.520 | +0 44 5.060 | 0 55 1.452 |
| $\omega_2$ = | −1 33 49.875 | −2 34 52.156 | −3 13 21.372 |
| $\omega'''$ = | −2 33 49.981 | −3 56 55.361 | −4 55 52.561 |
| $\alpha_3$ = | +2 38 33 626 | +2 6 8.265 | +2 37 32.641 |
| $\varpi'''$ = | 1.0131345 | 1.0038859 | 1.0048347 |

$$\bar{\varkappa} = \lambda' K$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\omega$ = | 4° 6′ 6″.507 | 2° 2′ 6″.899 | 2° 32′ 39″.707 |
| $\omega'$ = | 2 40 52.078 | 1 14 29.427 | 1 33 7.030 |
| $\alpha_1$ = | 1 25 14.429 | 0 47 37.472 | 0 59 32.677 |
| $\omega_1$ = | −5 18 19.070 | 4 23 24.814 | 5 29 11.839 |
| $\omega''$ = | −4 56 54.140 | 4 42 24.137 | 5 52 57.436 |
| $\alpha_2$ = | +1 3 49.499 | 0 28 38.149 | 0 35 47.080 |

*) Vgl. Hansen, Dioptrische Untersuchungen, Art. 33.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\omega_2 =$ | $-1\ 0\ 45.909$ | $-1\ 40\ 26.080$ | $-2\ 5\ 25.558$ |
| $\omega''' =$ | $-1\ 39\ 36.612$ | $-2\ 33\ 36.416$ | $-3\ 11\ 50.976$ |
| $\alpha_3 =$ | $+1\ 42\ 40.202$ | $+1\ 21\ 48.485$ | $+1\ 42\ 12.498$ |
| $\overline{\varpi}''' =$ | 1.0131513 | 1.0039062 | 1.0048861 |

Die Verification der Gleichungen

$$\beta\varpi''' + \overline{\beta}\overline{\varpi}''' = A + \frac{1}{4}BK^2 \qquad \lg\beta = 9.3312946n$$

$$\varpi''' - \overline{\varpi}''' = \frac{\sqrt{6}}{5}K^2\left(B + \frac{6}{5}CK^2\right) \qquad \lg\overline{\beta} = 0.0843741$$

des § 10 kann zur Controle dienen. Will man auch den Gang der Strahlen berechnen, welche (abgesehen von den Strahlen in der Nähe der Axe) der grössten sphärischen Abweichung nach Erfüllung der Bedingungsgleichungen unterworfen bleiben, so hat man nach § 6 $x = K$ und $x = K_0 = K\sqrt{\frac{3}{5}}$ zu setzen, also die Werthe zu substituiren

| | | | |
|---|---|---|---|
| $K$ | 8.6989700 | 8.6020600 | 8.6989700 |
| $K_0$ | 8.5880456 | 8.4911356 | 8.5880456 |

Die Längenabweichung beträgt im ersten Falle $\frac{1}{10}CK^4$, im zweiten $-\frac{3}{50}CK^4$, während für die Centralstrahlen $\pi^i - a = \frac{3}{10}CK^4$ gefunden wurde*).

## §. 16. Fortsetzung.

Die zu berechnenden Gleichungen der zweiten Approximation werden nunmehr

| | 1. | 2. | 2*. |
|---|---|---|---|
| $(n_1-1)g_1 - (n_2-1)g_2 =$ | $+0.9868520$ | $+0.9960903$ | $+0.9951042$ |
| $g_1 - g_2\frac{dn_2}{dn_1} =$ | $-0.0156268$ | $-0.0042620$ | $-0.0053393$ |
| $ag^2 + bg + c =$ | $+0.008326$ | $+0.025025$ | $+0.040767$ |

*) Wenn im vorigen Paragraphen schätzungsweise die erste Potenz der Objectivöffnung $K$ der Summe der reciproken Linsenhalbmesser umgekehrt proportional angenommen wurde, so kann man bemerken, dass bei den hier betrachteten beiden Objectiven vielmehr die Werthe des Coefficienten $C$ jene Proportion nahezu erfüllen. Die Forderung einer gleichen Längenabweichung würde folglich auf die Proportionalität von $K^4$ führen.

$$a = \frac{1}{2}(n_1-1)\left(1+\frac{2}{n_1}\right)g_1 - \frac{1}{2}(n_2-1)\left(1+\frac{2}{n_2}\right)g_2$$

$$b = -\frac{3}{2}(n_1-1)g_1^2 + \frac{1}{2}(n_2-1)g_2(3g_2-\pi''')$$

$$c = \frac{1}{2}(n_1-1)n_1 g_1^3 - \frac{1}{2}(n_2-1)n_2 g_2^2(g_2-\pi''')$$

$$\varrho_1 = \frac{1}{2}(\pi_1+\pi'') - \frac{n_1+n_2}{2n_1n_2}g\,, \qquad \varrho = \varrho_1+g_1\,, \qquad \varrho_2 = \varrho_1+g_2$$

$$\frac{d_1}{d_2} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \frac{dn_2}{dn_1}\varepsilon_1\varepsilon_2\frac{\pi'''-\varrho_2}{\varrho}$$

Eine analoge Rechnung wie in § 14 liefert

| | | | |
|---|---|---|---|
| $g_1 =$ | $+4.645038$, | $-2.314368$, | $-2.314757$ |
| $g_2 =$ | $+2.301564$, | $-4.677965$, | $-4.676571$ |

nebst den quadratischen Gleichungen für $g$:

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $1.203345\,g^2 - 13.53697\,g + 36.96239 = 0$, | $g = +4.664828$ |
| 2) | $1.214365\,g^2 + 14.71864\,g + 43.78337 = 0$, | $g = -5.240619$ |
| 2*) | $1.213238\,g^2 + 14.70827\,g + 43.73076 = 0$, | $g = -5.226092$ |

Hieraus entspringen die Objectivdimensionen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| II. | $\varrho =$ | $+2.427538$ | $+1.464630$ | $+1.455472$ |
| | $\varrho_1 =$ | $-2.217500$ | $+3.778998$ | $+3.770229$ |
| | $\varrho_2 =$ | $+0.084064$ | $-0.898967$ | $-0.906342$ |
| | $d_1 =$ | $0.666816\,d_2$ | $0.733444\,d_2$ | $0.740348\,d_2$ |

nebst den Vereinigungsweiten

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\pi' =$ | 0.8400090 | 0.5710839 | 0.5675132 |
| $\pi_1 =$ | 0.8447396 | 0.5726832 | 0.5695073 |
| $\pi'' =$ | 0.6392524 | 0.3420514 | 0.3392780 |
| $\pi_2 =$ | 0.6433640 | 0.3428332 | 0.3402399 |
| $\pi''' =$ | 1.0008249 | 0.9999071 | 0.9998438 |

Damit gehen die Werthe hervor

| | | | |
|---|---|---|---|
| $L$ | 0.5101716 | 9.8735448 | 9.8653728 |
| $L_1$ | 0.5516460*n* | 0.5405492*n* | 0.5386049*n* |
| $L_2$ | 9.7086440 | 0.4466893 | 0.4509407 |
| $S_1$ | 0.6691028 | 0.3631903*n* | 0.3629558*n* |
| $S_2$ | 0.3681604*n* | 0.6715871 | 0.6718220 |

folglich, mit Berücksichtigung des in $B$ multiplicirten Gliedes im Ausdrucke von $C$ (S. 588):

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{dA}{dn_1} =$ | $+ 0.0009406$ | $- 0.0000598$ | $- 0.0000961$ |
| $B =$ | $+ 0.123930$ | $+ 0.027766$ | $+ 0.040074$ |
| $C =$ | $- 11.3960$ | $- 15.1146$ | $- 14.9472$ |
| $A + \frac{1}{4} BK^2 =$ | $+ 1.0009024$ | $+ 0.9999182$ | $+ 0.9998688$ |
| $B + \frac{6}{5} CK^2 =$ | $+ 0.089742$ | $- 0.001254$ | $- 0.004768$ |

Für die dritte Approximation*) sind demnach die Gleichungen zu lösen:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(n_1 - 1) g_1 - (n_2 - 1) g_2 =$ | $+ 0.9859496$ | $+ 0.9961721$ | $+ 0.9952354$ |
| $g_1 - g_2 \frac{dn_2}{dn_1} =$ | $- 0.0165674$ | $- 0.0042022$ | $- 0.0052432$ |
| $ag^2 + bg + c =$ | $- 0.081416$ | $+ 0.026279$ | $+ 0.045535$ |

deren Berechnung die Resultate ergibt

| | | | |
|---|---|---|---|
| $g_1 =$ | $+ 4.642203$ | $- 2.314409$ | $- 2.314822$ |
| $g_2 =$ | $+ 2.300628$ | $- 4.678169$ | $- 4.676898$ |

1) $1.202279\, g^2 - 13.50156\, g + 36.94932 = 0$, $g = + 4.723144$

2) $1.214462\, g^2 + 14.71019\, g + 43.75256 = 0$, $g = - 5.248807$

2*) $1.213392\, g^2 + 14.69809\, g + 43.69071 = 0$, $g = - 5.234747$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| III. | $\varrho =$ | $+ 2.399055$ | $+ 1.460335$ | $+ 1.448060$ |
| | $\varrho_1 =$ | $- 2.243148$ | $+ 3.774744$ | $+ 3.762883$ |
| | $\varrho_2 =$ | $+ 0.057479$ | $- 0.903425$ | $- 0.914015$ |
| | $d_1 =$ | $0.684698\, d_2$ | $0.735808\, d_2$ | $0.745210\, d_2$ |

Die Vorbereitungen zur vierten Approximation liefern

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\pi' =$ | 0.8301531 | 0.5694092 | 0.5646233 |
| $\pi_1 =$ | 0.8347731 | 0.5710042 | 0.5666103 |
| $\pi'' =$ | 0.6282336 | 0.3405578 | 0.3367012 |
| $\pi_2 =$ | 0.6321001 | 0.3413327 | 0.3376485 |
| $\pi''' =$ | 0.9993523 | 0.9999716 | 0.9999416 |
| $L$ | 0.4947942 | 9.8697183 | 9.8587208 |
| $L_1$ | 0.5566320*n* | 0.5396871*n* | 0.5371122*n* |
| $L_2$ | 9.7359530 | 0.4493408 | 0.4554745 |
| $S_1$ | 0.6687896 | 0.3632012*n* | 0.3629734*n* |
| $S_2$ | 0.3677850*n* | 0.6715977 | 0.6718347 |

*) Die numerische Ausführung der folgenden Approximationen verdanke ich der Güte des Herrn Dr. FEDDERSEN.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{dA}{dn_1} =$ | $-$ 0.0008085 | $-$ 0.0000135 | $-$ 0.0000220 |
| $B =$ | $+$ 0.061697 | $+$ 0.036428 | $+$ 0.055110 |
| $C =$ | $-$ 11.7198 | $-$ 15.1131 | $-$ 14.7848 |
| $A + \frac{1}{4} BK^2 =$ | $+$ 0.9993909 | $+$ 0.9999862 | $+$ 0.9999760 |
| $B + \frac{6}{5} CK^2 =$ | $+$ 0.025537 | $+$ 0.007411 | $+$ 0.010757 |

wobei der vollständige Werth von $C$ benutzt wurde. Damit folgen die Gleichungen

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(n_1 - 1) g_1 - \overline{n_2 - 1}\, g_2 =$ | $+$ 0.9865587 | $+$ 0.9961859 | $+$ 0.9952594 |
| $g_1 - g_2 \frac{dn_2}{dn_1} =$ | $-$ 0.0157591 | $-$ 0.0041887 | $-$ 0.0052212 |
| $ag^2 + bg + c =$ | $-$ 0.107955 | $+$ 0.018868 | $+$ 0.034778 |

nebst den Lösungen

| | | | |
|---|---|---|---|
| $g_1 =$ | $+$ 4.6438609 | $-$ 2.3144073 | $-$ 2.3148228 |
| $g_2 =$ | $+$ 2.3010471 | $-$ 4.6781925 | $-$ 4.6769430 |

1) $1.202993\, g^2 - 13.51004\, g + 37.01268 = 0, \quad g = +4.741651$

2) $1.214477\, g^2 + 14.71054\, g + 43.76126 = 0, \quad g = -5.252526$

2*) $1.213420\, g^2 + 14.69869\, g + 43.70368 = 0, \quad g = -5.240070$

| | | 1. | 2. | 2*. |
|---|---|---|---|---|
| IV. | $\varrho =$ | $+$ 2.378523 | $+$ 1.461100 | $+$ 1.448687 |
| | $\varrho_1 =$ | $-$ 2.265337 | $+$ 3.775508 | $+$ 3.763510 |
| | $\varrho_2 =$ | $+$ 0.035710 | $-$ 0.902685 | $-$ 0.913433 |
| | $d_1 =$ | 0.0066667 | 0.0049011 | 0.0062059 |
| | $d_2 =$ | 0.0094468 | 0.0066667 | 0.0083333 |
| | $K =$ | 0.05 | 0.04 | 0.05 |

Mit diesen Werthen ergibt sich

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\pi''' =$ | $+$ 0.9994910 | $+$ 0.9999842 | $+$ 0.9999668 |
| $\frac{3}{10} CK^4 =$ | $-$ 0.0000226 | $-$ 0.0000116 | $-$ 0.0000277 |

Da die mitgetheilten numerischen Resultate nur als Rechnungsbeispiel dienen sollen, so hat man bei den Objectiven 2. und 2*. nicht für nöthig gehalten, eine fernere Approximation auszuführen. Dagegen liefert für das erste Objectiv die Controlgleichung $\pi''' = 1 + \frac{3}{10} CK^4$ eine viel zu grosse Abweichung, um dieselbe etwa den Gliedern höherer Ordnung zuschreiben zu können. In der fünften Approximation verringert sich diese Differenz beträchtlich. Man erhält dadurch für die Dimensionen des ersten Objectivs:

V. $\varrho = +2.377243, \quad \varrho_1 = -2.268188, \quad \varrho_2 = +0.033377$
$d_1 = 0.0066667, \quad d_2 = 0.0094146, \quad \pi''' = 0.9999272$

## §. 17. Erste Approximation für vier Brechungen.

Wenden wir uns nun zu den Formeln der ersten Approximation für vier Brechungen:

$$a - \pi_0 = (n_1 - 1)(\varrho - \varrho_1) + (n_2 - 1)(\varrho_1 - \varrho_2) + (n_3 - 1)(\varrho_2 - \varrho_3)$$

$$o = (\varrho - \varrho_1)\, dn_1 + (\varrho_1 - \varrho_2)\, dn_2 + (\varrho_2 - \varrho_3)\, dn_3$$

$$o = \frac{1}{2}\left\{n_1(n_1 - 1)(\varrho - \varrho_1)\Psi_1 + n_2(n_2 - 1)(\varrho_1 - \varrho_2)\Psi_2 + n_3(n_3 - 1)(\varrho_2 - \varrho_3)\Psi_3\right\}$$

$$o = \frac{1}{2}\left\{(R_1 + S_1(T_1 + T_2))\, dn_1 + (R_2 + S_2 T_2)\, dn_2 + R_3 dn_3\right\}$$

$$o = \frac{1}{2}\left\{T + T_1 + T_2 + T_3\right\}$$

$$o = \frac{d_1}{n_1^2}(\pi_0 - \varrho)\, dn_1 - \frac{d_2}{n_2^2}\left\{(\varrho - \varrho_1) n_2 dn_1 - (\pi_1 - \varrho_1) n_1 dn_2\right\} + \frac{d_3}{n_3^2}(\pi^{IV} - \varrho_3)\, dn_3$$

Hier sind zuvörderst die Werthe von $R_i$ $S_i$ $T_i$ zu entwickeln. Da nach der Bezeichnung auf S. 575, für $e_i = 1$, $R_i$ in

$$(\varrho_{i-1} - \varrho_i)\mathrm{P}_i = (\varrho_{i-1} - \varrho_i)\left\{2(\pi^i - \varrho_{i-1})^2 + 2(\pi_i - \varrho_i)^2 + \pi_i^2 - \varrho_{i-1}^2 + \varrho_{i-1}\varrho_i - \varrho_i^2\right\}$$

übergeht, und $S_i$ einfach durch $\varrho_{i-1} - \varrho_i$ ersetzt werden darf, so erhält man

$$(\mathrm{P}_1 + T_1 + T_2)(\varrho - \varrho_1)\, dn_1 + (\mathrm{P}_2 + T_2)(\varrho_1 - \varrho_2)\, dn_2 + \mathrm{P}_3(\varrho_2 - \varrho_3)\, dn_3 = o$$

Eliminirt man hier $dn_2$ mittelst der Gleichung $dA = o$, so folgt

$$(\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2 + T_1)(\varrho - \varrho_1)\, dn_1 = (\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_3 + T_2)(\varrho_2 - \varrho_3)\, dn_3$$

nebst

$$\mathrm{P}_1 - \mathrm{P}_2 + T_1 = 2(\pi' - \varrho)^2 - 2(\pi_1 - \varrho_1)^2 - (\varrho - \varrho_2)(\varrho - \varrho_1 + \varrho_2)$$

$$\mathrm{P}_2 - \mathrm{P}_3 + T_2 = 2(\pi'' - \varrho_1)^2 - 2(\pi_2 - \varrho_2)^2 - (\varrho_1 - \varrho_3)(\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3)$$

Der Werth von $\frac{\partial B}{\partial \pi_0}$ lässt eine Transformation zu, wenn $T_i$ nach Analogie von $L_i$ in die beiden Theile

$$T_i = (n_i - 1)(\pi_i - \varrho_i)\,[(3n_i + 1)(\pi_i - \varrho_i) + 2\pi_i] -$$
$$- (n_{i+1} - 1)(\pi^{i+1} - \varrho_i)\,[(3n_{i+1} + 1)(\pi^{i+1} - \varrho_i) + 2\pi^{i+1}]$$

zerlegt wird. Damit folgt

$$T + T_1 + T_2 + T_3 = (n_1 - 1)(\varrho - \varrho_1)\,\mathrm{T}_1 + (n_2 - 1)(\varrho_1 - \varrho_2)\,\mathrm{T}_2 + (n_3 - 1)(\varrho_2 - \varrho_3)\,\mathrm{T}_3$$

wo zur Abkürzung geschrieben ist

$$T_i = (3n_i + 1)(\pi_i - \varrho_i + \pi^i - \varrho_{i-1}) + 2\pi_i = n_i \frac{\partial \Psi_i}{\partial \pi_0}$$

Um die Werthe der $\pi_i$ resp. $\pi^i$ zu eliminiren, substituire man

$$\varrho = \varrho_1 + h_1\,, \qquad \varrho_3 = \varrho_2 + h_2$$

$$\pi_1 = \pi' = \frac{1}{n_1}[\pi_0 + (n_1 - 1)(h_1 + \varrho_1)]\,, \qquad \pi_3 = \pi''' = \frac{1}{n_3}[\pi^{IV} + (n_3 - 1)(h_2 + \varrho_2)]$$

$$\pi_2 = \pi'' = \frac{1}{n_2}[\pi_0 + (n_1 - 1)h_1 + (n_2 - 1)\varrho_1] = \frac{1}{n_2}[\pi^{IV} + (n_3 - 1)h_2 + (n_2 - 1)\varrho_2]$$

Man erhält alsdann

$$(n_1 - 1)h_1 + (n_2 - 1)(\varrho_1 - \varrho_2) - (n_3 - 1)h_2 = a - \pi_0$$
$$h_1 dn_1 + (\varrho_1 - \varrho_2)dn_2 - h_2 dn_3 = 0$$

so dass $h_1$ und $h_2$ als lineare Functionen der Differenz $\varrho_1 - \varrho_2$ angesehen werden können. Ferner

$$n_1^2\Psi_1 = (n_1 + 2)\varrho_1^2 - [(2n_1^2 - n_1 - 4)h_1 + 4(n_1 + 1)\pi_0]\varrho_1 +$$
$$+ (n_1^3 - 2n_1^2 + 2)h_1^2 + (3n_1^2 - 3n_1 - 4)\pi_0 h_1 + (3n_1 + 2)\pi_0^2$$

$$n_2^2\Psi_2 = (n_2 + 2)\left(\frac{\varrho_1 + \varrho_2}{2}\right)^2 - (n_2 + 1)[(n_1 - 1)h_1 + (n_3 - 1)h_2 + \pi_0 + \pi^{IV}](\varrho_1 + \varrho_2) +$$
$$+ \frac{3n_2 + 2}{4}[(n_1 - 1)h_1 + (n_3 - 1)h_2 + \pi_0 + \pi^{IV}]^2 + n_2^3\left(\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{2}\right)^2$$

$$n_3^2\Psi_3 = (n_3 + 2)\varrho_2^2 - [(2n_3^2 - n_3 - 4)h_2 + 4(n_3 + 1)\pi^{IV}]\varrho_2 +$$
$$+ (n_3^3 - 2n_3^2 + 2)h_2^2 + (3n_3^2 - 3n_3 - 4)\pi^{IV}h_2 + (3n_3 + 2)\pi^{IV}\pi^{IV}$$

so wie

$$n_1 T_1 = (3n_1^2 - 3n_1 - 4)h_1 - 4(n_1 + 1)\varrho_1 + 2(3n_1 + 2)\pi_0$$
$$n_2 T_2 = (3n_2 + 2)[(n_1 - 1)h_1 + (n_3 - 1)h_2 + \pi_0 + \pi^{IV}] - 2(n_2 + 1)(\varrho_1 + \varrho_2)$$
$$n_3 T_3 = (3n_3^2 - 3n_3 - 4)h_2 - 4(n_3 + 1)\varrho_2 + 2(3n_3 + 2)\pi^{IV}$$

Die vorstehenden Gleichungen vereinfachen sich durch Einführung neuer Variabeln $h$ und $h'$ mittelst der Gleichungen

$$n_1(\pi_1 - \varrho_1) = n_2(\pi'' - \varrho_1) = h' - h$$
$$n_3(\pi''' - \varrho_2) = n_2(\pi_2 - \varrho_2) = h' + h$$

Hieraus ergeben sich leicht die Formeln

$$\varrho_1 = \pi_0 + (n_1-1)h_1 - h' + h\,, \qquad \varrho_2 = \pi^{IV} + (n_3-1)h_2 - h' - h$$

$$\varrho_1 + \varrho_2 = \pi_0 + \pi^{IV} + (n_1-1)h_1 + (n_3-1)h_2 - 2h'\,, \qquad \varrho_1 - \varrho_2 = \frac{2}{n_2}h$$

mithin

$$n_1\Psi_1 = \left(1+\frac{2}{n_1}\right)(h'-h)^2 - (3h_1 - 2\pi_0)(h'-h) + n_1 h_1(h_1-\pi_0)$$

$$n_2\Psi_2 = \left(1+\frac{2}{n_2}\right)h'^2 + h^2 + [(n_1-1)h_1 + (n_3-1)h_2 + \pi_0 + \pi^{IV}]h'$$

$$n_3\Psi_3 = \left(1+\frac{2}{n_3}\right)(h'+h)^2 - (3h_2 - 2\pi^{IV})(h'+h) + n_3 h_2(h_2 - \pi^{IV})$$

$$T_1 = 4\left(1+\frac{1}{n_1}\right)(h'-h) - (n_1+3)h_1 + 2\pi_0$$

$$T_2 = 4\left(1+\frac{1}{n_2}\right)h' + (n_1-1)h_1 + (n_3-1)h_2 + \pi_0 + \pi^{IV}$$

$$T_3 = 4\left(1+\frac{1}{n_3}\right)(h'+h) - (n_3+3)h_2 + 2\pi^{IV}$$

Betrachtet man vermöge der Gleichungen

$$(n_1-1)h_1 + 2\left(1-\frac{1}{n_2}\right)h - (n_3-1)h_2 = a - \pi_0$$

$$h_1 dn_1 + \frac{2}{n_2}h\,dn_2 - h_2 dn_3 = 0$$

$h_1$ und $h_2$ als lineare Functionen von $h$, so werden $T_1$ $T_2$ $T_3$ linear in Bezug auf die beiden Unbekannten $h$ und $h'$, während $\Psi_1$ $\Psi_2$ $\Psi_3$ dieselben in der zweiten Dimension enthalten.

Die Gleichungen für $B$ und $\frac{\partial B}{\partial \pi_0}$ werden nunmehr

$$0 = \frac{1}{2}(n_1-1)n_1\Psi_1 h_1 + (n_2-1)\Psi_2 h - \frac{1}{2}(n_3-1)n_3\Psi_3 h_2$$

$$0 = \frac{1}{2}(n_1-1)T_1 h_1 + \frac{n_2-1}{n_2}T_2 h - \frac{1}{2}(n_3-1)T_3 h_2$$

Hier bietet sich für die letztere Formel eine weitere Reduction dar. Schreibt man nämlich wegen

$$\pi^{IV} - \pi_0 = (n_1-1)h_1 + 2\frac{n_2-1}{n_2}h - (n_3-1)h_2$$

die Ausdrücke für T in der Form

$$T_1 = 4\left(1+\frac{1}{n_1}\right)(h'-h) - 2(n_1+1)h_1 + (n_3-1)h_2 - \frac{2}{n_2}(n_2-1)h + \pi_0 + \pi^{IV}$$

$$T_2 = 4\left(1+\frac{1}{n_2}\right)h' + (n_1-1)h_1 + (n_3-1)h_2 + \pi_0 + \pi^{IV}$$

$$T_3 = 4\left(1+\frac{1}{n_3}\right)(h'+h) - 2(n_3+1)h_2 + (n_1-1)h_1 + \frac{2}{n_2}(n_2-1)h + \pi_0 + \pi^{IV}$$

so zerstören sich die in $n_1 - 1$, $n_2 - 1$ und $n_3 - 1$ multiplicirten Glieder gegenseitig und man erhält

$$\frac{\partial B}{\partial \pi_0} = +\left(1 + \frac{1}{n_2^2}\right) h h' + \left(n_1 - \frac{1}{n_1}\right) h_1 (2h' - 2h - n_1 h_1)$$
$$- \left(n_3 - \frac{1}{n_3}\right) h_2 (2h' + 2h - n_3 h_2) + \frac{1}{2} (\pi^{IV} \pi^{IV} - \pi_0 \pi_0)$$

Die Gleichung für die Linsendicken aber nimmt jetzt die Gestalt an

$$\frac{d_1}{n_1^2} (h' - h - n_1 h_1)\, d n_1 + \frac{d_3}{n_3^2} (h' + h - n_3 h_2)\, d n_3 = \frac{d_2}{n_2^2} \left\{ h_1 n_2 d n_1 - (h' - h)\, d n_2 \right\}$$
$$= \frac{d_2}{n_2^2} \left\{ h_2 n_2 d n_3 - (h' + h)\, d n_2 \right\}$$

Kehren wir endlich zur Gleichung $dB = 0$ zurück, und schreiben dieselbe in der Form

$$X_1 h_1 d n_1 + X_2 h_2 d n_3 = 0$$

so sind nach dem Früheren die Aggregate

$$X_1 = (\pi' - \varrho)^2 - (\pi_2 - \varrho_2)^2 - \frac{1}{2} (\varrho - \varrho_2)(\varrho - \varrho_1 + \varrho_2)$$
$$X_2 = (\pi'' - \varrho_1)^2 - (\pi_3 - \varrho_3)^2 - \frac{1}{2} (\varrho_1 - \varrho_3)(\varrho_1 - \varrho_2 + \varrho_3)$$

zu entwickeln. Eine leichte Rechnung ergibt

$$X_1 = \frac{1}{n_1^2} (h' - h - n_1 h_1)^2 - \frac{1}{n_2^2} (h' + h)^2 + \left(\frac{1}{2} h_1 + \frac{1}{n_2} h\right) \left[h' - \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) h - n_1 h_1 - \pi_0\right]$$
$$X_2 = - \frac{1}{n_3^2} (h' + h - n_3 h_2)^2 + \frac{1}{n_2^2} (h' - h)^2 - \left(\frac{1}{2} h_2 - \frac{1}{n_2} h\right) \left[h' + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) h - n_3 h_2 - \pi^{IV}\right]$$

Auch diese Grössen enthalten die Unbekannten $h$ und $h'$ in der zweiten Dimension.

Uebrigens kann man die für $dB$ und $\frac{\partial B}{\partial \pi_0}$ gefundenen Ausdrücke durch Differentiation verificiren, wenn man berücksichtigt, dass

$$\frac{\partial h}{\partial n_1} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial n_2} = \frac{h}{n_2}, \quad \frac{\partial h}{\partial n_3} = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial \pi_0} = 0$$
$$\frac{\partial h'}{\partial n_1} = h_1, \quad \frac{\partial h'}{\partial n_2} = \frac{h}{n_2}, \quad \frac{\partial h'}{\partial n_3} = 0, \quad \frac{\partial h'}{\partial \pi_0} = 1$$
$$\frac{\partial \pi^{IV}}{\partial n_1} = h_1, \quad \frac{\partial \pi^{IV}}{\partial n_2} = \frac{2h}{n_2}, \quad \frac{\partial \pi^{IV}}{\partial n_3} = -h_2, \quad \frac{\partial \pi^{IV}}{\partial \pi_0} = 1$$

Es handelt sich nunmehr darum, aus der Gleichung

$$\frac{1}{2} (n_1 - 1) n_1 \Psi_1 h_1 + (n_2 - 1) \Psi_2 h - \frac{1}{2} (n_3 - 1) n_3 \Psi_3 h_2 = 0$$

$h'$ zu eliminiren. Diess hat entweder mittelst der Gleichung

$$X_1 h_1 d n_1 + X_2 h_2 d n_3 = 0$$

oder mittelst der Accommodationsgleichung $\frac{\partial B}{\partial \pi_0} = 0$ zu geschehen, da nach dem Früheren beide Gleichungen gleichzeitig sich nicht wohl erfüllen lassen. Bezeichnet man durch $a_i\ b_i\ c_i$ ganze Functionen $i^{\text{ten}}$ Grades in $h$, so sind im ersteren Falle zwei Gleichungen von der Form

$$a_1 h'^2 + a_2 h' + a_3 = 0 \qquad \text{und} \qquad b_1 h'^2 + b_2 h' + b_3 = 0$$

mit einander zu combiniren, während im letzteren Falle die zweite Gleichung durch $c_1 h' + c_2 = 0$ zu ersetzen ist. Nach den bekannten Regeln der Elimination steigen die bezüglichen Resultanten

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{und} \qquad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & 0 \\ 0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

in Bezug auf $h$ resp. auf den achten und den fünften Grad.

In speciellen Fällen erniedrigt sich der Grad dieser Gleichungen. GAUSS und HANSEN haben gezeigt, dass die Auflösung von Gleichungen des vierten Grades ausreicht, wenn $m = m_2$ und wenn $m_1 = m_3$ gesetzt wird. Diese beiden Fälle sollen im Folgenden etwas näher untersucht werden.

## §. 18. System zweier getrennten Linsen.

### Das Gauss'sche Objectiv.

Der Fall $m = m_2$ oder $n_2 = 1$ tritt ein, wie bereits erwähnt, wenn das Objectiv aus zwei durch Luft getrennten Linsen besteht; gleichzeitig verschwindet $dn_2$. Alsdann erhält man

$$\begin{aligned}
a - \pi_0 &= (n_1 - 1) h_1 - (n_3 - 1) h_2 \\
0 &= h_1 dn_1 - h_2 dn_3 \\
0 &= (n_1 - 1) n_1 \Psi_1 h_1 - (n_3 - 1) n_3 \Psi_3 h_2 \\
0 &= \mathrm{X}_1 h_1 dn_1 + \mathrm{X}_2 h_2 dn_3 \\
0 &= (n_1 - 1) \mathrm{T}_1 h_1 - (n_3 - 1) \mathrm{T}_3 h_2 \\
0 &= \frac{d_1}{n_1^2} (\pi_0 - \varrho) dn_1 - d_2 h_1 dn_1 + \frac{d_3}{n_3^2} (\pi^{\mathrm{IV}} - \varrho_3) dn_3
\end{aligned}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen ergeben sich die Werthe von $h_1$ und $h_2$; zur Bestimmung von $\varrho_1$ und $\varrho_2$ setzen wir

$$\varrho_1 = \pi_0 + (n_1 - 1) h_1 - g, \qquad \varrho_2 = \pi^{IV} + (n_3 - 1) h_2 - g'$$

wo

$$g = \pi'' - \varrho_1 = n_1(\pi_1 - \varrho_1), \qquad g' = \pi_2 - \varrho_2 = n_3(\pi''' - \varrho_2)$$

Damit folgt

$$(n_1 - 1) h_1 \left\{\left(1 + \frac{2}{n_1}\right) g g - 2\left(\frac{3}{2} h_1 - \pi_0\right) g + n_1 h_1 (h_1 - \pi_0)\right\} =$$
$$= (n_3 - 1) h_2 \left\{\left(1 + \frac{2}{n_3}\right) g' g' - 2\left(\frac{3}{2} h_2 - \pi^{IV}\right) g' + n_3 h_2 (h_2 - \pi^{IV})\right\}$$

in Verbindung*) entweder mit der Gleichung $X_1 + X_2 = 0$, d. i.

$$\left(1 + \frac{2}{n_1^2}\right) g g + 2\left\{\left(n_1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{n_1}\right) h_1 + \pi_0\right\} g - h_1 \left\{(n_1 - 2) h_1 + \pi_0\right\} =$$
$$= \left(1 + \frac{2}{n_3^2}\right) g' g' + 2\left\{\left(n_3 - \frac{1}{2} - \frac{2}{n_3}\right) h_2 + \pi^{IV}\right\} g' - h_2 \left\{(n_3 - 2) h_2 + \pi^{IV}\right\}$$

oder mit der Herschel'schen Bedingung

$$(n_1^2 - 1) h_1 \left(\frac{2}{n_1} g - h_1\right) - \frac{1}{2} \pi_0 \pi_0 = (n_3^2 - 1) h_2 \left(\frac{2}{n_3} g' - h_2\right) - \frac{1}{2} \pi^{IV} \pi^{IV}$$

Im ersten Falle hängen folglich $g$ und $g'$ resp. $\varrho_1$ und $\varrho_2$ von der Auflösung einer Gleichung vierten Grades**), im zweiten nur von einer quadratischen Gleichung ab. Die Gleichung für $dE$ endlich lässt sich in der Gestalt schreiben

$$d_2 = \frac{d_1}{n_1}\left(\frac{g}{n_1 h_1} - 1\right) + \frac{d_3}{n_3}\left(\frac{g'}{n_3 h_2} - 1\right)$$

Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, die in einem Briefe von

---

*) Selbstverständlich kann man auch hier die directe Differentiation zur Verification der Gleichungen für $dB$ und $\frac{\partial B}{\partial \pi_0}$ benutzen und zu diesem Behufe die Werthe der partiellen Differentialquotienten

$$\frac{\partial g}{\partial n_1} = \frac{\partial g'}{\partial n_1} = \frac{\partial \pi^{IV}}{\partial n_1} = h_1, \qquad \frac{\partial g}{\partial n_3} = \frac{\partial g'}{\partial n_3} = 0, \qquad \frac{\partial \pi^{IV}}{\partial n_3} = -h_2$$
$$\frac{\partial g}{\partial \pi_0} = \frac{\partial g'}{\partial \pi_0} = \frac{\partial \pi^{IV}}{\partial \pi_0} = 1$$

substituiren.

**) Gauss in der Lindenau-Bohnenberger'schen Zeitschrift für Astronomie ... Dec. 1817 (Werke Bd. V, p. 507).

GAUSS an SCHUMACHER (d. d. 25. Juni 1810) in erster Approximation aufgeführten Werthe

$$\frac{1}{f} = +0.0556255 - 0.0276427\,\mathrm{tg}\,\varphi = \varrho$$
$$\frac{1}{g} = +0.0083843 + 0.0276427\,\mathrm{tg}\,\varphi = -\varrho_1$$
$$\frac{1}{f'} = +0.0129083 - 0.0339893\sec\varphi = \varrho_2$$
$$\frac{1}{g'} = -0.0498917 + 0.0339893\sec\varphi = -\varrho_3$$

aus den zu Grunde gelegten Daten*)

$$\pi_0 = 0\,, \qquad n_1 = 1.5157\,, \qquad n_3 = 1.6109$$
$$\pi^{\mathrm{IV}} = \frac{1}{96}\,, \qquad dn_1 = 0.0052\,, \qquad dn_3 = 0.0090$$

abzuleiten. Zunächst ergeben sich aus den Gleichungen

$$\frac{1}{96} = 0.5157\,h_1 - 0.6109\,h_2$$
$$0 = 0.0052\,h_1 - 0.0090\,h_2$$

die Werthe

$$h_1 = +0.00640098\,, \qquad h_2 = +0.0369834$$

Die Gleichung $B = 0$ wird

$$[8.884042]\,gg - 2\,[7.500982]\,g + [6.311751] =$$
$$= [8.704524]\,g'g' - 2\,[7.007754]\,g' + [5.553391]$$

Es ist nicht schwer, diese Gleichung auf die Form zu bringen

$$\left(\frac{g'-\lambda'}{\mu'}\right)^2 = \left(\frac{g-\lambda}{\mu}\right)^2 + 1$$

welcher durch die Ausdrücke

$$g = \lambda + \mu\,\mathrm{tg}\,\varphi\,, \qquad g' = \lambda' + \mu'\sec\varphi$$

Genüge geleistet wird. Hieraus entspringen die Werthe

$$g = +0.0413942 + 0.0276427\,\mathrm{tg}\,\varphi$$
$$g' = +0.0201016 + 0.0339893\sec\varphi$$

---

*) Gauss-Schumacher Briefwechsel, Bd. I, S. 44/45. Daselbst stehen durch Druckfehler die Werthe $dn_1 = 0.0051$ und $0.0339803\sec\varphi$. Uebrigens setzt Gauss hinzu: »Diese Form ist mir eigenthümlich und wie ich glaube, die zierlichste, die man finden kann.«

welche unmittelbar zu den Gauss'schen Formeln für die Krümmungshalbmesser führen.

Gauss lässt a. a. O. den Winkel $\varphi$ beliebig (»der Winkel $\varphi$ kann nach Gefallen angenommen werden«); fügt man die Bedingung $dB = 0$ oder $\frac{\partial B}{\partial \pi_0} = 0$ hinzu, so erhält man zu seiner Bestimmung eine Gleichung vierten resp. zweiten Grades, wenn man

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right), \qquad \sec\varphi = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right), \qquad x = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)$$

setzt. Bei der strengen Berechnung des Objectivs für Repsold führt dann Gauss die Werthe $d_1 = 0.21$, $d_3 = 0.11$, $K = 2.5$ ein und findet

$$\frac{1}{\varrho} = 26.202, \quad \frac{1}{\varrho_1} = -42.972, \quad \frac{1}{\varrho_2} = -39.985, \quad \frac{1}{\varrho_3} = +100.845$$

[folglich $d_2 = \frac{1}{2}K^2(\varrho_1 - \varrho_2) = 0.0054$] »Ich habe«, sagt er, »ein System von Werthen auf das Schärfste berechnet, wodurch die äusseren Farben bei den sehr nahe an der Axe, und zugleich die mittleren bei den in einem Abstande von 2 Zoll von der Axe [auffallenden Strahlen,] genau in einen Punkt zusammengebracht werden, und mir dabei die Bedingung vorgeschrieben, dass die zweite und dritte Fläche nicht viel verschieden sein sollen.«*)

Im Jahre 1817 endlich veröffentlichte Gauss die Maasse eines Objectivs, bei welchem zugleich die rothen und die violetten Rand- und Centralstrahlen zur Vereinigung gebracht werden. Die Krümmungshalbmesser sind

---

*) Historisch fügen wir noch folgende Notiz hinzu. Repsold hatte gefordert, dass die dritte Fläche einen kleineren Halbmesser erhielte, als die zweite, damit die Ränder der beiden Linsen dicht aufeinander zu liegen kämen. Doch fand er nach Schumacher's Bericht (S. 53) die von Gauss gewählten Dicken für die praktische Ausführung, wegen der eintretenden Durchbiegung beim Poliren der Gläser, zu klein und wünschte desshalb für $K = 2.28$ die Minimalwerthe $d_1 = 0.3$, $d_3 = 0.216$. Gauss erklärt sich S. 54 bereit, die Rechnung noch einmal für eine etwas grössere Dicke der Gläser zu wiederholen (6. Oct.), worauf dann S. 58 am 19. Novbr. (vergl. p. V) Schumacher an Gauss schreibt: »Repsold hat jetzt nach Ihren Formeln ein zweites Objectiv vollendet, das ohnerachtet das Glas Streifen hat, vortreffliche Wirkung thut.« S. 70 bittet Gauss, ihm die Dimensionen des neuen Objectivs wieder mitzutheilen, da er von mehreren Personen darum angegangen sei und die Papiere nicht wieder finden könne. Publicirt scheint darüber Nichts zu sein.

$$\frac{1}{\varrho} = +3415.287, \quad \frac{1}{\varrho_1} = +10133.007$$
$$\frac{1}{\varrho_2} = +4207.421, \quad \frac{1}{\varrho_3} = +2807.320$$

ferner

$$K' = 1083.687, \quad \pi_0 = 0, \quad \frac{1}{\pi^{IV}} = 28293.3$$
$$d_1 = 200, \quad d_2 = 50, \quad d_3 = 80$$

für die rothen Strahlen: $n_1 = 1.504348$, $n_3 = 1.58181$

für die violetten Strahlen: $n_1 = 1.525976$, $n_3 = 1.62173$

folglich im Mittel

$n_1 = 1.515162$, $dn_1 = 0.010814$, $n_3 = 1.60177$, $dn_3 = 0.01996$

Die Ausführung der Rechnung nach den strengen Formeln ergibt für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 18^\circ 30'$ bei beiden Strahlengattungen genau $\varpi^{IV} = \pi^{IV}$, während für $\vartheta = 13^\circ$ die rothen Strahlen die Vereinigungsweite 28289.3, die violetten dagegen 28290.0 besitzen. Die gegen die Richtigkeit der GAUSS'schen Resultate von SANTINI u. A.*) geäusserten Zweifel sind hiernach unbegründet.

## §. 19. System von drei aneinanderstossenden Linsen.

Wenden wir uns zu dem Falle $n_1 = n_3$, in welchem die erste und die dritte Linse aus der nämlichen Glassorte bestehen. Dann wird

$$(n_1 - 1)(\varrho - \varrho_3) + (n_2 - n_1)(\varrho_1 - \varrho_2) = a - \pi_0$$
$$(\varrho - \varrho_3)\, dn_1 + (\varrho_1 - \varrho_2)(dn_2 - dn_1) = 0$$

es können mithin die Differenzen $\varrho - \varrho_3$ und $\varrho_1 - \varrho_2$ in der ersten Approximation als bekannt angesehen werden.

Zur Aufstellung der Gleichung für $B = 0$ gehen wir mit HANSEN**) von den Ausdrücken

*) Santini, Teorica degli Stromenti ottici, Bd. I, p. 182; Brandes in Gehler's Wörterbuch, Bd. VI, S. 420. Vgl. W. Schmidt a. a. O. S. 115. Die grössten Brechungswinkel werden den obigen Werthen entsprechend

$$\omega^{IV} = 19^\circ 33' 14''79, \quad 19^\circ 31' 25''76, \quad 13^\circ 44' 4''14, \quad 13^\circ 42' 57''35.$$

**) Hansen, Dioptrische Untersuchungen, S. 749.

$$L = \frac{m(m-m_1)}{m_1 m_1}[m(\pi_0-\varrho)+m_1\pi_0](\pi_0-\varrho)^2$$
$$L_1 = \frac{m_2(m_1-m_2)}{m_1 m_1}[m_2(\pi''-\varrho_1)+m_1\pi''](\pi''-\varrho_1)^2$$
$$L_2 = \frac{m_2(m_2-m_1)}{m_1 m_1}[m_2(\pi_2-\varrho_2)+m_1\pi_2](\pi_2-\varrho_2)^2$$
$$L_3 = \frac{m(m_1-m)}{m_1 m_1}[m(\pi^{IV}-\varrho_3)+m_1\pi^{IV}](\pi^{IV}-\varrho_3)^2$$

aus und setzen darin

$$\pi_0-\varrho = n_1(\pi'-\varrho) = k-k_1\,,\qquad \pi''-\varrho_1 = \frac{n_1}{n_2}(\pi_1-\varrho_1) = k'-k_2$$
$$\pi^{IV}-\varrho_3 = n_1(\pi_3-\varrho_3) = k+k_1\,,\qquad \pi_2-\varrho_2 = \frac{n_1}{n_2}(\pi'''-\varrho_2) = k'+k_2$$

Zunächst ergeben sich hiermit die Werthe

$$\varrho = \pi_0-k+k_1\,,\qquad \varrho_1 = \pi_0-\frac{1}{n_1}\left\{(n_1-1)(k-k_1)+n_2(k'-k_2)\right\}$$
$$\varrho_3 = \pi^{IV}-k-k_1\,,\qquad \varrho_2 = \pi^{IV}-\frac{1}{n_1}\left\{(n_1-1)(k+k_1)+n_2(k'+k_2)\right\}$$
$$\pi_2 = \pi'' = \frac{1}{2}(\pi^{IV}+\pi_0)-\frac{1}{n_1}\left\{(n_1-1)k+(n_2-n_1)k_1\right\}$$
$$\frac{1}{m}(L+L_3) = \frac{n_1-1}{n_1 n_1}\left\{[6k_1+n_1(\pi^{IV}-\pi_0)]k^2+2n_1(\pi^{IV}+\pi_0)k_1k+[2k+n_1(\pi^{IV}-\pi_0)]k_1^2\right\}$$
$$\frac{1}{m}(L_1+L_2) = \frac{n_2(n_2-n_1)}{n_1 n_1}2k_2\left\{(n_2+2n_1)k'k'-2(n_1-1)kk'+n_1(\pi^{IV}+\pi_0)k'+n_2k_2^2\right\}$$

Da ferner

$$\varrho-\varrho_3 = 2k_1+\pi_0-\pi^{IV}\,,\qquad \varrho_1-\varrho_2 = 2k_2$$

so nehmen die Gleichungen $A = a$ und $dA = 0$ die Gestalt an

$$\frac{a-\pi_0}{2} = \frac{n_1-1}{n_1}k_1+\frac{n_2-n_1}{n_1}k_2$$
$$0 = k_1 dn_1+k_2(n_1 dn_2-n_2 dn_1)$$

während der Ausdruck für $B$, unter Einführung der Bezeichnung

$$\pi^{IV}+\pi_0 = 2q\,,\qquad \pi^{IV}-\pi_0 = 2q'\,,$$

auf die Form gebracht werden kann

$$B = \frac{n_1-1}{n_1 n_1}\left\{(3k_1+n_1q')k^2+2n_1qk_1k+(k_1+n_1q')k_1^2\right\}$$
$$+\frac{n_2(n_2-n_1)}{n_1 n_1}k_2\left\{(n_2+2n_1)k'k'-2(n_1-1)kk'+2n_1qk'+n_2k_2^2\right\}$$

Setzt man hier

$$n = \frac{1}{n_1}, \qquad n' = \frac{n_2}{n_1}, \qquad \frac{dn'}{dn} = n_2 - n_1 \frac{dn_2}{dn_1}$$

so erhält man

$$q' = -(n-1)k_1 + (n'-1)k_2$$
$$0 = k_1 dn - k_2 dn'$$
$$B = -(n-1)\left\{(3nk_1 + q')k^2 + 2qk_1k + (nk_1 + q')k_1^2\right\}$$
$$+ (n'-1)\frac{n'}{n}k_2\left\{(n'+2)k'k' + 2(n-1)kk' + 2qk' + n'k_2^2\right\}$$

Die weiteren Gleichungen für $dB$ und $\frac{\partial B}{\partial \pi_0}$ lassen sich durch directe Differentiation ableiten, wenn man sich dazu der leicht beweisbaren Werthe der partiellen Differentialquotienten bedient:

$$\frac{\partial q}{\partial n} = \frac{\partial q'}{\partial n} = \frac{\partial k}{\partial n} = \frac{\partial k_1}{\partial n} = -\frac{k_1}{n}, \qquad \frac{\partial k'}{\partial n} = \frac{k - k_1}{n'}, \qquad \frac{\partial k_2}{\partial n} = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial n'} = \frac{\partial q'}{\partial n'} = \frac{\partial k}{\partial n'} = \frac{\partial k_1}{\partial n'} = \frac{k_2}{n}, \qquad \frac{\partial k'}{\partial n'} = \frac{k_2 - k'}{n'}, \qquad \frac{\partial k_2}{\partial n'} = 0$$

$$\frac{\partial q}{\partial \pi_0} = \frac{\partial k}{\partial \pi_0} = 1, \qquad \frac{\partial q'}{\partial \pi_0} = \frac{\partial k_1}{\partial \pi_0} = 0, \qquad \frac{\partial k'}{\partial \pi_0} = \frac{n}{n'}, \qquad \frac{\partial k_2}{\partial \pi_0} = 0$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung $k_1 dn = k_2 dn'$ heben sich alle in den vorstehenden Ausdrücken mit $k_1$ und $k_2$ multiplicirten Glieder fort, so dass man bei der Berechnung von $d(nB)$ einfach

$$\frac{\partial k'}{\partial n} = \frac{k}{n'}, \qquad \frac{\partial k'}{\partial n'} = -\frac{k'}{n'}$$

setzen darf. Damit erhält man

*) $$[(7n^2 - 2n - 2)k_1 + q']k^2 + 2q(nk_1 - q')k + [n(3n-2)k_1 + (2n-1)q']k_1^2 =$$
$$= (n'^2 + 2)k_1k'k' + 2[(n'-1)(3n'+2)k_2 - n'q']kk' + 2n'qk_1k' + n'(3n'-2)k_1k_2^2$$

Endlich ergibt sich die Accommodationsgleichung in der Gestalt

$$(n^2-1)k_1k - (n'^2-1)k_2k' = \frac{1}{2}qq'$$

---

*) Auch ist es nicht schwer, sich von der Identität der obigen Formel mit der Gleichung

$$\frac{h_1}{n}X_1 + \frac{h_2}{n}X_2 = B$$

direct zu überzeugen.

während die Gleichung für $dE$ zur Bestimmung der Dicken

$$0 = [(\pi_0 - \varrho) d_1 + (\pi^{IV} - \varrho_3) d_3] \frac{dn_1}{n_1^2} + \frac{d_2}{n_2^2} [(\varrho - \varrho_1)(n_1 dn_2 - n_2 dn_1) + (\pi_0 - \varrho) dn_2]$$

oder

$$[(k - k_1) d_1 + (k + k_1) d_3] n' dn = d_2 [(k' - k_2) dn' - (k - k_1) dn]$$

folglich

$$d_2 = n' k_2 \frac{(k - k_1) d_1 + (k + k_1) d_3}{k_1 k' - k_2 k}$$

geschrieben werden kann.

Bestimmt man demnach die Werthe von $k$ und $k'$ durch die Gleichungen $B = 0$ und $dB = 0$, so hat man wiederum eine Gleichung vierten Grades aufzulösen, wogegen die Anwendung von $\frac{\partial B}{\partial \pi_0} = 0$ nur auf eine quadratische Gleichung führt.

Hansen ist bei seiner in den Artt. 53 und 54 der »dioptrischen Untersuchungen« enthaltenen Berechnung der betreffenden Objective auf Gleichungen ohne reelle Wurzeln geführt worden. Um zu prüfen, ob unter den hier gemachten Voraussetzungen die entwickelten Gleichungen reellen Linsenkrümmungen entsprechen oder nicht, setzen wir mit Hansen

1) $n_1 = n_3 = 1.52913$, $n_2 = 1.63912$, $dn_2 : dn_1 = 2.0250$

2) $n_1 = n_3 = 1.63912$, $n_2 = 1.52913$, $dn_1 : dn_2 = 2.0250$

nebst

$$\pi_0 = 0, \quad a = 1 \quad \text{oder} \quad q = q' = \frac{1}{2}$$

Alsdann ergibt die Rechnung mit fünfstelligen Logarithmen in den beiden Fällen, in denen entweder die Flintglaslinse oder die Kronglaslinse in der Mitte liegen soll:

| 1. | 2. |
|---|---|
| $n = 0.65397$ | $n = 0.61008$ |
| $n' = 1.07193$ | $n' = 0.93290$ |
| $k_1 = +1.68540$ | $k_1 = +1.68540$ |
| $k_2 = -1.15649$ | $k_2 = +2.34185$ |

und weiter für das erste Objectiv:

$$(B)\quad +[0.58055]k^2+[0.22671]k+[0.65814] = \\ = [0.08305]k'k'-[9.43578]kk'+[9.59564]k'+[9.75209]$$

$$(dB)\quad -[8.47367]k^2+[9.77975]k+[9.50253] = \\ = [0.72488]k'k'-[0.28777]kk'+[0.25688]k'+[0.46802]$$

$$\left(\frac{\partial B}{\partial \pi_0}\right)\quad [0.88744]k-[0.13954]k'+1 = 0$$

oder nach leichter Umformung

$$k^2+0.44275k+1.04717 = 0.31805k'k'-0.07165kk'+0.10354k'$$
$$kk'+0.31689k = 2.7378k'k'+0.93192k'+1.33294$$
$$k-0.17869k'+0.12958 = 0$$

Durch Elimination von $k$ aus $B$ und $dB$ folgt hiermit

$$+7.3736k'^4+6.1388k'^3+10.0300k'^2+3.8888k'+2.0688 = 0$$

sowie mit Benutzung der Herschel'schen Gleichung

$$+2.55906k'k'+1.00482k'+1.37718 = 0$$

Für das zweite Objectiv erhält man analog

$$(B)\quad +[0.55445]k^2+[0.22670]k+[0.63760] = \\ = [0.25715]k'k'-[9.68186]kk'+[9.78985]k'+[0.49880]$$

$$(dB)\quad -[9.72920]k^2+[9.72282]k-[9.26278] = \\ = [0.68462]k'k'-[0.38763]kk'+[0.19653]k'+[0.83802]$$

$$\left(\frac{\partial B}{\partial \pi_0}\right)\quad [0.92760]k-[0.38562]k'+1 = 0$$

oder

$$k^2+0.47107k+0.33129 = 0.50431k'k'-0.13409kk'+0.17195k'$$
$$kk'+0.31046k = 2.0324k'k'+0.66228k'+2.7424$$
$$k-0.28709k'+0.11814 = 0$$

Die Elimination von $k$ aus den beiden ersten Gleichungen gibt

$$+3.8989k'^4+3.3359k'^3+12.7654k'^2+5.3219k'+7.9532 = 0$$

Die Accommodationsgleichung dagegen führt auf die quadratische Gleichung

$$+1.74943k'k'+0.69241k'+2.78498 = 0$$

Man erkennt leicht, dass die beiden gefundenen biquadratischen Gleichungen reelle Wurzeln nicht zulassen. Dieses Resultat steht

in Uebereinstimmung mit den Ergebnissen der Artt. 53 und 54 von Hansen's »dioptrischen Untersuchungen«*). Die beiden quadratischen Gleichungen besitzen gleichfalls keine reellen Auflösungen.

## §. 20. Untersuchung eines dialytischen Objectivs mit sechs Brechungen.

Schliesslich soll noch der Fall eines sogenannten dialytischen Objectivs der näheren Untersuchung unterworfen werden, bei welchem zwei Linsensysteme durch einen grösseren Zwischenraum getrennt sind. Alsdann kann die Dicke des mittleren Mediums bei der ersten Approximation nicht mehr als kleine Grösse betrachtet, sondern muss gleich den Krümmungshalbmessern von vorn herein als Unbekannte des Problems eingeführt werden. Wollte man nun einfach zwei dialytisch getrennte Glaslinsen combiniren, so würde es nach der bereits citirten Bemerkung von Gauss (S. 569) nicht möglich sein, bei vier Brechungen der Bedingungsgleichung für $dE$ Genüge zu leisten**), weil vermöge derselben die Dicke $d_2$ als ein Aggregat von Gliedern gefunden wird, welche in die kleinen Grössen $d_1$ und $d_3$ multiplicirt sind. Folglich könnte die Dicke $d_2$ nur dann einen grösseren Werth erhalten, wenn sie in der Gleichung für $dE$ zufällig mit einem kleinen Coefficienten behaftet wäre, der etwa von gleicher Ordnung mit $d_1$ und $d_3$ gelten könnte. Diess ist jedoch bei vier Brechungen im Allgemeinen nicht der Fall. Dagegen lässt sich die erwähnte Bedingung bei sechs Brechungen leicht erfüllen, wenn

*) Dem in Nr. 2049 der Astronomischen Nachrichten mit überraschender Sicherheit erhobenen Einwande, dass »über die Möglichkeit oder Unmöglichkeit dieser Constructionen nicht nach solchen Näherungsformeln abgeurtheilt werden könne«, dass »man im Gegentheil hoffen dürfe, dass nach Ergänzung der angewandten Formeln durch die Glieder höherer Ordnung ein ausführbares Resultat zu Tage gefördert werde« — kann eine ernsthafte Bedeutung nicht beigelegt werden, da die oben gefundenen biquadratischen Gleichungen, ebenso wie die von Hansen gegebenen, nicht zu denen gehören, deren Wurzeln durch eine geringe Aenderung der Coefficienten ins Reelle übergehen. Bekanntlich müsste dazu vor Allem die Discriminante von gleicher Ordnung mit den in der ersten Annäherung vernachlässigten Grössen sein.

**) Natürlich unbeschadet der weiteren Bemerkung von Gauss a. a. O., derzufolge der alsdann eintretende Mangel an Achromasie des Objectivs durch eine geeignete Einrichtung des Oculars compensirt werden kann.

man das Objectiv aus zwei Linsensystemen von je drei Brechungen construirt, welche die nämlichen Brechungsverhältnisse und Krümmungshalbmesser, aber in entgegengesetzter Lage, besitzen*).

Wir setzen demgemäss

$$m = m_3 = m_6\,, \qquad m_1 = m_5\,, \qquad m_2 = m_4$$
$$\varrho + \varrho_5 = 0\,, \qquad \varrho_1 + \varrho_4 = 0\,, \qquad \varrho_2 + \varrho_3 = 0$$

und betrachten $d_3$ neben $\varrho\ \varrho_1$ und $\varrho_2$ als vierte Unbekannte. Da ein in $x$ auffallender Strahl im Abstande $x_5 = \varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_5 x$ austritt, so erhält man die Oeffnung des zweiten Systems, wenn man die des ersten mit dem Factor $\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_5$ multiplicirt, wofür approximativ $\varepsilon_3$ geschrieben werden darf. Es werden dem entsprechend die Dicken $d_4$ und $d_5$ zu bestimmen und etwa $d_4 = \delta_2 d_2$, $d_5 = \delta_1 d_1$ zu setzen sein, wo z. B. $\delta_1 = \delta_2 = \pm\varepsilon_3$ angenommen werden kann. Wenn alle Dimensionen, also ausser dem Oeffnungshalbmesser $K$ auch die Krümmungsradien sich in dem angegebenen Verhältnisse änderten, so würde die gemachte Annahme offenbar die einzig rationelle sein; da jenes aber nicht der Fall ist, so liegt es in der Natur der Sache, dass bei dieser Bestimmung eine gewisse Willkür sich nicht vermeiden lässt**).

Die Fundamentalgleichungen nehmen jetzt die folgende Gestalt an:

---

*) Für den Venusdurchgang des Jahres 1874 haben Steinheil Söhne in München ein derartiges photographisches Objectiv angefertigt.

**) Für eine Linse, deren Oeffnung durch die Durchschnitte der sphärischen Oberflächen begrenzt wird, ist die Dicke $d = \frac{1}{2}K^2(\varrho - \varrho_1)$, also von der zweiten Ordnung, so dass der Factor $\varepsilon_3^2$ hinzutreten würde, wenn $x$ in $x_5$ übergeht. Häufig aber wird man aus praktischen Gründen die Dicke nicht so klein wählen dürfen. Versucht man die Factoren $\delta$ aus der Bedingung zu bestimmen, dass die durch die Axen geführten Querschnitte $Q$ der entsprechenden Linsen sich wie $1 : \varepsilon_3^2$ verhalten sollen, so erhält man die Werthe

$$Q = 2Kd - \frac{1}{3}K^3(\varrho - \varrho_1)\,, \qquad Q' = 2\varepsilon_3 K d\delta - \frac{1}{3}\varepsilon_3^3 K^3(\varrho - \varrho_1)$$

also für $Q' = Q\varepsilon_3^2$, $\delta = \varepsilon_3$, wenn die in $K^3$ multiplicirten Glieder vernachlässigt werden können. Setzt man dagegen $d = \frac{1}{2}K^2(\varrho - \varrho_1)$, so ist Letzteres nicht mehr erlaubt, und man bekommt $\delta = \frac{1}{3}\varepsilon_3(\varepsilon_3 + 2)$.

$$\pi_0 - \varrho = n_1(\pi' - \varrho)\,, \qquad \pi^{VI} + \varrho = n_1(\pi_5 + \varrho)$$

$$n_1(\pi_1 - \varrho_1) = n_2(\pi'' - \varrho_1)\,, \qquad n_1(\pi^{V} + \varrho_1) = n_2(\pi_4 + \varrho_1)$$

$$n_2(\pi_2 - \varrho_2) = \pi''' - \varrho_2 \qquad n_2(\pi^{IV} + \varrho_2) = \pi_3 + \varrho_2$$

$$d_1 = \frac{1}{\pi'} - \frac{1}{\pi_1}\,, \qquad d_5 = \frac{1}{\pi^{V}} - \frac{1}{\pi_5} = \delta_1 d_1$$

$$d_2 = \frac{1}{\pi''} - \frac{1}{\pi_2}\,, \qquad d_4 = \frac{1}{\pi^{IV}} - \frac{1}{\pi_4} = \delta_2 d_2$$

$$d_3 = \frac{1}{\pi'''} - \frac{1}{\pi_3} = \frac{e - \varepsilon}{\pi''' + \pi_3}$$

wo mit Weglassung des Index $e = \frac{\pi_3}{\pi'''}$ und $\varepsilon = \frac{\pi'''}{\pi_3}$ geschrieben ist. Diese Grössen können folglich die Stelle der Unbekannten $d_3$ vertreten.

Durch Addition der obigen Gleichungen erhält man sofort

$$n_1(\pi' + \pi_5) = \pi_0 + \pi^{VI}$$

$$n_2(\pi'' + \pi_4) = n_1(\pi_1 + \pi^{V}) = \pi_0 + \pi^{VI} + n_1(\pi'\pi_1 - \pi^{V}\pi_5\delta_1)\,d_1$$

$$\pi''' + \pi_3 = n_2(\pi_2 + \pi^{IV}) = \pi_0 + \pi^{VI} + n_1(\pi'\pi_1 - \pi^{V}\pi_5\delta_1)\,d_1 + n_2(\pi''\pi_2 - \pi^{IV}\pi_4\delta_2)\,d_2$$

woraus erhellt, dass bei Vernachlässigung der Glasdicken

$$\pi''' + \pi_3 = \pi^{VI} + \pi_0$$

gesetzt werden darf. Die Gleichung

$$(\pi^{VI} + \pi_0)\,d_3 = e - \varepsilon$$

lehrt ferner, dass bei Fernrohrobjectiven, oder Linsensystemen mit der Bedingung $\pi^{VI} + \pi_0 > 0$, $e > \varepsilon$ sein muss, also entweder $e$ oder $-\varepsilon > 1$. Im letzteren Falle würden die Dimensionen des zweiten Linsensystems die des ersten übersteigen. Für die Lichtstärke ist es aber vortheilhaft, wenn das erste System die grössere Oeffnung besitzt, so dass wir

$$e = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right), \qquad \varepsilon = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right), \qquad \text{folglich} \qquad d_3 = \frac{2\operatorname{tg}\psi}{\pi''' + \pi_3}$$

substituiren können, während der Winkel $\psi$ im ersten Quadranten liegt. Bei Mikroskopen oder Linsensystemen mit der Bedingung $\pi^{VI} + \pi_0 < 0$ hat man dagegen $\varepsilon$ oder $-e > 1$ zu setzen, wobei $\psi$ resp. den vierten und zweiten Quadranten durchläuft.

Die Fundamentalgleichungen ergeben ferner

$$\pi''' = \pi_0 + (n_1-1)(\varrho-\varrho_1) + (n_2-1)(\varrho_1-\varrho_2) + n_1\pi'\pi_1 d_1 + n_2\pi''\pi_2 d_2$$
$$\pi^{VI} = \pi_3 + (n_1-1)(\varrho-\varrho_1) + (n_2-1)(\varrho_1-\varrho_2) + n_1\pi^{V}\pi_5\delta_1 d_1 + n_2\pi^{IV}\pi_4\delta_2 d_2$$

folglich für

$$\varrho = \varrho_1 + g_1\,, \qquad \varrho_2 = \varrho_1 + g_2$$

$$A = e\pi_0 + (1+e)[(n_1-1)g_1 - (n_2-1)g_2] + n_1(\pi'\pi_1 e + \pi^{V}\pi_5\delta_1)d_1 + n_2(\pi''\pi_2 e + \pi^{IV}\pi_4\delta_2)d_2$$

Durch Differentiation folgt weiter

$$dA = \left\{(e_2e_4)^2 S_1 e^2 + \varepsilon_5^2 S_5\right\}e_5^2\,dn_1 + \left\{e_4^2 S_2 e^2 + S_4\right\}e_5^2\,dn_2$$
$$S_1 = e_1^2\varrho - \varrho_1 - \pi_1^2 d_1 = g_1 + (\varrho + e_1\varrho - \pi_1)\pi_1 d_1$$
$$S_5 = \varrho - e_5^2\varrho_1 - \pi_5^2 d_5 = e_5^2 g_1 - (\varrho + e_5\varrho + \pi_5)\pi_5\delta_1 d_1$$
$$S_2 = e_2^2\varrho_1 - \varrho_2 - \pi_2^2 d_2 = -e_2^2 g_2 + (\varrho_2 + e_2\varrho_2 - \pi_2)\pi_2 d_2$$
$$S_4 = \varrho_1 - e_4^2\varrho_2 - \pi_4^2 d_4 = -g_2 - (\varrho_2 + e_4\varrho_2 + \pi_4)\pi_4\delta_2 d_2$$

mithin

$$dA = e_5^2\left\{(1+e_2^2e_4^2e^2)g_1 + g_1'd_1\right\}dn_1 - e_5^2\left\{(1+e_2^2e_4^2e^2)g_2 + g_2'd_2\right\}dn_2$$

wenn zur Abkürzung geschrieben wird

$$g_1' = (e_2e_4)^2(\varrho + e_1\varrho - \pi_1)\pi_1 e^2 - (\varrho + \varepsilon_5\varrho + \pi^{V})\pi^{V}\delta_1$$
$$g_2' = (\varrho_2 + e_4\varrho_2 + \pi_4)\pi_4\delta_2 - (e_2e_4)^2(\varrho_2 + \varepsilon_2\varrho_2 - \pi'')\pi'' e^2$$

Für die Linsendicken ergibt sich die Gleichung

$$\frac{dE}{E} = \left\{-\frac{d_1}{n_1}(\pi_1 - e_1\varrho) + \left(\frac{d_2}{n_2}e_2 + d_3 e e_2^2 + \frac{d_2}{n_2}\delta_2 e_4 e_2^2 e^2\right)S_1 - \frac{d_1}{n_1}\delta_1(\pi^{V} + e_5\varrho)\right\}dn_1$$
$$+ \left\{-\frac{d_2}{n_2}(\pi_2 - e_2\varrho_1) + \left(d_3 e + \frac{d_2}{n_2}\delta_2 e_4 e^2\right)S_2 - \frac{d_2}{n_2}\delta_2(\pi_4 + e_4\varrho_2)\right\}dn_2$$
$$= d_3 e\left\{e_2^2 S_1 dn_1 + S_2 dn_2\right\} - \frac{d_1}{n_1}\left\{(\delta_1\varepsilon_5 - e_1)\varrho + \pi_1 + \pi^{V}\delta_1\right\}dn_1$$
$$+ \frac{d_2}{n_2}\left\{(1 + \delta_2 e_2 e_4 e^2)e_2 S_1 dn_1 + \delta_2 e_4 e^2 S_2 + e_2\varrho_1 - \delta_2 e_4\varrho_2 - \pi_2 - \pi_4\delta_2)dn_2\right\}$$

wo das in $d_3$ multiplicirte Glied auch in der Form

$$d_3 e e_2^2\left\{g_1 + (\varrho + e_1\varrho - \pi_1)\pi_1 d_1\right\}dn_1 - d_3 e e_2^2\left\{g_2 - (\varrho_2 + \varepsilon_2\varrho_2 - \pi'')\pi'' d_2\right\}dn_2$$

geschrieben werden kann. Die Verbindung der Werthe von $dA$ und $dE$ liefert, wenn man allenthalben $\varrho_1$ eliminirt:

$$(1+e_2^2 e_4^2 e^2)\frac{dE}{E} - d_3 e(e_2\varepsilon_5)^2 dA - \frac{d_2}{n_2}(1+\delta_2 e_2 e_4 e^2) e_2 \varepsilon_5^2 dA =$$

$$= d_1 d_3 e_2^2 e\left\{(\varrho + e_1\varrho - \pi_4)\pi_1 + (\varrho + \varepsilon_5\varrho + \pi^{\text{v}})\pi^{\text{v}}\delta_1\right\} dn_1$$

$$+ d_2 d_3 e_2^2 e\left\{(\varrho_2 + \varepsilon_4\varrho_2 - \pi'')\pi'' + (\varrho_2 + e_4\varrho_2 + \pi_4)\pi_4\delta_2\right\} dn_2$$

$$- \frac{d_1}{n_1}(1+e_2^2 e_4^2 e^2)\left\{\pi_1 - e_1\varrho + (\pi^{\text{v}} + \varepsilon_5\varrho)\delta_1\right\} dn_1$$

$$- \frac{d_2}{n_2}(1+e_2^2 e_4^2 e^2)\left\{\pi_2 - e_2\varrho_2 + (\pi^{\text{IV}} + \varepsilon_4\varrho_2)\delta_2\right\} dn_2$$

$$+ \frac{d_2}{n_2}(1+\delta_2 e_2 e_4 e^2)(e_2 S_1 - \varepsilon_5^2 S_5) dn_1$$

$$- \frac{d_2}{n_2}(e_2 - \delta_2\varepsilon_4)\left\{(1+e_2^2 e_4^2 e^2) g_2 + e_4^2 e^2 S_2 + S_1\right\} dn_2$$

wo auch in den beiden letzten Gliedern bei der Entwickelung $\varrho_4$ sich weghebt. Dieselben sind übrigens, wie man leicht sieht, von der zweiten Dimension in Bezug auf die Linsendicken.

## §. 21. Fortsetzung.

In der ersten Approximation darf man die höheren Potenzen von $d_1$ und $d_2$ vernachlässigen und bekommt folglich nicht allein

$$(n_1-1)g_1 - (n_2-1)g_2 = \frac{a - e\pi_0}{1+e}$$

nebst

$$\frac{dA}{1+e^2} = g_1 dn_1 - g_2 dn_2 = 0$$

sondern auch für die Linsendicken

$$0 = d_1 d_3 e\left\{(2\varrho - \pi_1)\pi_1 + (2\varrho + \pi^{\text{v}})\pi^{\text{v}}\delta_1\right\} dn_1 - \frac{d_1}{n_1}(1+e^2)\left\{\pi_1 - \varrho + (\pi^{\text{v}} + \varrho)\delta_1\right\} dn_1$$

$$+ d_2 d_3 e\left\{(2\varrho_2 - \pi'')\pi'' + (2\varrho_2 + \pi_4)\pi_4\delta_2\right\} dn_2 - \frac{d_2}{n_2}(1+e^2)\left\{\pi_2 - \varrho_2 + (\pi^{\text{IV}} + \varrho_2)\delta_2\right\} dn_2$$

eine Gleichung, in welcher sämmtliche Glieder kleine Grössen von derselben Ordnung geworden sind. Durch Elimination von $\pi_1$ $\pi''$ $\pi_4$ $\pi^{\text{v}}$ erhält man hieraus ohne Schwierigkeit

$$0 = \frac{d_1}{n_1^2} dn_1 \Big\{\big((\overline{n_1+1}\,\varrho + \pi^{\text{VI}})(\overline{n_1-1}\,\varrho - \pi^{\text{VI}}) d_3 + (2\varrho + \pi^{\text{VI}} - \pi_0) e\big)(1-\delta_1) +$$

$$+ (\pi^{\text{VI}} + \pi_0)[(\varrho + \pi^{\text{VI}}) d_3 - e](1+\delta_1)\Big\}$$

$$+ \frac{d_2}{n_2^2} dn_2 \Big\{[(n_2^2 - 1)\varrho_2^2 d_3 + 2\varrho_2](1-\delta_2) + (\pi^{\text{VI}} + \pi_0)(\varrho_2 d_3 - 1)(1+\delta_2)\Big\}$$

Für $\delta_1 = \delta_2 = 1$ wird sehr einfach

$$\frac{d_2}{d_1} = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \frac{(\varrho + \pi^{VI}) d_3 - e}{\varrho_2 d_3 - 1} \cdot \frac{dn_1}{dn_2}$$

Wenden wir uns zu den Werthen von $B$ und seinen Differentialen. Für sechs Brechungen wird streng

$$B = \frac{1}{2m}(\varepsilon_1\varepsilon_2 e_4 e_5)^2 \left\{(e_1^4 e_2^4 L + e_2^4 L_1 + L_2)\, e^2 + (L_3 + \varepsilon_4^4 L_4 + \varepsilon_4^4 \varepsilon_5^4 L_5)\, \varepsilon^2\right\}$$

$$dB = \varepsilon_1^2 dn_1 \left\{\frac{1}{2}(e_2 e_4 e_5)^2 (R_1 e^2 + S_1 [(T_1 + \varepsilon_2^2 T_2)\, e^2 + \varepsilon_3^2 T_3 + \varepsilon_3^2 \varepsilon_4^2 T_4]) - \right.$$
$$\left. - 2 S_1 d_3 \varepsilon \Delta_3^6 + 2\frac{d_1}{n_1} e_1 (\pi' - \varrho) \Delta_1^6 - 2 S_1 \left[\frac{d_2}{n_2}\varepsilon_2 \Delta_2^6 + \frac{d_4}{n_2}\varepsilon_4 \Delta_4^6\right]\right\}$$
$$+ (\varepsilon_1\varepsilon_2)^2 dn_2 \left\{\frac{1}{2}(e_4 e_5)^2 (R_2 e^2 + S_2 [T_2 e^2 + T_3 + \varepsilon_4^2 T_4]) - 2 S_2 d_3 \varepsilon \Delta_3^6 + \right.$$
$$\left. + 2\frac{d_2}{n_2} e_2 (\pi'' - \varrho_1) \Delta_2^6 - 2 S_2 \frac{d_4}{n_2}\varepsilon_4 \Delta_4^6\right\}$$
$$+ (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4)^2 \varepsilon^2 dn_2 \left\{\frac{1}{2} e_5^2 (R_5 + S_4 T_4) + 2\frac{d_4}{n_2} e_4 (\pi^{IV} + \varrho_2) \Delta_4^6\right\}$$
$$+ (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_4\varepsilon_5)^2 \varepsilon^2 dn_1 \left\{\frac{1}{2} R_5 + 2\frac{d_5}{n_1}\varepsilon_5 (\pi_5 + \varrho) \Delta_5^6\right\}$$

$$\frac{\partial B}{\partial \pi_0} = \frac{1}{2}(e_4 e_5)^2 \left\{(e_1^2 e_2^2 T + e_2^2 T_1 + T_2)\, e^2 + (T_3 + \varepsilon_4^2 T_4 + \varepsilon_4^2 \varepsilon_5^2 T_5)\right\} - 2 d_3 \varepsilon \Delta_3^6 \text{*)}$$
$$- 2\left\{\frac{d_1}{n_1}\varepsilon_1 \Delta_1^6 + \frac{d_2}{n_2}\varepsilon_2 \Delta_2^6 + \frac{d_4}{n_2}\varepsilon_4 \Delta_4^6 + \frac{d_5}{n_1}\varepsilon_5 \Delta_5^6\right\}$$

In der ersten Approximation folgt hieraus für $d_1 = d_2 = 0$

$$B = \frac{1}{2m}\left\{(L + L_1 + L_2)\, e^2 + (L_3 + L_4 + L_5)\, \varepsilon^2\right\}$$

$$dB = \frac{1}{2}\left\{R_1 e^2 + S_1 [(T_1 + T_2)\, e^2 + T_3 + T_4 - 4 d_3 \varepsilon \Delta_3^6]\right\} dn_1$$
$$+ \frac{1}{2}\left\{R_2 e^2 + S_2 [T_2 e^2 + T_3 + T_4 - 4 d_3 \varepsilon \Delta_3^6]\right\} dn_2$$
$$+ \frac{1}{2}(R_4 + S_4 T_4)\, \varepsilon^2 dn_2 + \frac{1}{2} R_5 \varepsilon^2 dn_1$$

$$\frac{\partial B}{\partial \pi_0} = \frac{1}{2}\left\{(T + T_1 + T_2)\, e^2 + (T_3 + T_4 + T_5)\right\}$$
$$+ \frac{2}{m(\pi^{VI} + \pi_0)} \cdot \frac{e^2 - 1}{e^2 + \varepsilon^2}\left\{(L + L_1 + L_2) - (L_3 + L_4 + L_5)\right\}$$

---

*) Da

$$m\Delta_3^6 = (e_4 e_5)^2 \left\{L_3 + \varepsilon_4^4 L_4 + (\varepsilon_4\varepsilon_5)^4 L_5\right\}$$

so kann man unter Benutzung der Gleichung $B = 0$ dem obigen Terme die Form geben

$$- 2 d_3 \varepsilon \Delta_3^6 = \frac{2 (e_4 e_5)^2}{m(\pi''' + \pi_3)} \cdot \frac{e^2 - 1}{e^2 + \varepsilon^2}\left\{(e_1^4 e_2^4 L + e_2^4 L_1 + L_2) - (L_3 + \varepsilon_4^4 L_4 + \varepsilon_4^4 \varepsilon_5^4 L_5)\right\}$$

Wegen

$$S_1 = S_5 = g_1\,, \qquad S_2 = S_4 = -g_2$$

$$R_1 = g_1 P_1\,, \quad R_2 = -g_2 P_2\,, \quad R_4 = -g_2 P_4\,, \quad R_5 = g_1 P_5$$

geht die Gleichung $dB = 0$ nach Division durch $g_1 dn_1 = g_2 dn_2$ über in

$$(P_1 - P_2 + T_1)e^2 = (P_4 - P_5 + T_4)\varepsilon^2$$

so dass noch die Werthe von $L$ $T$ und P zu substituiren sind.

Wir werden uns im Folgenden der nachstehenden Bezeichnungen bedienen:

$$e = \mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \psi\right) = \sec\psi + \mathrm{tg}\,\psi$$

$$f = q' - q\,\mathrm{tg}\tfrac{1}{2}\psi = \frac{\pi^{\mathrm{VI}} - e\pi_0}{1+e}$$

$$\pi^{\mathrm{VI}} + \pi_0 = 2q\,, \qquad \gamma_1 = \frac{dn_2}{(n_1-1)dn_2 - (n_2-1)dn_1}$$

$$\pi^{\mathrm{VI}} - \pi_0 = 2q'\,, \qquad \gamma_2 = \frac{dn_1}{(n_1-1)dn_2 - (n_2-1)dn_1}$$

mithin auch $\qquad (n_1-1)\gamma_1 - (n_2-1)\gamma_2 = 1$

$$2m\mathfrak{L} = L + L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5\,, \qquad 2m\mathfrak{L}' = L + L_1 + L_2 - L_3 - L_4 - L_5$$

$$2\mathfrak{T} = T + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5\,, \qquad 2\mathfrak{T}' = T + T_1 + T_2 - T_3 - T_4 - T_5$$

$$2\mathfrak{R} = P_1 - P_2 + T_1 + P_4 - P_5 + T_4\,, \qquad 2\mathfrak{R}' = P_1 - P_2 + T_1 - P_4 + P_5 - T_4$$

Dann kann man die Gleichungen der ersten Approximation schreiben

$$g_1 = \gamma_1 f\,, \qquad g_2 = \gamma_2 f$$

$$2B = \mathfrak{L}(e^2 + \varepsilon^2) + \mathfrak{L}'(e^2 - \varepsilon^2)$$

$$2dB = \left\{\mathfrak{R}'(e^2 + \varepsilon^2) + \mathfrak{R}(e^2 - \varepsilon^2)\right\} g_1 dn_1$$

$$2\frac{\partial B}{\partial \pi_0} = \mathfrak{T}(e^2+1) + (e^2-1)\left\{\mathfrak{T}' + \frac{4e^2}{e^4+1}\cdot\frac{\mathfrak{L}'}{q}\right\}$$

oder nach Vornahme einiger leichten Reductionen, unter Berücksichtigung der bald zu erweisenden Relation $\mathfrak{L}' = q\mathfrak{T}'$,

$$B\cos^2\psi = (1 + \sin^2\psi)\mathfrak{L} + 2\sin\psi\,\mathfrak{L}'$$

$$\frac{\cos^2\psi\, dB}{g_1 dn_1} = (1 + \sin^2\psi)\mathfrak{R}' + 2\sin\psi\,\mathfrak{R}$$

$$\frac{\partial B}{\partial \pi_0}(1 - \sin\psi)(1 + \sin^2\psi) = (1 + \sin^2\psi)\mathfrak{T} + 2\sin\psi\left(1 + \tfrac{1}{2}\cos^2\psi\right)\mathfrak{T}'$$

Um die Werthe der $\mathfrak{L}$ $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{T}$ auszudrücken, setze man nach § 13

$$\frac{1}{m}(L+L_1+L_2) = n_1(n_1-1)g_1\Psi_1 - n_2(n_2-1)g_2\Psi_2$$
$$n_1\Psi_1 = \left(1+\frac{2}{n_1}\right)gg - (3g_1 - 2\pi_0)\,g + n_1 g_1(g_1-\pi_0)$$
$$n_2\Psi_2 = \left(1+\frac{2}{n_2}\right)gg - (3g_2 - 2\pi''')g + n_2 g_2(g_2-\pi''')$$
$$g = n_1(\pi_1-\varrho_1) = n_2(\pi''-\varrho_1)$$

Genau ebenso erhält man durch Vornahme der erforderlichen Buchstabenvertauschungen

$$\frac{1}{m}(L_3+L_4+L_5) = n_1(n_1-1)g_1\Psi_1' - n_2(n_2-1)g_2\Psi_2'$$
$$n_1\Psi_1' = \left(1+\frac{2}{n_1}\right)g'g' + (3g_1 + 2\pi^{VI})g' + n_1 g_1(g_1+\pi^{VI})$$
$$n_2\Psi_2' = \left(1+\frac{2}{n_2}\right)g'g' + (3g_2 + 2\pi_3)\,g' + n_2 g_2(g_2+\pi_3)$$
$$g' = n_1(\pi^{V}+\varrho_1) = n_2(\pi_4+\varrho_1)$$

mithin

$$g+g' = n_1(\pi_1+\pi^{V}) = n_2(\pi''+\pi_4)$$
$$= \pi'''+\pi_3 = \pi^{VI}+\pi_0 = 2q$$

Es ist nun leicht, die Relationen

$$\frac{\partial\pi'''}{\partial\pi_0} = \frac{\partial\pi^{VI}}{\partial\pi_3} = \frac{\partial q}{\partial\pi_0} = \frac{\partial q'}{\partial\pi_3} = 1$$
$$n_1(\Psi_1-\Psi_1') = q\left(\frac{\partial . n_1\Psi_1}{\partial\pi_0} - \frac{\partial . n_1\Psi_1'}{\partial\pi_3}\right)$$
$$n_2(\Psi_2-\Psi_2') = q\left(\frac{\partial . n_2\Psi_2}{\partial\pi_0} - \frac{\partial . n_2\Psi_2'}{\partial\pi_3}\right)$$

zu verificiren, aus denen unter Berücksichtigung von

$$T+T_1+T_2 = \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial\pi_0}(L+L_1+L_2)$$
$$T_3+T_4+T_5 = \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial\pi_3}(L_3+L_4+L_5)$$

die oben behauptete Gleichung

$$\mathfrak{L}' = q\mathfrak{T}'$$

hervorgeht.

## §. 22. Schluss.

Wir setzen ferner

$$g - g' = 2f'$$

folglich

$$g = q + f', \qquad g^2 + g'^2 = 2(ff' + q^2)$$

$$g' = q - f', \qquad g^2 - g'^2 = 4qf'$$

Ebenso ergeben sich aus

$$\pi_3 + \pi''' = 2q, \qquad \pi_3 - \pi''' = (\pi_3 + \pi''')\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi$$

die Werthe

$$\pi''' = q(1 - \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi) = q - q' + f$$

$$\pi_3 = q(1 + \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\psi) = q + q' - f$$

Damit bekommt man

$$\tfrac{1}{2} n_1(\Psi_1 + \Psi_1') = \left(1 + \frac{2}{n_1}\right)f'f' - (3\gamma_1 f + 2q')f' + n_1\gamma_1^2 f^2 + n_1\gamma_1 q' f + \left(3 + \frac{2}{n_1}\right)q^2$$

$$\tfrac{1}{2} n_1(\Psi_1 - \Psi_1') = q\left\{4\left(1 + \frac{1}{n_1}\right)f' - (n_1 + 3)\gamma_1 f - 2q'\right\}$$

$$\tfrac{1}{2} n_2(\Psi_2 + \Psi_2') = \left(1 + \frac{2}{n_2}\right)f'f' - [(3\gamma_2 - 2)f + 2q']f' + $$
$$+ n_2\gamma_2(\gamma_2 - 1)f^2 + n_2\gamma_2 q' f + \left(3 + \frac{2}{n_2}\right)q^2$$

$$\tfrac{1}{2} n_2(\Psi_2 - \Psi_2') = q\left\{4\left(1 + \frac{1}{n_2}\right)f' - [(n_2 + 3)\gamma_2 - 2]f - 2q'\right\}$$

folglich

$$\mathfrak{L} = f\Big\{\Big[2\Big(n_1 - \frac{1}{n_1}\Big)\gamma_1 - 2\Big(n_2 - \frac{1}{n_2}\Big)\gamma_2 - 1\Big]f'f' + \big[3(n_1 - 1)\gamma_1^2 - 3(n_2 - 1)\gamma_2^2 + 2(n_2 - 1)\gamma_2\big]ff' -$$
$$- 2q'f' + \big[n_1(n_1 - 1)\gamma_1^3 - n_2(n_2 - 1)\gamma_2^3 + n_2(n_2 - 1)\gamma_2^2\big]f^2 +$$
$$+ \big[n_1(n_1 - 1)\gamma_1^2 - n_2(n_2 - 1)\gamma_2^2\big]q'f + \Big[2\Big(n_1 - \frac{1}{n_1}\Big)\gamma_1 - 2\Big(n_2 - \frac{1}{n_2}\Big)\gamma_2 + 1\Big]q^2\Big\}$$

$$\mathfrak{L}' = 2qf\Big\{2\Big[\Big(n_1 - \frac{1}{n_1}\Big)\gamma_1 - \Big(n_2 - \frac{1}{n_2}\Big)\gamma_2\Big]f' - \big[(n_1^2 - 1)\gamma_1^2 - (n_2^2 - 1)\gamma_2^2 - \tfrac{1}{2}\big]f - q'\Big\}$$

Weiter berechnet man ohne Schwierigkeit

$$P_1 - P_2 + T_1 = 2(\pi' - \varrho)^2 - 2(\pi_2 - \varrho_2)^2 - (\varrho - \varrho_2)(\varrho - \varrho_1 + \varrho_2)$$
$$P_4 - P_5 + T_4 = 2(\pi^{IV} + \varrho_2)^2 - 2(\pi_5 + \varrho)^2 + (\varrho - \varrho_2)(\varrho - \varrho_1 + \varrho_2)$$
$$T + T_1 + T_2 = (n_1 - 1)(\varrho - \varrho_1)T_1 + (n_2 - 1)(\varrho_1 - \varrho_2)T_2$$
$$= (n_1 - 1)g_1[(3n_1 + 1)(2\pi_1 - \varrho - \varrho_1) + 2\pi_1] -$$
$$- (n_2 - 1)g_2[(3n_2 + 1)(2\pi_2 - \varrho_1 - \varrho_2) + 2\pi_2]$$
$$T_3 + T_4 + T_5 = (n_1 - 1)g_1[(3n_1 + 1)(2\pi_5 + \varrho + \varrho_1) + 2\pi_5] -$$
$$- (n_2 - 1)g_2[(3n_2 + 1)(2\pi_4 + \varrho_1 + \varrho_2) + 2\pi_4]$$

und durch Einführung der Werthe

$$\varrho = n_1\gamma_1 f - f' - q', \qquad \varrho_1 = (n_1 - 1)\gamma_1 f - f' - q'$$
$$\varrho_2 = (n_1 - 1)\gamma_1 f + \gamma_2 f - f' - q' = (n_2\gamma_2 + 1)f - f' - q'$$
$$n_1(\pi' - \varrho) = -n_1\gamma_1 f + f' + q, \qquad n_2(\pi^{IV} + \varrho_2) = n_2\gamma_2 f - f' + q$$
$$n_2(\pi_2 - \varrho_2) = -n_2\gamma_2 f + f' + q, \qquad n_1(\pi_5 + \varrho) = n_1\gamma_1 f - f' + q$$
$$\pi_1 = \pi' = (n_1 - 1)\gamma_1 f - \left(1 - \frac{1}{n_1}\right)f' + \frac{1}{n_1}q - q'$$
$$\pi_2 = \pi'' = (n_1 - 1)\gamma_1 f - \left(1 - \frac{1}{n_2}\right)f' + \frac{1}{n_2}q - q'$$
$$\pi_4 = \pi^{IV} = -(n_1 - 1)\gamma_1 f + \left(1 - \frac{1}{n_2}\right)f' + \frac{1}{n_2}q + q'$$
$$\pi_5 = \pi^{V} = -(n_1 - 1)\gamma_1 f + \left(1 - \frac{1}{n_1}\right)f' + \frac{1}{n_1}q + q'$$

gehen schliesslich die Ausdrücke hervor:

$$P_1 - P_2 + T_1 = \frac{2}{n_1^2}(n_1\gamma_1 f - f' - q)^2 - \frac{2}{n_2^2}(n_2\gamma_2 f - f' - q)^2 -$$
$$- (\gamma_1 - \gamma_2)f[(n_1\gamma_1 + \gamma_2)f - f' - q']$$
$$P_4 - P_5 + T_4 = -\frac{2}{n_1^2}(n_1\gamma_1 f - f' + q)^2 + \frac{2}{n_2^2}(n_2\gamma_2 f - f' + q)^2 +$$
$$+ (\gamma_1 - \gamma_2)f[(n_1\gamma_1 + \gamma_2)f - f' - q']$$
$$\mathfrak{R} = 4q\left\{\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)f' - \left(\frac{\gamma_1}{n_1} - \frac{\gamma_2}{n_2}\right)f\right\}$$
$$\mathfrak{R}' = 2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)f'f' + \left[\left(1 - \frac{4}{n_1}\right)\gamma_1 - \left(1 - \frac{4}{n_2}\right)\gamma_2\right]ff' -$$
$$- (\gamma_1 - \gamma_2)[(n_1 - 2)\gamma_1 - \gamma_2]f^2 + (\gamma_1 - \gamma_2)q'f + 2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)q^2$$

nebst

$$\mathfrak{T} = (n_1 - 1) g_1 (3n_1 + 2)(\pi_1 + \pi_5) - (n_2 - 1) g_2 (3n_2 + 2)(\pi_2 + \pi_4)$$

$$= 4qf\left\{\left(n_1 - \frac{1}{n_1}\right)\gamma_1 - \left(n_2 - \frac{1}{n_2}\right)\gamma_2 + \frac{1}{2}\right\}$$

$$\mathfrak{T}' = (n_1 - 1) g_1 \left\{(3n_1 + 2)(\pi_1 - \pi_5) - (3n_1 + 1)(\varrho + \varrho_1)\right\} -$$

$$- (n_2 - 1) g_2 \left\{(3n_2 + 2)(\pi_2 - \pi_4) - (3n_2 + 1)(\varrho_1 + \varrho_2)\right\}$$

$$= 2f\left\{2\left[\left(n_1 - \frac{1}{n_1}\right)\gamma_1 - \left(n_2 - \frac{1}{n_2}\right)\gamma_2\right] f' - \left[(n_1^2 - 1)\gamma_1^2 - (n_2^2 - 1)\gamma_2^2 - \frac{1}{2}\right] f - q'\right\}$$

Uebrigens kann man wiederum die Gleichungen für $\frac{\partial B}{\partial \pi_0}$ und $dB$ durch directe Differentiation finden, wenn man die Werthe

$$\frac{\partial f}{\partial \pi_0} = 0, \qquad \frac{\partial f'}{\partial \pi_0} = -e \operatorname{tg} \psi, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \pi_0} = \frac{e \sin \psi}{q}$$

$$\frac{\partial f}{\partial n_1} = g_1, \qquad \frac{\partial f'}{\partial n_1} = -e g_1 \operatorname{tg} \psi, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial n_1} = \frac{e \sin \psi}{q} g_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial n_2} = -g_2, \qquad \frac{\partial f'}{\partial n_2} = e g_2 \sec \psi, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial n_2} = -\frac{e \sin \psi}{q} g_2$$

$$\frac{\partial q}{\partial \pi_0} = e \sec \psi, \qquad \frac{\partial q}{\partial n_1} = \frac{\partial q'}{\partial n_1} = e g_1 \sec \psi$$

$$\frac{\partial q'}{\partial \pi_0} = e \operatorname{tg} \psi, \qquad \frac{\partial q}{\partial n_2} = \frac{\partial q'}{\partial n_2} = -e g_2 \sec \psi$$

substituirt, denen noch die Ausdrücke

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial n_1} = -\gamma_1^2, \qquad \frac{\partial \gamma_1}{\partial n_2} = \gamma_1 \gamma_2, \qquad \frac{\partial \gamma_2}{\partial n_1} = -\gamma_1 \gamma_2, \qquad \frac{\partial \gamma_2}{\partial n_2} = \gamma_2^2$$

hinzugefügt werden können. Wenn man aber die Relation $g_1 dn_1 = g_2 dn_2$ berücksichtigt, so erhellt, dass bei der Ableitung von $dB$ man einfach

$$\frac{\partial f'}{\partial n_1} = \frac{1}{2}\gamma_1 f, \qquad \frac{\partial f'}{\partial n_2} = \frac{1}{2}\gamma_2 f$$

setzen und alles Uebrige ausser den Brechungsexponenten $n_1$ und $n_2$ als constant betrachten darf.

Die Gleichungen für $B$ und $dB$ nehmen nunmehr die Gestalt an

$$a_4 f'f' + a_5 f' + a_6 = 0, \qquad b_4 f'f' + b_5 f' + b_6 = 0$$

während die Gleichung für $\frac{\partial B}{\partial \pi_0}$ in der linearen Form

$$c_5 f' + c_6 = 0$$

geschrieben werden kann. Die Indices der Coefficienten bezeichnen den Grad derselben als Polynome in $f$ oder in $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\psi$. Indessen können die beiden ersten Gleichungen zu

$$\mathfrak{L}\mathfrak{R} = \mathfrak{L}'\mathfrak{R}'$$

combinirt werden, oder mit Weglassung des Factors $2qf$ *)

$$a_0'f'^3 + a_1'f'^2 + a_2'f' + a_3' = 0$$

Die Elimination von $f'$ ergibt die Eliminationsresultanten

$$\begin{vmatrix} a_0' & a_1' & a_2' & a_3' & 0 \\ 0 & a_0' & a_1' & a_2' & a_3' \\ b_4 & b_5 & b_6 & 0 & 0 \\ 0 & b_4 & b_5 & b_6 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & b_5 & b_6 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} a_4 & a_5 & a_6 \\ c_5 & c_6 & 0 \\ 0 & c_5 & c_6 \end{vmatrix} = 0$$

welche in Bezug auf $f$ resp. vom 18. und 16. Grade sind. Da man an eine directe Auflösung dieser Gleichungen nicht denken wird, so kann man sich etwa dadurch helfen, dass man für eine Anzahl äquidistanter Werthe des Winkels $\psi$ die zugehörigen Werthe von $f = q' - q\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\psi$ berechnet und alsdann die betreffenden Gleichungen nach $f'$ auflöst. Dabei hat man zu bemerken, dass bei Fernröhren $\psi$ im ersten Quadranten liegen muss, wenn $d_3 > 0$, $e > 1$ sein soll, während bei Mikroskopobjectiven oder Linsensystemen mit der Bedingung $\pi^{\mathrm{VI}} + \pi_0 < 0$, nach den Erörterungen in § 20, $\psi$ den zweiten oder vierten Quadranten durchläuft.

Es bedarf wohl kaum der besonderen Bemerkung, dass wenn man von der Erfüllung der Bedingungsgleichungen $dB = 0$ oder $\frac{\partial B}{\partial \pi_0} = 0$ abstrahiren will, der Abstand $d_3$ der beiden Linsensysteme beliebig gewählt werden kann. Alsdann sind $e\ \varepsilon\ f$ und $\psi$ als gegebene Grössen anzusehen, und die Aufgabe reducirt sich in der ersten Approximation auf die Gleichungen

$$g_1 = \gamma_1 f, \qquad g_2 = \gamma_2 f \quad \text{und} \quad 0 = (1 + \sin^2\psi)\,\mathfrak{L} + 2\sin\psi\,\mathfrak{L}'$$

so dass die Krümmungen wie beim einfachen HANSEN'schen Objective von der Auflösung einer quadratischen Gleichung $a_4 f'f' + a_5 f' + a_6 = 0$ abhängen. Ausserdem ist das Verhältniss der Dicken $d_1 : d_2$ durch die Gleichung $dE = 0$ bestimmt. Es wird sich in diesem Falle darum handeln, durch die Wahl von $d_3$ etwa die Werthe der

---

*) Für $f = 0$ reducirt sich diese Gleichung auf

$$2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right)(f' + q')(f'f' - q^2) = 0$$

Krümmungshalbmesser zu vergrössern, um dadurch ein günstigeres Verhältniss zwischen $K$ und $d_3 + \frac{1}{\pi^{VI}}$, d. i. zwischen Oeffnung und Länge (resp. Ocularabstand) des Apparates herbeizuführen.

Zum Schlusse möge noch die Brennweite $\Phi$ des dialytischen Objectivs, im Sinne des § 4, berechnet und gezeigt werden, dass während bei Vernachlässigung der Dicken $\Phi = \frac{1}{\pi^i - \pi_0}$ ist, im vorliegenden Falle, wo $d_3$ nicht vernachlässigt werden darf, in der ersten Approximation

$$\Phi = \frac{e(\pi^{VI} + \pi_0)}{\pi^{VI}\pi^{VI} - e^2\pi_0^2}$$

erhalten wird. Wir fanden für $m = 1$, $i = 6$

$$\Phi = -\frac{m}{\mu_{2i-1}} = -\frac{1}{\mu_{11}}$$

wo $\mu_{11}$ den Nenner des Kettenbruchs

$$\frac{\lambda_{11}}{\mu_{11}} = \frac{\mu_{10}}{\mu_{11}} = \frac{1}{s + s_1 + s_2} + \frac{1}{d_3} + \frac{1}{s + s_1 + s_2}$$

bezeichnet. Da

$$s + s_1 + s_2 = -(n_1 - 1)g_1 + (n_2 - 1)g_2 = -f$$

so folgt

$$\frac{\mu_{10}}{\mu_{11}} = -\frac{1}{f} - \frac{1}{d_3} - \frac{1}{f}, \qquad \mu_{11} = d_3 f^2 - 2f$$

mithin

$$\Phi = \frac{1}{2f - d_3 f^2}$$

woraus nach Substitution von

$$f = \frac{\pi^{VI} - e\pi_0}{1 + e}, \qquad d_3 = \frac{e - \varepsilon}{\pi^{VI} + \pi_0}$$

der oben angeführte Werth hervorgeht. Für $\pi_0 = 0$, $\pi^{VI} = 1$ ergibt sich einfach $\Phi = e$.

# DAS WEBERSCHE GESETZ

BEI

ZUGRUNDELEGUNG

DER

# UNITARISCHEN ANSCHAUUNGSWEISE

VON

**CARL NEUMANN,**

MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

---

Des XI. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

Nº VII.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1876.

Vom Verfasser übergeben den 8. August 1876.
Der Abdruck vollendet den 20. August 1876.

# DAS WEBERSCHE GESETZ

BEI

# ZUGRUNDELEGUNG

DER

# UNITARISCHEN ANSCHAUUNGSWEISE

VON

CARL NEUMANN.

Durch die in den letzten Jahren im Gebiete der Elektrodynamik ausgeführten Arbeiten dürfte das *Weber'sche Grundgesetz* mehr als je befestigt sein. Denn jene Arbeiten lassen deutlich erkennen, dass alle *anderen* zur Erklärung der elektrischen Erscheinungen bisher unternommenen Versuche *entweder* den experimentellen Thatsachen gegenüber unhaltbar sind, *oder aber* der *Weber*'schen Theorie wenigstens insofern nachstehen, als sie eines bestimmten einheitlichen Grundgesetzes entbehren. Und mahnender als je tritt daher die Aufforderung an uns heran, das von *Weber* Begonnene weiter fortzuführen, ein *vollständiges System der Elektromechanik* zu construiren, und insbesondere auch jene (so lange schon gesuchten) Differentialgleichungen aufzustellen, von denen die Bewegung der Elektricität in leitenden Körpern abhängt.

Doch wird noch mancher Zeitraum verfliessen, ehe wir an diese grosse und vielumfassende Aufgabe mit irgend welcher Aussicht auf *Erfolg* uns heranwagen dürfen.

Vor allen Dingen müssen wir die zu überwindenden Schwierigkeiten (welche hauptsächlich in der Unvollkommenheit unserer physikalischen Einsichten und Vorstellungen bestehen) sorgfältig ins Auge fassen, und dieselben *durch geeignete Vorarbeiten* zu beseitigen resp. zu vermindern suchen.

Auf einige der in Rede stehenden Schwierigkeiten habe ich bereits bei einer früheren Gelegenheit (nämlich bei Besprechung der *Kirchhoff*'schen Differentialgleichungen) hingedeutet. Es mag mir gestattet sein, hier auf zwei weitere Schwierigkeiten aufmerksam zu machen. Die eine betrifft die Frage, ob die in der Elektro*statik* übliche Vorstellung *unendlich dünner* elektrischer Schichten auch noch zulässig sei in der Elektro*dynamik;* die andere die Frage, ob wir

bei Anwendung des *Weber*'schen Gesetzes der gewöhnlichen ***dualistischen*** oder der gelegentlich von mir proponirten ***unitarischen*** Anschauungsweise uns anzuschliessen haben.

* * * *

Um auf die erste Frage näher einzugehen, erinnere ich an die bekannten Gleichungen

(I.) $$-\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

(II.) $$-\frac{\partial e}{\partial t} = u\alpha + v\beta + w\gamma.$$

Die erste bezieht sich auf irgend einen Punkt $x$, $y$, $z$ im ***Innern*** des betrachteten Conductors; $u$, $v$, $w$ repräsentiren die dort vorhandenen elektrischen Strömungen, und $\varepsilon$ die Dichtigkeit der daselbst befindlichen freien Elektricität. Andererseits bezieht sich die zweite Gleichung auf die ***Oberfläche*** des Conductors, denn $e\,do$ bezeichnet die auf einem Element $do$ dieser Fläche angehäufte freie Elektricität, und $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sind die Richtungscosinus der auf $do$ errichteten innern Normale. Uebrigens ist bei der zweiten Formel vorausgesetzt, dass der betrachtete Conductor umgeben sei von einem isolirenden Medium.

Denken wir uns nun eine isolirt und fest aufgestellte Metallkugel, um welche ein elektrischer Massenpunkt mit constanter Geschwindigkeit im Kreise herumläuft, so wird im Innern der Metallkugel allmählig ein stationärer Zustand eintreten. Zur Zeit dieses stationären Zustandes ist die Strömung $u$, $v$, $w$ in solchen Punkten der Kugel, die dicht an der Oberfläche liegen, offenbar ***tangential***, also senkrecht zur Normale $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Somit folgt aus der Formel (II.)

$$\frac{\partial e}{\partial t} = 0$$

d. i.

$e$ unabhängig von der Zeit.

Dies aber ist unmöglich; denn es unterliegt keinem Zweifel, dass die elektrische Dichtigkeit $e$ an einer gegebenen Stelle der Kugelfläche in Folge der Bewegung des elektrischen Massenpunktes fortwährend (und zwar periodisch) variirt.

***Hieraus folgt, dass die Gleichung* (II.) *unhaltbar ist; und hieraus dürfte zu schliessen sein, dass die bei Ableitung dieser Gleichung***

*gemachte Annahme einer unendlich dünnen elektrischen Schicht unzulässig sei.* — Doch ist es nicht meine Absicht, auf diesen Gegenstand schon jetzt ausführlicher einzugehen.

* * * *

Was die zweite Frage betrifft, so habe ich vor einiger Zeit nachgewiesen, dass das *Weber*'sche Gesetz in seiner Anwendung auf gleichförmige lineare Ströme — mögen dieselben nun mit Gleitstellen behaftet sein oder nicht — unter Zugrundelegung der gewöhnlichen *dualistischen* Anschauungsweise zu Resultaten führt, die mit den experimentell constatirten Integralgesetzen (namentlich auch mit dem allgemeinen Princip meines Vaters) im vollkommensten Einklang stehen. Dass Gleiches auch stattfinden werde bei Zugrundelegung der *unitarischen* Anschauungsweise, war im höchsten Grade unwahrscheinlich; weil die Elementargesetze (oder wenigstens das eine derselben) je nach Annahme der dualistischen oder unitarischen Vorstellungsweise sehr verschieden ausfallen. — Somit schien Aussicht vorhanden, durch ein näheres Eingehen auf diesen Punkt zwischen jenen beiden Vorstellungsweisen zu einer bestimmten Entscheidung zu gelangen.

Zu meiner nicht geringen Ueberraschung habe ich indessen gefunden, dass die resultirenden Integralgesetze für gleichförmige lineare Ströme in allen Fällen, selbst dann, wenn die Ströme mit Gleitstellen behaftet sind, von der zu Grunde gelegten Vorstellungsweise *unabhängig* sind, — dass sie also *genau dieselbe* Gestalt besitzen, einerlei ob man der dualistischen oder der unitarischen Annahme sich anschliesst; sodass wir also vorläufig keine experimentellen Thatsachen besitzen, mit deren Hülfe man zwischen jenen beiden Vorstellungsweisen zu entscheiden im Stande wäre.

Die Darlegung dieser Untersuchungen ist der Zweck der folgenden Abhandlung.

* * * *

## § 1.

## Präliminarien.

**Die unitarische und dualistische Ansicht.** — Ein linearer Leiter sei von einem elektrischen Strome durchflossen. Wir bezeichnen irgend ein Element des Leiters mit $oDs$ (nämlich mit $o$ den Querschnitt und mit $Ds$ die Länge). Ferner bezeichnen wir die in diesem Element enthaltenen Quantitäten positiver und negativer Elektricität mit

$$(1.)\qquad e = EoDs \qquad \text{und} \qquad -e = -EoDs\,,$$

wo alsdann $E$ die Dichtigkeit vorstellt. Endlich bezeichnen wir die Geschwindigkeiten dieser Quantitäten nach *ein und derselben* Richtung $s$ respective mit:

$$(2.)\qquad s' \qquad \text{und} \qquad S'\,.$$

Setzt man $S' = -s'$, so bewegen sich beide Materien mit gleicher Schnelligkeit in entgegengesetzten Richtungen; dies ist die gewöhnliche *dualistische* Anschauungsweise.

Setzt man hingegen $S' = 0$, so wird die negative Materie als fest verbunden betrachtet mit der ponderablen Masse; diese letztere Vorstellungsweise mag kurzweg die *unitarische* heissen *).

Wir wollen im Folgenden beide Vorstellungen neben einander zu verfolgen suchen, indem wir dabei folgende Annahmen zu Grunde legen:

| *Unitarische Ansicht.* | *Dualistische Ansicht.* |
|---|---|
| *Erste Voraussetzung.* — Bei einem elektrischen Strom ist die negative Elektricität stets in *Ruhe*, nämlich mit der ponderablen Masse des Leiters unlöslich verbunden. | *Erste Voraussetzung.* — Bei einem elektrischen Strom bewegen sich stets *gleiche* Quanta positiver und negativer Elektricität mit *gleicher* Geschwindigkeit in entgegengesetzten Richtungen. |
| *Zweite Voraussetzung.* — Die Dichtigkeit $E$ der strömenden positiven Elektricität ist stets ebensogross wie | *Zweite Voraussetzung.* — Die Dichtigkeit $E$ der strömenden Elektricität ist nicht nur ein und dieselbe |

*) Diese Namen rechtfertigen sich dadurch, dass bei der einen Anschauungsweise *beide* Elektricitäten beweglich sind, bei der andern hingegen nur *eine*. Wir haben also in einem Falle *zwei Fluida*, im andern nur *ein Fluidum*.

diejenige der ruhenden negativen. Es ist mithin dieses $E$ eine der Substanz des Leiters eigenthümliche *Constante*.

*Dritte Voraussetzung.* — Wirken auf die in einem Leiterelement enthaltenen Elektricitätsmengen $e$ und $-e$ in gegebener Richtung zwei Kräfte ein:

$$R_e \quad \text{und} \quad R_{-e},$$

so ist die ponderomotorische Wirkung dieser Kräfte:

$$(3.) \qquad = R_e + R_{-e},$$

und andrerseits ihre elektromotorische Wirkung

$$(4.) \qquad = \frac{R_e}{e}.$$

*Bemerkung.* — Man kann dieser letzten Voraussetzung einen theoretischen Unterbau dadurch geben, dass man annimmt, das positiv elektrische Fluidum sei im Innern der ponderablen Masse mit einer gewissen Reibung beweglich, deren Stärke proportional ist der relativen Geschwindigkeit, und ferner annimmt, die Trägheit der elektrischen Materie sei gegenüber der Trägheit der ponderablen Masse eine verschwindend kleine. Vergl. meinen Aufsatz in den Abh. d. Kgl. Ges. d. Wiss. 1874. Seite 151—188.

für beide Elektricitäten, sondern auch ein und dieselbe an allen Stellen des Conductors und zu allen Zeiten, — mithin eine der Substanz des Leiters eigenthümliche *Constante*.

*Dritte Voraussetzung.* — Wirken auf die in einem Leiterelement enthaltenen Elektricitätsmengen $e$ und $-e$ in gegebener Richtung zwei Kräfte ein:

$$R_e \quad \text{und} \quad R_{-e},$$

so ist die ponderomotorische Wirkung dieser Kräfte:

$$= R_e + R_{-e},$$

und andrerseits ihre elektromotorische Wirkung

$$= \frac{R_e - R_{-e}}{2e}.$$

*Bemerkung.* — Dies sind die bekannten Voraussetzungen, wie sie bei den hier betrachteten gleichförmigen und linearen Strömen z. B. auch von *Weber* gemacht sind.

**Die Stromstärke.** — Verstehen wir unter der Stromstärke die Summe *aller* elektrischen Theilchen, welche *in der gegebenen Richtung* $s$ während der Zeiteinheit durch den Querschnitt gehen, so ist:

$$(5.) \qquad J = Eos',$$

also weil $E$, $o$ Constante sind:

$$(6.) \qquad J' = Eos'';$$

hieraus folgt mit Rücksicht auf (1.)

$$J = 2Eos',$$

also weil $E$, $o$ Constante sind:

$$J' = 2Eos'';$$

hieraus folgt mit Rücksicht auf (1.):

$$(7.)\qquad \frac{J}{e} = \frac{s'}{Ds}, \qquad \frac{J'}{e} = \frac{s''}{Ds},$$

oder was dasselbe ist:

$$(8.)\qquad JDs = es', \qquad J'Ds = es''.$$

$$\frac{J}{e} = \frac{2s'}{Ds}, \qquad \frac{J'}{e} = \frac{2s''}{Ds},$$

oder was dasselbe ist:

$$JDs = 2es', \qquad J'Ds = 2es''.$$

Ueberall sollen hier die Accente Differentiationen nach der Zeit andeuten.

**Collectivformeln.** — Wir können die vorstehenden Formeln auf gemeinschaftliche Gestalt bringen unter Einführung einer Zahl $n$, welche $= 1$ oder $= 2$ ist, jenachdem die unitarische oder dualistische Ansicht gelten soll. Bei Anwendung einer solchen Zahl $n$ ergiebt sich zunächst aus den bei (1.), (2.) gemachten Bemerkungen:

$$(9.a)\qquad e = EoDs, \qquad S' = (1-n)s';$$

woraus folgt:

$$(9.b)\qquad s' - S' = ns', \qquad s' + S' = (2-n)s';$$

ferner folgt aus (5.), (6.) und (8.):

$$(9.c)\qquad J = nEos', \qquad J' = nEos'',$$

und:

$$(9.d)\qquad JDs = nes', \qquad J'Ds = nes''.$$

Endlich folgt aus (3.), (4.):

$$(10.)\qquad R = R_e + R_{-e}, \qquad \mathfrak{R} = \frac{R_e - (n-1)R_{-e}}{ne},$$

falls man nämlich unter $R$ die ponderomotorische, unter $\mathfrak{R}$ die elektromotorische Einwirkung versteht.

## § 2.

## Die Elementargesetze.

Es seien zwei Stromelemente $Ds$ und $D\sigma$ gegeben. Führen wir bei $D\sigma$ analoge Bezeichnungen ein wie bei $Ds$, so ist nach (9.a, b, c, d):

(11.a) $$e = EoDs, \qquad \eta = H\omega D\sigma,$$

(11.b) $$\begin{cases} s' - S' = ns', \\ s' + S' = (2-n)s', \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma' - \Sigma' = n\sigma', \\ \sigma' + \Sigma' = (2-n)\sigma', \end{cases}$$

(11.c) $$\begin{cases} J = nEos', \\ J' = nEos'', \end{cases} \qquad \begin{cases} I = nH\omega\sigma', \\ I' = nH\omega\sigma'', \end{cases}$$

(11.d) $$\begin{cases} JDs = nes', \\ J'Ds = nes'', \end{cases} \qquad \begin{cases} ID\sigma = n\eta\sigma', \\ I'D\sigma = n\eta\sigma''. \end{cases}$$

Um die ponderomotorische und elektromotorische Wirkung des Elementes $D\sigma$ auf das Element $Ds$ zu bestimmen, haben wir zunächst die Kräfte

$$R_e^\eta, \qquad R_e^{-\eta}, \qquad R_{-e}^\eta, \qquad R_{-e}^{-\eta}$$

zu berechnen, mit welchen die in $D\sigma$ enthaltenen Massen $+\eta$, $-\eta$ auf die in $Ds$ enthaltenen $+e$, $-e$ einwirken. Nun ist nach dem *Weber*'schen Gesetz:

(12.) $$R_e^\eta = e\eta\left[-\frac{d\varphi}{dr} + 4A^2\frac{d\psi}{dr}\frac{d^2\psi}{dt^2}\right],$$

wo $\varphi = \frac{1}{r}$ und $\psi = \sqrt{r}$ ist, und $r$ selber die gegenseitige Entfernung von $e$, $\eta$ oder (was dasselbe) von $Ds$, $D\sigma$ vorstellt. Ausserdem bezeichnet $t$ die Zeit; und endlich ist $A^2 = \frac{2}{c^2}$, wo $c$ die *Weber*'sche Constante.

Um möglichst allgemein zu verfahren, wollen wir annehmen, dass die beiden Strombahnen (Metalldrähte) in beliebigen Bewegungen begriffen sind. Die relative Lage der beiden Strombahnen zu einander wird alsdann von Augenblick zu Augenblick eine andere werden; sie wird als abhängig angesehen werden können von einem einzigen Parameter, der seinerseits eine Function der Zeit ist.

Demgemäss wird die gegenseitige Entfernung $r$ der beiden Massen $e$, $\eta$ aus *dreifachem* Grunde sich ändern, einmal, weil die Masse $e$ mit einer gewissen Geschwindigkeit in ihrer Strombahn entlang geht,

zweitens, weil Analoges von $\eta$ gilt, und drittens, weil die relative Lage der beiden Strombahnen von Augenblick zu Augenblick sich ändert. Es wird daher:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial r}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\partial r}{\partial p}\frac{dp}{dt},$$

und desgleichen:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial s}\frac{ds}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\partial \psi}{\partial p}\frac{dp}{dt},$$

oder kürzer geschrieben:

$$(13.)\qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial s}s' + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}\sigma' + \frac{\partial \psi}{\partial p}p'.$$

Ebenso ergiebt sich:

$$(14.)\qquad \begin{aligned}\frac{d^2\psi}{dt^2} &= \frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}s'^2 + \frac{\partial^2\psi}{\partial \sigma^2}\sigma'^2 + \frac{\partial^2\psi}{\partial p^2}p'^2 \\ &+ 2\frac{\partial^2\psi}{\partial s\,\partial \sigma}s'\sigma' + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial s\,\partial p}s'p' + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial \sigma\,\partial p}\sigma'p' \\ &+ \frac{\partial \psi}{\partial s}s'' + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}\sigma'' + \frac{\partial \psi}{\partial p}p''\end{aligned}$$

wo überall die Accente Differentiationen nach der Zeit andeuten.

Durch Substitution des Ausdruckes (14.) in (12.) folgt:

$$(15.)\quad R_e^\eta = +e\eta\left[-\frac{d\varphi}{dr} + 4A^2\frac{d\psi}{dr}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial s^2}s'^2\ldots + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial s\,\partial \sigma}s'\sigma'\ldots + \frac{\partial \psi}{\partial s}s''\ldots\right)\right];$$

und ebenso erhält man:

$$(16.)\quad R_e^{-\eta} = -e\eta\left[-\frac{d\varphi}{dr} + 4A^2\frac{d\psi}{dr}\begin{pmatrix}\text{derselbe Ausdruck wie oben, nur}\\ \text{überall } \Sigma', \Sigma'' \text{ statt } \sigma', \sigma'' \text{ gesetzt}\end{pmatrix}\right].$$

Bezeichnet man die Resultante dieser beiden Kräfte mit $R_e$, so folgt:

$$R_e = R_e^\eta + R_e^{-\eta},$$

oder mit Rücksicht auf (15.), (16.):

$$(17.)\quad R_e = e\eta\,.\,4A^2\frac{d\psi}{dr}\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2\psi}{\partial \sigma^2}(\sigma'^2 - \Sigma'^2) + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial s\,\partial \sigma}s'(\sigma' - \Sigma') \\ &+ 2\frac{\partial^2\psi}{\partial p\,\partial \sigma}p'(\sigma' - \Sigma') + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}(\sigma'' - \Sigma'')\end{aligned}\right\},$$

oder mit Rücksicht auf (11.b):

$$(18.)\quad R_e = e\eta\,.\,4A^2\frac{d\psi}{dr}\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial^2\psi}{\partial \sigma^2}(2-n)n\sigma'^2 + \frac{\partial^2\psi}{\partial s\,\partial \sigma}2ns'\sigma' \\ &+ \frac{\partial^2\psi}{\partial p\,\partial \sigma}2np'\sigma' + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma}n\sigma''\end{aligned}\right\},$$

Dies ist die Wirkung des Massenpaares $\eta$, $-\eta$ auf $e$.

In analoger Weise können wir die Wirkung desselben Massenpaares auf $-e$, d. i. die Kraft

$$R_{-e} = R_{-e}^{\eta} + R_{-e}^{\eta}$$

berechnen. Doch ist eine neue Rechnung offenbar überflüssig. Vielmehr können wir den Werth dieser Kraft unmittelbar niederschreiben nach Analogie der Formel (18.), indem wir die Grössen $e$, $s'$ respective mit $-e$, $S'$, d. i. mit $-e$, $(1-n)s'$ vertauschen [vergl. (9.a)]. Somit folgt:

$$(19.)\quad R_{-e} = -e\eta \cdot 4A^2 \frac{d\psi}{dr} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}(2-n)n\sigma'^2 + \frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial\sigma} 2(1-n)ns'\sigma' \\ + \frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial\sigma} 2np'\sigma' + \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} n\sigma'' \end{array} \right\}.$$

Repräsentiren nun $R$ und $\mathfrak{R}$ die von $D\sigma$ auf $Ds$ ausgeübte ponderomotorische und elektromotorische Wirkung, so ist nach (10.):

$$(20.)\quad \begin{aligned} R &= R_e + R_{-e}, \\ \mathfrak{R} &= \frac{R_e - (n-1)R_{-e}}{ne} = \frac{R}{ne} - \frac{R_{-e}}{e}; \end{aligned}$$

somit folgt aus (18.), (19.):

$$(21.)\quad \begin{aligned} R &= e\eta \cdot 4A^2 \frac{d\psi}{dr} \frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial\sigma} 2n^2 s'\sigma', \\ \mathfrak{R} &= \eta \cdot 4A^2 \frac{d\psi}{dr} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}(2-n)n\sigma'^2 + \frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial\sigma} 2(2-n)ns'\sigma' \\ + \frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial\sigma} 2np'\sigma' + \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} n\sigma'' \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Diese Formeln gewinnen mit Rücksicht auf (11.d) die etwas einfachere Gestalt:

$$(22.)\quad \begin{aligned} R &= JDs \cdot ID\sigma \cdot 8A^2 \frac{d\psi}{dr} \frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial\sigma}, \\ \mathfrak{R} &= 4A^2 \frac{d\psi}{dr} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}(2-n)\sigma' I + \frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial\sigma} 2(2-n)s' I \\ + \frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial\sigma} 2p' I + \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} I' \end{array} \right\} D\sigma. \end{aligned}$$

In der letzten Formel kann man schliesslich statt $\sigma'$, $s'$ die aus (11.c) entspringenden Werthe

$$\sigma' = \frac{I}{nH\omega}, \qquad s' = \frac{J}{nEo}$$

substituiren, und erhält alsdann:

$$(23.)\quad \begin{aligned} R &= 8A^2 \frac{d\psi}{dr} \frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial\sigma} JI Ds D\sigma, \\ \mathfrak{R} &= 4A^2 \frac{d\psi}{dr} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2} \frac{2-n}{n} \frac{I^2}{H\omega} + \frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial\sigma} \frac{2(2-n)}{n} \frac{JI}{Eo} \\ + \frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial\sigma} 2p' I + \frac{\partial\psi}{\partial\sigma} I' \end{array} \right\} D\sigma. \end{aligned}$$

Wir sehen: $R$ ist unabhängig von $n$, $\mathfrak{R}$ aber nicht. Die ponderomotorische Kraft $R$ ist daher ein und dieselbe, einerlei ob man die

unitarische oder dualistische Ansicht zu Grunde legt, während bei der elektromotorischen Kraft $\mathfrak{R}$ ein Unterschied stattfindet.

**Zugrundelegung der dualistischen Ansicht.** — Bei dieser ist $n = 2$. Somit folgt aus (23.):

$$(24.)\qquad \begin{aligned} R &= 8A^2 \frac{d\psi}{dr} \frac{\partial^2 \psi}{\partial s\, \partial \sigma} JI\, Ds\, D\sigma\,, \\ \mathfrak{R} &= 4A^2 \frac{d\psi}{dr} \left( 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial p\, \partial \sigma} p' I + \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} I' \right) D\sigma. \end{aligned}$$

Dies sind die respective von *Ampère* und *Weber* aufgestellten Elementargesetze.

**Zugrundelegung der unitarischen Ansicht.** — Bei dieser ist $n = 1$. Folglich erhält man aus (23):

$$(25.)\qquad \begin{aligned} R &= ((R))\,, \\ \mathfrak{R} &= ((\mathfrak{R})) + 4A^2 \frac{d\psi}{dr} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} \frac{I^2}{H\omega} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial s\, \partial \sigma} \frac{JI}{Eo} \right) D\sigma\,, \end{aligned}$$

wo $((R))$, $((\mathfrak{R}))$ die in (24.) angegebenen Werthe repräsentiren, also diejenigen, welche der dualistischen Ansicht entsprechen.

## § 3.

## Die Wirkung der Gleitstellen.

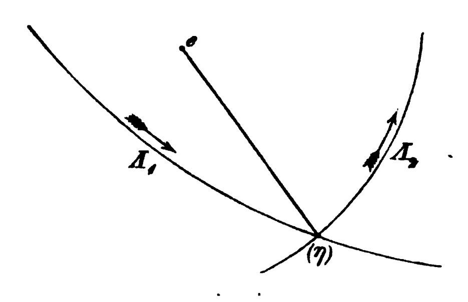
Der Werth eines bestimmten Integrales bleibt bei Fortlassung einer endlichen Anzahl von Gliedern ungeändert, falls nicht etwa diese Glieder von ungewöhnlich hohem Betrage sind. Will man also die Wirkung eines mit Gleitstellen behafteten Stromringes $\sigma$ auf ein einzelnes Elektricitätstheilchen $e$ (das irgendwo im Raume gegeben ist) berechnen, so würde man diejenigen speciellen Kräfte, welche herrühren von den Elementen *in der Nähe der Gleitstellen*, ohne Weiteres fortlassen dürfen, falls sie mit den Kräften der übrigen Elemente von gleicher Ordnung wären. Das aber ist *nicht* der Fall. Vielmehr sind jene speciellen Kräfte von ungewöhnlich hohem Betrag, und erheischen daher Beachtung und besondere Untersuchung.

Diese Untersuchung ist von mir bei Zugrundelegung der *dualistischen* Ansicht bereits früher*) ausgeführt. Ich will die damals erhaltenen Resultate zunächst kurz zusammenstellen, und sodann die

*) Berichte der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. 9. Januar 1875. p. 16.

analoge Untersuchung für die *unitarische* Anschauungsweise folgen lassen.

**Dualistische Ansicht.** — Der Stromring $\sigma$ bestehe aus beliebig vielen linearen Leitern $\Lambda_1$, $\Lambda_2$, $\Lambda_3$, ....., von denen je zwei durch eine *Gleitstelle* zusammenhängen. Wir betrachten die Gleitstelle ($\Lambda_1$, $\Lambda_2$) und bezeichnen mit ($\eta$) alle diejenigen in der Nähe dieser Gleitstelle befindlichen Elektricitätstheilchen, welche während der Zeit $dt$ *plötzliche* Geschwindigkeitsänderungen erleiden. Diese Theilchen ($\eta$) sind es, welche auf das gegebene Elektricitätstheilchen $e$ eine Kraft $R_e^{(\eta)}$ von ungewöhnlich hohem Betrage ausüben.




Sind $\sigma_1$ und $\sigma_2$ die auf $\Lambda_1$ und $\Lambda_2$ gemessenen Bogenlängen, und sind ferner $\Delta\sigma_1$ und $\Delta\sigma_2$ diejenigen Elemente dieser Leiter, welche an der betrachteten Gleitstelle während der Zeit $dt$ in den Ring *neu eintreten* *), so besitzt die Kraft $R_e^{(\eta)}$ den Werth:

$$(26.)\qquad R_e^{(\eta)} = e \,.\, 8A^2 \frac{d\psi}{dr}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_1}\frac{\Delta\sigma_1}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_2}\frac{\Delta\sigma_2}{dt}\right) I.$$

Dabei ist keinerlei Voraussetzung gemacht über den Bewegungszustand **) des Theilchens $e$, jedoch angenommen, dass der im Ringe $\sigma$ fliessende Strom $I$ ein *gleichförmiger* ***) sei.

Mit Hülfe dieser Fundamentalformel (26.) ist es nun leicht, die ponderomotorische und elektromotorische Einwirkung der betrachteten Gleitstelle ($\eta$) auf ein irgendwo im Raume gegebenes *Stromelement Ds* zu bestimmen. Sind $e$ und $-e$ die in $Ds$ enthaltenen Elektricitätsmengen, so ist nach (26):

$$R_e^{(\eta)} = +e\left[8A^2\frac{d\psi}{dr}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_1}\frac{\Delta\sigma_1}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_2}\frac{\Delta\sigma_2}{dt}\right)I\right],$$

$$R_{-e}^{(\eta)} = -e\left[8A^2\frac{d\psi}{dr}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_1}\frac{\Delta\sigma_1}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_2}\frac{\Delta\sigma_2}{dt}\right)I\right].$$

---

*) Dabei sei bemerkt, dass $\Delta\sigma$ nicht blos ein eintretendes, sondern auch ein ausscheidendes Element sein kann. Es repräsentirt nämlich jedes *positive* $\Delta\sigma$ die mit (+1) multiplicirte Länge eines *eintretenden*, und jedes *negative* $\Delta\sigma$ die mit (−1) multiplicirte Länge eines *ausscheidenden* Elementes.

**) l. c. p. 18.

***) Vergl. die Randnote, l. c. p. 1.

Bezeichnen wir nun die ponderomotorische und elektromorische Kraft, welche die Gleitstelle $(\eta)$ auf das Element $Ds$ ausübt, respective mit $R^{(\eta)}$ und $\mathfrak{R}^{(\eta)}$, so ist nach (3.), (4.):

$$R^{(\eta)} = R_e^{(\eta)} + R_{-e}^{(\eta)},$$
$$\mathfrak{R}^{(\eta)} = \frac{R_e^{(\eta)} - R_{-e}^{(\eta)}}{2e}.$$

Somit folgt:

$$(27.)\qquad \begin{aligned} R^{(\eta)} &= 0\,, \\ \mathfrak{R}^{(\eta)} &= +8A^2\frac{d\psi}{dr}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_1}\frac{\varDelta\sigma_1}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_2}\frac{\varDelta\sigma_2}{dt}\right)I. \end{aligned}$$

**Unitarische Ansicht.** — Von dieser Ansicht ausgehend, findet man an Stelle der Formel (26.) eine etwas complicirtere, die so lautet*):

$$(28.)\qquad R_e^{(\eta)} = e\left\{\begin{aligned} &8A^2\frac{d\psi}{dr}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_1}\frac{\varDelta\sigma_1}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_2}\frac{\varDelta\sigma_2}{dt}\right)I \\ &+ 4A^2\frac{d\psi}{dr}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_2}\frac{1}{H_2\omega_2} - \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_1}\frac{1}{H_1\omega_1}\right)I^2 \end{aligned}\right\};$$

hier haben $H$, $\omega$ die früher (11.a, b, c, d) angegebene Bedeutung**), und zwar sollen $H_1$, $\omega_1$ und $H_2$, $\omega_2$ die Werthe dieser Grössen für die Leiter $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ bezeichnen.

Auch bei dieser Formel (28.) ist [ebenso wie bei (26.)] keinerlei Voraussetzung gemacht über den Bewegungszustand des Theilchens $e$, jedoch angenommen, dass der in $\sigma$ fliessende Strom $I$ *gleichförmig* sei.

Bezeichnen wir die Formel (28.) zur augenblicklichen Abkürzung mit

$$R_e^{(\eta)} = ef,$$

so sind

$$R_e^{(\eta)} = +ef,$$
$$R_{-e}^{(\eta)} = -ef$$

diejenigen Kräfte, welche die Gleitstelle $(\eta)$ auf die im Stromelement $Ds$ enthaltenen Elektricitätsmengen $e$ und $-e$ ausübt. Be-

*) Die Herleitung der Formel (28.) hier *in extenso* mittheilen zu wollen, würde viel Raum erfordern, und doch im Ganzen ziemlich überflüssig sein. Denn es ist dieselbe vollkommen analog mit der Herleitung der Formel (26.); und diese letztere findet man in dem mehrfach erwähnten Aufsatz; l. c. p. 16.

**) Es ist nämlich $\omega$ der Querschnitt des linearen Leiters, und $H$ die Dichtigkeit der strömenden Elektricität.

zeichnen wir nun mit $R^{(\eta)}$ und $\mathfrak{R}^{(\eta)}$ die von der Gleitstelle $(\eta)$ auf das Element $Ds$ ausgeübte ponderomotorische und elektromotorische Wirkung, so ist nach (3.), (4.):

$$R^{(\eta)} = R_e^{(\eta)} + R_{-e}^{(\eta)},$$
$$\mathfrak{R}^{(\eta)} = \frac{R_e^{(\eta)}}{e};$$

hieraus folgt durch Substitution der obigen Werthe:

$$R^{(\eta)} = 0,$$
$$\mathfrak{R}^{(\eta)} = f,$$

oder falls wir für $f$ seine eigentliche Bedeutung substituiren:

$$R^{(\eta)} = 0,$$
$$\mathfrak{R}^{(\eta)} = \left\{ \begin{array}{l} 8A^2 \frac{d\psi}{dr}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_1}\frac{\Delta\sigma_1}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_2}\frac{\Delta\sigma_2}{dt}\right) I \\ + 4A^2\frac{d\psi}{dr}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_2}\frac{1}{H_2\omega_2} - \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_1}\frac{1}{H_1\omega_1}\right) I^2 \end{array} \right\}.$$

Die Formeln können wir schliesslich so darstellen:

$$(29.)\qquad \begin{aligned} R^{(\eta)} &= ((R^{(\eta)})), \\ \mathfrak{R}^{(\eta)} &= ((\mathfrak{R}^{(\eta)})) + 4A^2\frac{d\psi}{dr}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_2}\frac{1}{H_2\omega_2} - \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_1}\frac{1}{H_1\omega_1}\right) I^2, \end{aligned}$$

wo alsdann $((R^{(\eta)}))$, $((\mathfrak{R}^{(\eta)}))$ die Ausdrücke (27.), nämlich diejenigen Werthe repräsentiren, welche diese Kräfte besitzen bei Zugrundelegung der dualistischen Ansicht.

## § 4.

## Das ponderomotorische Integralgesetz.

Es seien gegeben zwei in beliebigen Bewegungen begriffene mit Gleitstellen versehene Ringe $s$ und $\sigma$, durchflossen von den gleichförmigen Strömen $J$ und $I$. Denken wir uns die Configuration des ganzen Systemes $s$, $\sigma$ abhängig von einem mit der Zeit sich ändernden Parameter $p$, so wird die ponderomotorische Arbeit $dL$, welche die beiden Ringe während der Zeit $dt$ auf einander ausüben, sich darstellen durch

$$(30.)\qquad dL = (dp) \,.\, \Sigma\Sigma\left(R\frac{\partial r}{\partial p}\right),$$

die Summation ausgedehnt über sämmtliche zwischen den Ringen thätige ponderomotorische Kräfte $R$.

**Dualistische Ansicht.** — Bei Zugrundelegung dieser Ansicht findet man, wie ich früher*) gezeigt habe:

(31.) $$dL = -JIdQ,$$

wo $Q$ das über beide Ringe ausgedehnte Integral bezeichnet:

(32.) $$Q = 4A^2 . \Sigma\Sigma' \left( \frac{\partial \psi}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} Ds D\sigma \right);$$

man nennt dieses $Q$ das Potential der beiden Ringe auf einander, bezogen auf die Stromeinheiten.

**Unitarische Ansicht.** — Bei dieser ist nach (25.), (29.):

$$R = ((R)),$$
$$R^{(\eta)} = ((R^{(\eta)}));$$

d. h. die ponderomotorischen Wirkungen sind genau dieselben wie bei der dualistischen Anschauungsweise. Folglich wird auch das Resultat dasselbe sein; man wird also wiederum erhalten:

(33.) $$dL = -JIdQ.$$

**Zusammenfassung.** — *Mögen wir also die dualistische oder unitarische Ansicht zu Grunde legen, immer wird die ponderomotorische Arbeit, welche zwei in beliebigen Bewegungen begriffene mit Gleitstellen behaftete Stromringe während der Zeit $dt$ auf einander ausüben, den Werth*

(33.) $$-JIdQ$$

*haben, wo $J$, $I$ die Stromstärken sind, und $Q$ das auf die Stromeinheiten bezogene Potential bezeichnet.*

§ 5.

## Das elektromotorische Integralgesetz.

Die elektromotorische Kraft $d\mathfrak{S}$, welche der Ring $\sigma$ während der Zeit $dt$ im Ringe $s$ inducirt, drückt sich aus durch

(35.) $$d\mathfrak{S} = (dt) . \Sigma\Sigma \left( \mathfrak{R} \frac{\partial r}{\partial s} Ds \right),$$

die Summation ausgedehnt über alle elektromotorischen Kräfte $\mathfrak{R}$, welche $\sigma$ auf $s$ ausübt.

*) l. c. p. 21.

**Dualistische Ansicht.** — Bei Zugrundelegung dieser Ansicht findet man, wie ich früher*) gezeigt habe:

$$(36.)\qquad d\mathfrak{S} = +d(IQ),$$

wo $Q$ das Potential (32.) bezeichnet.

**Unitarische Ansicht.** — Bei dieser ist nach (25.), (29.):

$$\mathfrak{R} = ((\mathfrak{R})) + 4A^2\frac{d\psi}{dr}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}\frac{I^2}{H\omega} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial\sigma}\frac{JI}{Eo}\right)D\sigma,$$

$$\mathfrak{R}^{(\eta)} = ((\mathfrak{R}^{(\eta)})) + 4A^2\frac{d\psi}{dr}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_2}\frac{1}{H_2\omega_2} - \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_1}\frac{1}{H_1\omega_1}\right)I^2.$$

Substituirt man diese Werthe in (35.), so folgt:

$$(37.)\qquad d\mathfrak{S} = ((d\mathfrak{S})) + 4A^2(dt)\,.\,\Sigma\Sigma'\frac{\partial\psi}{\partial s}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2}\frac{I^2}{H\omega} + 2\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial\sigma}\frac{JI}{Eo}\right)Ds\,D\sigma$$
$$+ 4A^2(dt)\,.\,\Sigma\Sigma'\frac{\partial\psi}{\partial s}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma_2}\frac{1}{H_2\omega_2} - \frac{\partial\psi}{\partial\sigma_1}\frac{1}{H_1\omega_1}\right)I^2Ds,$$

wo $((d\mathfrak{S}))$ den der dualistischen Ansicht entsprechenden Werth, also den Werth (36.) repräsentirt. Dabei ist zu bemerken, dass die Summation $\Sigma\Sigma'$ in der *oberen* Zeile sich bezieht auf alle Elemente $Ds$, $D\sigma$ der beiden Ringe, während die Summation $\Sigma\Sigma'$ in der *unteren* Zeile einerseits über alle $Ds$, andererseits über sämmtliche Gleitstellen $(A_1, A_2)$ des Ringes $\sigma$ auszudehnen ist.

Nun ist identisch:

$$2\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial^2\psi}{\partial\sigma^2} = 2\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^2 = 2\frac{\partial U}{\partial\sigma} - \frac{\partial V}{\partial s},$$

$$2\frac{\partial\psi}{\partial s}\frac{\partial^2\psi}{\partial s\partial\sigma} = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\partial\psi}{\partial s}\right)^2 = \frac{\partial W}{\partial\sigma},$$

wo $U$, $V$, $W$ zur augenblicklichen Abkürzung dienen sollen. Durch Substitution dieser Werthe nimmt das *obere Integral* in (37.) — das soll heissen das in (37.) in der oberen Zeile stehende Integral — folgende Gestalt an:

$$(\alpha.)\qquad \text{Oberes Integral} = \Sigma\Sigma'\left[\left(\frac{\partial U}{\partial\sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial s}\right)\frac{I^2}{H\omega} + \frac{\partial W}{\partial\sigma}\frac{JI}{Eo}\right]Ds\,D\sigma,$$

oder, was dasselbe ist, folgende:

$$(\beta.)\qquad \text{Oberes Integral} = I^2\Sigma\left(\Sigma'\frac{\partial U}{\partial\sigma}\frac{D\sigma}{H\omega}\right)Ds - \frac{1}{2}I^2\Sigma'\left(\Sigma\frac{\partial V}{\partial s}Ds\right)\frac{D\sigma}{H\omega}$$
$$+ JI\Sigma\left(\Sigma'\frac{\partial W}{\partial\sigma}D\sigma\right)\frac{Ds}{Eo}.$$

Die Integrale $\Sigma\frac{\partial V}{\partial s}Ds$ und $\Sigma'\frac{\partial W}{\partial\sigma}D\sigma$ haben aber offenbar den Werth *Null*. Somit folgt:

*) l. c. p. 26.

($\gamma$.) Oberes Integral $= I^2\Sigma'\left(\Sigma'\frac{\partial U}{\partial\sigma}\frac{D\sigma}{H\omega}\right)Ds$.

Vom Integrale $\Sigma'\frac{\partial U}{\partial\sigma}\frac{D\sigma}{H\omega}$ kann man nicht sagen, dass es Null sei; denn die Constanten $H$, $\omega$ haben im Allgemeinen für die auf einander folgenden Leiter $A_1$, $A_2$, $A_3$, ... verschiedene Werthe. Doch können wir dasselbe unmittelbar ausführen längs jedes *einzelnen* Leiters, und erhalten alsdann durch geeignete Zusammenfassung der so sich ergebenden Resultate:

$$\Sigma'\frac{\partial U}{\partial\sigma}\frac{D\sigma}{H\omega} = \Sigma'\left(\frac{U_1}{H_1\omega_1} - \frac{U_2}{H_2\omega_2}\right).$$

Hier bezieht sich der rechts unter dem Summenzeichen stehende Ausdruck auf die Gleitstelle $(A_1, A_2)$, und jenes Summenzeichen deutet an, dass analoge Ausdrücke für alle übrigen Gleitpunkte zu bilden, und alle diese Ausdrücke zu summiren sind. Substituiren wir für $U$ seine eigentliche Bedeutung, so gewinnt die letzte Formel folgendes Aussehen:

$$\Sigma'\frac{\partial U}{\partial\sigma}\frac{D\sigma}{H\omega} = \Sigma'\frac{\partial\varphi}{\partial s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_1}\frac{1}{H_1\omega_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_2}\frac{1}{H_2\omega_2}\right);$$

und hierdurch geht ($\gamma$.) über in:

($\delta$.) Oberes Integral $= I^2.\Sigma'\Sigma'\frac{\partial\varphi}{\partial s}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_1}\frac{1}{H_1\omega_1} - \frac{\partial\varphi}{\partial\sigma_2}\frac{1}{H_2\omega_2}\right)Ds$.

Substituiren wir endlich diesen Werth des *oberen* Integrales in (37.), so tritt vollständige Zerstörung ein zwischen diesem und dem *unteren* Integral; so dass wir erhalten:

(38.) $$d\mathfrak{S} = ((d\mathfrak{S})).$$

Diese Formel sagt aus, dass $d\mathfrak{S}$ denselben Werth hat wie bei der dualistischen Anschauungsweise.

**Zusammenfassung.** — *Mögen wir also die dualistische oder die unitarische Ansicht zu Grunde legen, immer wird die vom Ringe σ im Ringe s während der Zeit dt inducirte elektromotorische Kraft den Werth*

(39.) $$d(IQ)$$

*besitzen, wo I die Stromstärke des Inducenten und Q das auf die Stromeinheiten bezogene Potential bezeichnet.*

* * * *

Die Hauptresultate der angestellten Untersuchung sind zusammengefasst in den Sätzen (33.) und (39.). Die elektro*dynamischen* Erscheinungen sind also (wenigstens so weit sie die gleichförmigen linearen Ströme betreffen) zur Entscheidung zwischen der dualistischen und unitarischen Anschauungsweise unzureichend. Es würde noch übrig bleiben, zu untersuchen, ob eine solche Entscheidung vielleicht durch elektro*statische* Erscheinungen, z. B. durch die in einem ungeschlossenen Leiter durch einen elektrischen Strom inducirte Vertheilung herbeigeführt werden kann. Dass hier ein Unterschied sich bemerkbar mache, dürfte bei der sehr verschiedenen Form der betreffenden Elementargesetze [vgl. (24.), (25.)] in der That zu erwarten sein.

---

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

# ELEKTRODYNAMISCHE

# MAASSBESTIMMUNGEN

INSBESONDERE ÜBER DIE

# ENERGIE DER WECHSELWIRKUNG

VON

WILHELM WEBER,
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.

---

Des XI. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

N⁰ VIII.

MIT EINER TAFEL.

---

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1878.

Vom Verfasser übergeben den 10. März 1878.
Der Abdruck vollendet den 10. April 1878.

# Inhalt.

# ELEKTRODYNAMISCHE

# MAASSBESTIMMUNGEN

INSBESONDERE ÜBER DIE

# ENERGIE DER WECHSELWIRKUNG

VON

WILHELM WEBER.

Von dem im Jahre 1846 in den Elektrodynamischen Maassbestimmungen aufgestellten allgemeinen Grundgesetze der elektrischen Wirkung*), zu welchem in Poggendorff's Annalen 1848, Bd. 73, S. 229, noch das daraus abgeleitete Potential der elektrischen Kraft gefügt worden war, hatte Helmholtz behauptet, und William Thomson, Tait und Andere hatten ihm beigestimmt, dass es in Widerspruch mit dem Princip der Erhaltung der Energie stände; C. Neumann und Maxwell haben jedoch das Gegentheil dargethan, indem sie den von Helmholtz durch Aufstellung des Satzes, das Princip der Erhaltung der Energie gelte nur für Kräfte, die von der Entfernung allein abhängig seien, begangenen Irrthum nachwiesen**).

Helmholtz hat darauf ein vollkommen neues Princip der Energie aufgestellt, dessen Unterschied vom gewöhnlichen Princip der Energie von Neumann mit folgenden Worten näher bestimmt worden ist: »Während das gewöhnliche Princip der Energie für jedes materielle System die Existenz einer Energiefunction, d. i. die Existenz einer vom augenblicklichen Zustande des Systems abhängenden Function, verlangt, welche die Eigenschaft hat, in jedem Zeitraum um eben so viel anzuwachsen, als die dem System während dieses Zeitraums zugeführte Arbeit beträgt, — verlangt das neue von Helmholtz aufgestellte Princip nicht allein die Existenz einer solchen Function, sondern zugleich eine gewisse specielle Beschaffenheit

*) Siehe Abhandlungen bei Begründung der K. Sächs. Gesellsch. der Wiss. Leipzig 1846.

**) Siehe auch Ad. Mayer: »Ueber den allgemeinsten Ausdruck der innern Potentialkräfte eines Systems bewegter materieller Punkte, welches sich aus dem Princip der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ergiebt«. Mathem. Annalen, Bd. 13. S. 20.

derselben. indem es behauptet, der »kinetische Theil dieser Function (derjenige Theil derselben, welcher von der Geschwindigkeit abhängt) müsse stets positiv sein«.

Hiezu bemerkt Neumann noch: »Es unterliegt keinem Zweifel, dass die physikalischen Principien ihrer Natur nach dehnbar und biegsam sind. Das Princip der lebendigen Kraft hat sich allmählig zum Princip der Energie ausgedehnt, und ist möglicher Weise einer noch weiteren Ausdehnung fähig«.

Wirklich liegt es ganz im Wesen und Gange experimenteller Forschung, sich eines solchen Princips als Leitfadens auch dann schon zu bedienen, wenn die definitive Formulirung noch fehlt und erst später aus den Resultaten der Forschung gewonnen werden kann; da aber einleuchtet, dass das Princip, um als Leitfaden der Forschung zu dienen, doch formulirt werden müsse, was also nur versuchsweise geschehen könne; so ergiebt sich als selbstverständlich, dass ein solches Princip während dieser Forschung wirklich dehnbar und biegsam sei.

Wenn Helmholtz hienach berechtigt war, das Princip der Energie versuchsweise in der Art zu formuliren, dass mein von ihm verworfenes Grundgesetz damit in Widerspruch geriethe; so ist offenbar das Gegentheil ebenso berechtigt, nämlich dasselbe Princip versuchsweise so zu formuliren, dass es nicht allein in Uebereinstimmung mit jenem Grundgesetze stehe, sondern dass letzteres sogar als nothwendige Folge desselben sich ergebe, indem bewiesen werde, dass alle elektrodynamischen Gesetze, zu denen jenes Grundgesetz gehört, mittelst des versuchsweise aufgestellten Princips aus den elektrostatischen Gesetzen abgeleitet werden können. Dies zu versuchen ist der Zweck der vorliegenden Abhandlung, wodurch statt des in der ersten Abhandlung aufgestellten allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung, welches Elektrostatik und Elektrodynamik zugleich umfasste, das Princip der Erhaltung der Energie an die Spitze gestellt wird, woraus dann in Verbindung mit dem statischen Grundgesetze der Wechselwirkung zweier Theilchen erstens jenes Grundgesetz der elektrischen Wirkung, zweitens die Existenz einer Energiefunction für jedes Theilchenpaar, aus der die Geltung des gewöhnlichen Princips der Energie folgt, wie es von Neumann ausgesprochen worden ist, deducirt werden soll.

1.

## Leitfaden der experimentellen Forschung in der Elektrodynamik.

Nach der durch die allgemeinen Bewegungsgesetze der Körper gewonnenen Grundlage blieben in der Physik wesentlich nur die Gesetze der Wechselwirkungen der Körper zu erforschen übrig; denn ohne Wechselwirkungen würden alle Körper im Zustande der Ruhe oder Bewegung, in dem sie sich befinden, immer verharren. Alle Veränderungen dieser Zustände und alle davon abhängigen Erscheinungen sind daher Folgen ihrer Wechselwirkungen.

Solche Wechselwirkungen üben nun aber die Körper sowohl in Berührung mit einander, als auch aus der Ferne aus, und es ergab sich leicht, dass mit der Erforschung der letztern begonnen werden müsse, um einen Leitfaden zur Erforschung der erstern zu gewinnen, welcher besonders nöthig wird, wenn die räumlichen Verhältnisse der Körper sich der directen Beobachtung entziehen, wie es bei den Wechselwirkungen sich berührender Körper der Fall ist. Auch ist dies wirklich geschehen, indem mit der Erforschung der Wechselwirkungen der Weltkörper, d. i. mit den Gravitationswirkungen begonnen wurde.

An dieses erste Gebiet erfolgreicher Erforschung der Wechselwirkungen der Körper, nämlich der Gravitationswirkungen, hat sich sodann zunächst die Erforschung der elektrischen und magnetischen Wechselwirkungen angeschlossen, weil ausser den Gravitationswirkungen diese Wirkungen die einzigen waren, welche von einem Körper auf den andern aus messbarer Entfernung ausgeübt wurden und selbst durch Messung bestimmbar waren.

Lange Zeit hat nun fast allen theoretischen Untersuchungen über Elektricität und Magnetismus, insbesondere denen von Coulomb und Poisson, die Newton'sche Gravitationslehre als Leitfaden zu Grunde gelegen, bis endlich in Folge von Oersted's und Ampère's Entdeckungen in der Aequivalenz geschlossener Ströme und Magnete ein ganz neuer Leitfaden gewonnen wurde, welcher erstens auf die Zurückführung aller magnetischen Wirkungen auf elektrische Stromwirkungen leitete, und zweitens zur Aufstellung eines Grundgesetzes der Wechselwirkung je zweier Stromelemente führte.

Als ein dritter Leitfaden hat sodann die allgemeine Idee von der Zurückführung der Wechselwirkungen aller Körper untereinander auf blosse Wechselwirkungen je zweier gedient, wonach also auch die Wechselwirkungen von Stromelementen auf blosse Wechselwirkungen je zweier elektrischen Theilchen zurückführbar sein sollten. Diese Idee konnte im Allgemeinen, ganz abgesehen davon, dass das Gegentheil (nämlich Wechselwirkungen dreier oder mehrerer Körper, die nicht auf Wechselwirkungen je zweier zurückführbar wären) zu unendlichen Verwickelungen führen würde, erfahrungsmässig schon in weitem Kreise als fest begründet und bestätigt angesehen werden.

Die bei Wechselwirkung zweier Stromelemente wesentlich in Betracht kommenden Körpertheilchen waren nun ein positiv und ein negativ elektrisches Theilchen in jedem Stromelemente, zwischen denen 4 von einander unabhängige Wechselwirkungen je zweier Theilchen unterschieden werden konnten. Zur Bestimmung dieser 4 Wechselwirkungen bot sich das Coulomb-Poisson'sche (dem Gravitationsgesetze nachgebildete) Grundgesetz dar, welches sich im ganzen Gebiete der Elektrostatik bewährt hatte; die hienach bestimmten 4 Wechselwirkungen ergeben aber keine Gesammtwirkung, sondern alle einzelnen Wirkungen heben einander vollkommen auf, wonach also das Ampère-sche Grundgesetz der Fernwirkungen elektrischer Stromelemente nicht zurückführbar war auf das Coulomb-Poisson'sche Grundgesetz der Wechselwirkung je zweier elektrischen Theilchen.

Das Coulomb-Poisson'sche Grundgesetz der Wechselwirkung je zweier elektrischen Theilchen war aber nur für je zwei in relativer Ruhe befindliche Theilchen aufgestellt worden, oder konnte wenigstens nur für solche Theilchen als erfahrungsmässig begründet gelten. Die 4 elektrischen Theilchen in zwei Stromelementen bilden dagegen 4 Paare von Theilchen, die nicht in relativer Ruhe, sondern in relativer Bewegung sich befinden, und es lag daher die Vermuthung sehr nahe, dass das Coulomb-Poisson'sche Grundgesetz der Wechselwirkung je zweier elektrischen Theilchen, wenn diese Theilchen in relativer Bewegung sich befinden, noch einer Correction bedürfe, welche mit $x$ bezeichnet werden möge. Unterscheidet man dann die Correctionen der obigen 4 Wechselwirkungen von einander der Reihe nach mit $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$; so müsste die Summe derselben

von Null-verschieden und der durch Ampère's Gesetz bestimmten Kraft gleich sein.

Auf diese Weise wurde nun gefunden, dass, — wenn man zwei beliebige elektrische Theilchen nach absolutem Maasse mit $e$, $e'$ und ihre relative Entfernung, Geschwindigkeit und Beschleunigung mit $r$, $\frac{dr}{dt}$ und $\frac{ddr}{dt^2}$ bezeichnet, und diese Werthe für die 4 in zwei Stromelementen betrachteten Paare durch die Indices 1, 2, 3, 4 unterscheidet, — die durch das Ampère'sche Gesetz bestimmte Abstossungskraft zweier Stromelemente, nämlich

$$\frac{\alpha\alpha' ii'}{rr}(3\cos\theta\cos\theta' - 2\cos\varepsilon),$$

(wo $\alpha, \alpha'$ die Längen, $i, i'$ die Stromintensitäten der beiden Stromelemente, $r$ ihre Entfernung von einander, $\theta, \theta'$ die Winkel, welche $\alpha$ und $\alpha'$ mit $r$ bilden, und $\varepsilon$ den Winkel bezeichnet, den $\alpha$ und $\alpha'$ mit einander bilden), durch die Summe

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

wirklich dargestellt werde, wenn

$$x = \frac{1}{cc} \cdot \frac{ee'}{rr}\left(2r\frac{ddr}{dt^2} - \frac{dr^2}{dt^2}\right)$$

gesetzt wird, worin $c$ eine bestimmte Constante bezeichnet, nämlich diejenige relative Geschwindigkeit zweier elektrischen Theilchen, bei welcher, während sie unverändert bleibt, keine Wechselwirkung stattfindet.

Um dies zu beweisen ist nur erforderlich, die auf die Stromelemente sich beziehenden Grössen $\alpha, \alpha', i, i'$ und die Winkel $\theta, \theta'$ und $\varepsilon$ durch die Grössenwerthe von $e, e', r, \frac{dr}{dt}, \frac{ddr}{dt^2}$, bezogen auf die 4 einzelnen Theilchenpaare, auszudrücken.

Diese Correction ist also der durch das Coulomb-Poisson-sche Grundgesetz bestimmten Abstossungskraft noch hinzuzufügen, wenn es für elektrische Theilchenpaare nicht blos in relativer Ruhe, sondern auch bei solchen Bewegungen gelten soll, die in Stromelementen stattfinden, für welche das Ampère'sche Gesetz gilt.

Es leuchtet aber ein, dass jene 4 elektrischen Theilchen auch noch in mannichfaltige andere relative Bewegungen gebracht werden können, als diejenigen, welche in zwei Stromelementen, für welche das Ampère'sche Gesetz gilt, stattfinden. Es lassen sich nämlich leicht Einrichtungen treffen, wonach die beiden in einem Strom-

elemente befindlichen Theilchen positiver und negativer Elektricität, statt sich mit gleicher und constanter Geschwindigkeit in entgegengesetzten Richtungen zu bewegen (wie Ampère voraussetzt), sich entweder mit gleicher aber veränderlicher Geschwindigkeit in entgegengesetzten Richtungen, oder mit ungleicher Geschwindigkeit in Richtungen bewegen, die einen beliebigen Winkel mit einander bilden. Alle diese verschiedenen Fälle lassen sich leicht darstellen, theils indem man den im einen Leiter vorhandenen Strom, durch Oeffnen und Schliessen der Stromkette, bald verschwinden bald wieder entstehen lässt, theils indem man den im Leiter entgegengesetzt strömenden Elektricitäten noch eine gemeinsame Bewegung mit ihrem Leiter ertheilt.

Gilt nun das corrigirte Coulomb-Poisson'sche Gesetz wirklich allgemein von zwei elektrischen Theilchen nicht blos in relativer Ruhe, oder wenn sie constanten Strömen in ruhenden Leitern angehören, sondern auch bei allen ihren andern Bewegungen; so muss daraus die Wirkung von Stromelementen, wie von einzelnen Theilchen, auch in den soeben angeführten, wie überhaupt in allen Fällen, wo das Ampère'sche Gesetz nicht gilt (die lange Zeit unbeachtet und unbeobachtet geblieben waren) vorausgesagt und vorausbestimmt werden können, was zur Prüfung und Bestätigung der allgemeinen Gültigkeit jenes Gesetzes dient. Es sind auf diese Weise wirklich alle Gesetze der Voltainduction, in vollkommener Uebereinstimmung mit den von Faraday entdeckten Erscheinungen, gefunden und durch die mannichfaltigsten Beobachtungen und Messungen allseitig bestätigt worden.

An dieses allgemeine Grundgesetz der Wechselwirkung zweier elektrischen Theilchen lassen sich nun noch weitere Betrachtungen über das Wesen der Wechselwirkung knüpfen.

Bei allen Veränderungen in der Körperwelt bleiben die Massen der Körper immer unverändert, und auch die lebendigen Kräfte der Körper würden, wenn keine Wechselwirkung stattfände, dem Trägheitsgesetze gemäss, unverändert bleiben. Wechselwirkungen ergeben sich demnach als Grund aller Veränderungen lebendiger Kräfte, und es liegt daher die Frage sehr nahe, ob nicht ebenso umgekehrt der Grund aller Veränderungen der Wechselwirkungen in den lebendigen Kräften zu suchen sei, sodass Verstärkung der Wechselwirkung

nur gewonnen werde, wenn lebendige Kraft verloren geht, und dass umgekehrt lebendige Kraft nur gewonnen werde, wenn die Wechselwirkung eine Verminderung erleidet. Wechselwirkung der Körper wäre dann das Aequivalent für die verloren gegangene lebendige Kraft, und lebendige Kraft das Aequivalent für verloren gegangene Wechselwirkung, wodurch die Grössenwerthe der Wechselwirkungen und lebendigen Kräfte in bestimmte Abhängigkeit von einander gebracht würden.

Das oben angeführte allgemeine Grundgesetz der elektrischen Wirkung entspricht dieser Vorstellung dadurch, dass von ihm die Abhängigkeit der aus der Wechselwirkung resultirenden Kraft von der lebendigen Kraft der Körper festgestellt wird, im Gegensatz zum Coulomb-Poisson'schen Gesetze, nach welchem eine solche Abhängigkeit nicht stattfindet.

Wird nun die Grösse der Wechselwirkung zweier Theilchen ihre Wechselwirkungsenergie, und ebenso die Grösse der relativen lebendigen Kraft zweier Theilchen ihre Bewegungsenergie genannt; so liegt die Vermuthung sehr nahe, dass bei Zunahme der einen Energie und gleichzeitiger Abnahme der andern, der Gewinn an einer Energie auch quantitativ einen Ersatz für den Verlust an der andern Energie gewähre, was die Homogeneität beider Energiegrössen voraussetzt, und so viel heisst, als dass ihre Summe constant sei. Bezeichnet man also mit $Q$ die relative lebendige Kraft zweier Theilchen, und mit $P$ die Energie ihrer Wechselwirkung; so würde hiernach

$$P + Q = a$$

zu setzen sein, wo $a$ eine jedem Theilchenpaare zukommende Constante wäre, ebenso wie die Masse eine jedem einzelnen Theilchen zukommende Constante ist.

Es würde dadurch bestimmt werden, was in der Wechselwirkung zweier Theilchen durch gegenseitige Bewegung geändert wird, wodurch ein Fundament für Ableitung der dynamischen aus den statischen Gesetzen gewonnen würde.

Die constante Energiesumme $a$ wäre zugleich der Grenzwerth, welcher von der Energie $P$ nicht überschritten werden könnte, weil nämlich die Energie $Q$ (d. i. die lebendige Kraft der Theilchen) keinen kleineren Werth als Null haben kann.

Die hier ausgesprochene Vermuthung hat nun mancherlei Modificationen erlitten, und hat demgemäss verschiedenen Ausdruck in den versuchsweise gegebenen Aussprüchen von dem Princip der Erhaltung der Energie gefunden, welches der Leitfaden vieler Forschungen in neuester Zeit, vorzüglich im Gebiete der Wärmelehre und Elektricitätslehre, geworden ist*). Bei der Wichtigkeit und

---

*) Die Bezeichnung der Summe der lebendigen Kraft und Wärme eines Körpersystems nebst der durch sein Potential bestimmten Arbeit mit dem Namen seiner mechanischen Energie, oder kurz seiner Energie, rührt von Thomas Young und W. Thomson her, und ist sodann von Clausius als sehr zweckmässig gewählt anerkannt und angenommen worden.

Thomas Young, Lectures on Natural Philosophy, London 1807, Lecture VIII, sagt Seite 78: The term energy may be applied, with great propriety, to the product of the mass or weight of a body, into the square of the number expressing its velocity. — Young bezeichnet hiernach blos die lebendige Kraft eines Körpers (eigentlich ihren doppelten Werth) mit dem Namen energy, jedoch ohne ausdrücklich hinzuzufügen, dass der Körper nur diese und keine andere Energie besitze. Vielmehr da er auf der folgenden Seite für die lebendige Kraft eines Körpers die vollständigere Bezeichnung energy of its motion gebraucht, so scheint dadurch angedeutet zu sein, dass einem Körper, abgesehen von seiner Bewegung, noch eine andere Energie zukommen könne.

W. Thomson im Phil. Magazin and Journal of Science, IV. Series 9. London 1855 pag. 523, sagt: A body which is either emitting heat, or altering his dimensions against resisting forces, is doing work upon matter external to it. The mechanical effect of this work in one case is the excitation of thermal motions, and in the other the overcoming of resistances. The body must itself be altering in its circumstances, so as to contain a less store of work within it by an amount precisely equal to the aggregate value of the mechanical effects produced; and conversely the aggregate value of the mechanical effects produced must depend solely on the initial and final states of the body, and is therefore the same whatever be the intermediate states through which the body passes, provided the initial and final states be the same. — The total mechanical energy of a body might be defined as the mechanical value of all the effect it would produce in heat emitted and in resistances overcome, if it were cooled to the utmost, and allowed to contract indefinitely or to expand indefinitely, according as the forces between its particles are attractive or repulsive, when the thermal motions within it are all stopped.

Es ist hierin von W. Thomson mit dem Namen der Energie zugleich auch das Princip der Erhaltung der Energie ausgesprochen worden; denn was ein Körpersystem an seinem Vorrath an Energie verliert, gewinnt ein anderes Körpersystem, hieraus folgt offenbar die Erhaltung der Energie in allen Körpersystemen zusammengenommen. — Dasselbe Princip ist im Wesentlichen, nur unter anderem Namen, schon früher ausgesprochen worden, namentlich von Helmholtz unter dem Namen des Princips der Erhaltung der Kraft.

Bedeutung, die dieser neue Leitfaden gewonnen, verdienen einige Verschiedenheiten der Ansichten und Meinungen, die dabei hervorgetreten sind, besondere Beachtung.

Der oben versuchsweise gegebene Ausspruch vom Princip der Erhaltung der Energie ist nämlich wesentlich verschieden, und könnte leicht im Widerspruch zu stehen scheinen (was näher betrachtet nicht der Fall ist) mit dem Ausspruch des »gewöhnlichen Princips der Energie«, von welchem C. Neumann im XI. Bande der Mathematischen Annalen S. 320 sagt: »Dieses Princip verlangt, dass für jedes materielle System eine Energiefunction existire, d. i. eine vom augenblicklichen Zustande des Systems abhängende Function, welche die Eigenschaft hat, in jedem Zeitraum um ebensoviel anzuwachsen, als die dem Systeme während dieses Zeitraums von Aussen zugeführte Arbeit beträgt. Zugleich erkennen wir, dass diese Energiefunction (welche man kurzweg die Energie des Systems zu nennen pflegt) bei Zugrundelegung des Weber'schen Gesetzes [womit Neumann das oben angeführte corrigirte Coulomb-Poisson'sche Gesetz bezeichnet] durch die Summe von lebendiger Kraft und Potential dargestellt ist ..... Helmholtz indessen nimmt dieser Frage gegenüber eine etwas andere Stellung ein ..... nämlich in dem Aufsatze (Monatsber. d. Berl. Akad. 18. April 1872) heisst es:

»Man hat sich bei den Untersuchungen darüber, ob das Gesetz der Erhaltung der Energie für gewisse Naturprocesse gültig sei oder nicht, meist damit begnügt, zu untersuchen, ob, wenn ich das analytische Resultat praktisch ausdrücken darf, ein immer wiederholter Cirkelprocess in das Unendliche Arbeit erzeugen oder zerstören kann. — In diesem Sinne nun verletzt die Weber'sche Annahme das Gesetz der Erhaltung der Energie nicht; aber sie thut es in einem andern Sinne — — —«

»Der nun folgende Einwand«, fährt Neumann weiter fort, »betrifft indessen nicht mehr das gewöhnliche Princip der Energie, sondern ein vollkommen neues, hier zum ersten Mal ausgesprochenes Princip. Während nämlich das gewöhnliche Princip der Energie für jedes materielle System die Existenz einer Energiefunction, d. i. die Existenz einer Function verlangt, welche die Eigenschaft hat, in jedem Zeitraum um ebensoviel anzuwachsen, als die dem System während dieses Zeitraums zugeführte Arbeit beträgt, — verlangt jenes neue Princip nicht allein

die Existenz einer solchen Function, sondern zugleich eine gewisse specielle Beschaffenheit derselben, indem es behauptet, der kinetische Theil dieser Function (derjenige Theil derselben, welcher von der Geschwindigkeit abhängt) müsse stets positiv sein.«

Neumann fügt in einer Note noch folgende, bereits oben citirte Bemerkung hinzu: »Es unterliegt keinem Zweifel, dass die physikalischen Principien einer festen Formulirung unfähig, mithin ihrer Natur nach dehnbar und biegsam sind. Das Princip der lebendigen Kraft hat sich allmählig zum Princip der Energie ausgedehnt, und ist möglicher Weise einer noch weiteren Ausdehnung fähig. — Demgemäss ist es a priori keineswegs unmöglich, dass dieses Princip der Energie sich allmählig zu jenem neuen Helmholtz'schen Princip erweitere. Nur scheint es mir zweckmässig, vorläufig wenigstens, die beiden Principien mit verschiedenen Namen zu bezeichnen.« —

Diese letzte Bemerkung gilt nun nicht blos von dem neuen Helmholtz'schen Princip, sondern auch von dem oben aufgestellten, welches ebenfalls von dem gewöhnlichen abweicht, weshalb zu seiner besseren Unterscheidung schon bisher der Name des Princips der Erhaltung der Energie gebraucht worden ist, weil darnach die ganze Energie, nämlich die der Bewegung und der Wechselwirkung in Summa, wirklich unverändert erhalten wird, während nach dem gewöhnlichen Energieprincip blos eine Energiefunction existirt, deren Grösse keineswegs unverändert erhalten wird, sondern die Eigenschaft hat, in jedem Zeitraume um ebensoviel anzuwachsen, als die dem Systeme während dieses Zeitraums von Aussen zugeführte Arbeit beträgt. Nur in zwei besondern Fällen kann das gewöhnliche Princip ebenfalls als ein Princip der Erhaltung der Energie betrachtet werden, nämlich in dem Falle, wo das betrachtete materielle System alle Körper in der Welt umfasst, und ferner in dem Falle, wo das betrachtete System als vollkommen isolirt anzusehen ist, weil es nämlich in diesen beiden Fällen gar keine äusseren Einwirkungen giebt.

Dass nun aber bei dieser Verschiedenheit doch kein Widerspruch stattfinde zwischen obigem Principe der Erhaltung der Energie und dem gewöhnlichen Energieprincip, wie es von Neumann definirt worden ist, muss bewiesen werden, wozu es, wie man leicht sieht, nur der Nachweisung bedarf, dass die Energie der

Wechselwirkung $P$ in jedem Zeitraum um ebensoviel wachse, als für diesen Zeitraum die Differenz des Wachsthums des Potentials $V$, und der dem Theilchenpaare von Aussen zugeführten Arbeit $S$ beträgt, d. h. dass $dP = dV - dS$ sei., was mit Zuziehung der durch das Princip der Erhaltung der Energie gegebenen Gleichung, nämlich $P + Q = a$, wo $a$ eine Constante bezeichnet, zum gewöhnlichen Energieprincipe führt, nämlich

$$d(Q + V) = dS,$$

wo $(Q + V)$ die Neumann'sche Energiefunction bezeichnet. — Diesen Beweis zu geben wird unten im 4. Artikel versucht werden.

Das Ziel, welches durch diesen neuen, sowohl von dem gewöhnlichen als auch von dem von Helmholtz aufgestellten verschiedenen Ausspruch des Energieprincips erreicht werden soll, besteht aber wesentlich darin,

ein Princip zu gewinnen, wodurch bestimmt werde, was in der Wechselwirkung der Körper durch ihre Bewegung verändert wird.

Wechselwirkung findet nur zwischen je zwei Körpern statt und erleidet nur durch die relative lebendige Kraft ihrer Bewegung eine Veränderung. Dies vorausgesetzt, und ferner vorausgesetzt, dass diese Wechselwirkung zweier Körper oder Körpertheilchen eine mit ihrer relativen lebendigen Kraft homogene Grösse sei, welche mit der Grösse dieser Kraft die constante Energiesumme $a$ bilde; so bedeutet $a$ offenbar die Grösse der Wechselwirkung der beiden ruhenden Theilchen, d.i. ihre statische Wechselwirkung, und das Princip der Erhaltung der Energie ist dann das Gesetz, wodurch bestimmt wird, dass diese statische Wechselwirkung, in Folge irgend einer durch die lebendige Kraft $Q$ ihrer Grösse nach gegebenen relativen Bewegung, um $Q$ vermindert werde.

Das allgemeine Grundgesetz der elektrischen Wirkung würde als solches alsdann durch das Princip der Erhaltung der Energie vollkommen ersetzt und in ein Theorem verwandelt werden, welches aus dem elektrostatischen Grundgesetze, mittelst des Princips der Erhaltung der Energie, abgeleitet und bewiesen würde.

## 2.

## Die Energie der Wechselwirkung auf absolutes Maass zurückgeführt.

Es leuchtet ein, dass aus der im vorhergehenden Artikel aufgestellten Gleichung, in welcher versuchsweise das Princip der Erhaltung der Energie ausgesprochen worden ist, nämlich

$$P + Q = a,$$

die Energie der Bewegung $Q$ bestimmt werden kann, wenn die Energie der Wechselwirkung $P$ gegeben ist, und umgekehrt; zugleich leuchtet aber ein, dass der Sinn der Gleichung, als Ausspruch eines Princips, auf der physikalischen Bedeutung beruht, welche mit dem Begriff jeder einzelnen Energie zu verbinden ist, aus welcher die Möglichkeit der Grössenbestimmung jeder Energie unabhängig von der andern einleuchten muss. Für die Bewegungsenergie ist eine solche Bestimmung bekanntlich längst gegeben; es handelt sich daher nur um eine ebensolche Bestimmung für die Energie der Wechselwirkung.

Die Wechselwirkung zweier Theilchen während einer Entfernungsänderung besteht in Arbeit. Ohne Entfernungsänderung findet zwar Wechselwirkung aber keine Arbeit statt; doch besitzt das Theilchenpaar stets ein Arbeitsvermögen, d. i. die Eigenschaft, bei Entfernungsänderungen Arbeit leisten zu können. Aus diesem Arbeitsvermögen wird die Wechselwirkung erkannt und seine Grösse giebt den Maassstab für die Energie der Wechselwirkung.

Eine Grössenbestimmung des Arbeitsvermögens muss auf Arbeitsmessung gegründet werden. Nun besteht aber Arbeit entweder in Aufhebung entgegengesetzter Arbeit, oder in Erzeugung (resp. Vernichtung) von lebendiger Kraft. Arbeiten, die einander aufheben, entziehen sich directer Messung; dagegen ist Zunahme oder Abnahme der lebendigen Kraft unter geeigneten Verhältnissen ein Gegenstand directer Beobachtung und Messung, worauf in letzter Instanz alle Arbeitsmessung zurückzuführen ist.

Ist hiernach Arbeit bestimmbar aus der messbaren lebendigen Kraft, welche von ihr erzeugt wird, wenn sie von keiner entgegengesetzten Arbeit aufgehoben wird; so genügt für das Arbeitsvermögen eines Theilchenpaares die Bestimmung der Arbeitsgrösse, welche

durch Wechselwirkung der Theilchen während einer gewissen noch näher zu bestimmenden Entfernungsänderung geleistet werden würde. Ob diese Arbeitsgrösse positiv oder negativ ist, kommt dabei nicht in Betracht, und es dient daher der absolute Werth*) dieser Arbeitgrösse als Maass des Arbeitsvermögens.

Dagegen muss, nach dem aufgestellten Princip der Erhaltung der Energie, beim Arbeitsvermögen die Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ in Betracht gezogen werden, mit welcher die Entfernungsänderung erfolgt, weil mit dieser Geschwindigkeit die Bewegungsenergie $Q$, und folglich nach dem angeführten Principe auch die Wechselwirkungsenergie $P$ sich ändert. Es leuchtet daraus ein, dass die Energie $P$, d. i. das Arbeitsvermögen eines Theilchenpaars, nur für einen gegebenen Werth der Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ genau bestimmbar ist, und dass dieser Werth während der betreffenden Entfernungsänderung als constant angenommen werden müsse.

Da aber bei constantem Werthe von $\frac{dr}{dt}$ keine Zunahme oder Abnahme der lebendigen Kraft stattfindet, welche zu directer Arbeitsmessung dienen könnte; so muss zur Bestimmung des Arbeitsvermögens eine indirecte Methode der Arbeitsmessung gesucht werden. Soll nun während einer Entfernungsänderung keine Aenderung der relativen Geschwindigkeit durch Wechselwirkung hervorgebracht werden; so muss die während der Entfernungsänderung durch Wechselwirkung geleistete Arbeit von der durch äussere Einwirkung geleisteten aufgehoben werden, und diese letztere kann, wenn sie aus bekannten Ursachen stammt, z. B. wenn sie von bekannten Gewichten herrührt, welche während der Entfernungsänderung auf die Theilchen wirken, und dadurch genau bestimmt ist, zur indirecten Messung der durch Wechselwirkung geleisteten Arbeit benutzt werden.

Die durch Wechselwirkung der beiden Theilchen $e$ und $e'$ während der Entfernungsänderung $dr$ geleistete Arbeit wird nun ihrem absoluten

*) Hieraus folgt, dass die Gültigkeit des Princips $P + Q = a$ beschränkt ist auf die Fälle, wo $Q$ den Werth von $a$ nicht überschreitet. Alle lebendigen Kräfte $Q$ der uns bekannten Körper sind jedoch nur so kleine Bruchtheile von $a$, dass höchstwahrscheinlich der Fall $Q > a$ gar nicht vorkommt. Nach unserer jetzigen Kenntniss würden nämlich dazu zwei Körper mit einer relativen Geschwindigkeit $> 439450 \frac{\text{Kilometer}}{\text{Secunde}}$ erforderlich sein.

Werthe nach durch $\pm \frac{\partial V}{\partial r} dr$*) dargestellt, wo $V$ das Potential des Theilchenpaars bezeichnet, und das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Product $ee'$ positiv oder negativ ist. Die während einer grösseren Entfernungsänderung von $\varrho'$ bis $\varrho''$ geleistete Arbeit wird auf ähnliche Weise durch $\pm \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{\partial V}{\partial r} dr$ dargestellt. Die Aufgabe, die Energie der Wechselwirkung zweier Theilchen $e$ und $e'$ auf absolutes Maass zurückzuführen, d. i. die Bestimmung ihres Arbeitsvermögens nach absolutem Maasse, ist hienach auf die Bestimmung des Integralwerths $\pm \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{\partial V}{\partial r} dr$ zurückgeführt, worin nur die Integrationsgrenzen $\varrho'$ und $\varrho''$ noch der nähern Bestimmung bedürfen.

Da unter Arbeitsvermögen der Grössenwerth der durch Wechselwirkung während einer genau zu bestimmenden Entfernungsänderung geleisteten Arbeit verstanden wird; so leuchtet ein, dass die Entfernungsgrenzen $\varrho'$ und $\varrho''$ im Ausdrucke $\pm \int_{\varrho'}^{\varrho''} \frac{\partial V}{\partial r} dr$ genau bestimmte und constante Werthe erhalten müssen, woraus folgt, dass diese Grenzen nicht dieselben wie die des Potentials $\int_{\infty}^{r} \frac{dV}{dr} dr$ sein können, von denen eine, nämlich $r$, variabel ist.

Da es sich ferner um die Bestimmung des ganzen, dem betrachteten Theilchenpaare vermöge der Wechselwirkung seiner Theilchen zukommenden Arbeitsvermögens handelt, so leuchtet ein, dass diese Grenzen möglichst weit auseinander zu rücken sind, so weit als es geschehen kann, ohne dadurch in Widerspruch mit dem Princip der Erhaltung der Energie zu gerathen, nach welchem die dem Theilchenpaare zugehörige Energiesumme eine Constante $a$ sein soll, und diese Constante zugleich der Grenzwerth sein soll, welchen die Energie der Wechselwirkung nicht überschreiten darf, und nur dann erreichen soll, wenn die Bewegungsenergie Null ist.

*) Das Zeichen der partiellen Differentiation ist hier gewählt worden, um auszudrücken, dass bei dieser Differentiation $\frac{dr}{dt}$ als constant betrachtet werden soll.

Hieraus ergiebt sich zunächst die Bestimmung der einen Grenze $\varrho' = \infty$; was dagegen die andere Grenze $\varrho''$ betrifft, so darf ihr Werth nicht kleiner sein als derjenige, für welchen $\pm \int_\infty^{\varrho''} \frac{\partial V}{\partial r} dr = a$ sein würde. Der hienach bestimmte Werth von $\varrho''$ soll mit $\varrho$ bezeichnet werden.

Zur Grössenbestimmung der mit $P$ bezeichneten Energie der Wechselwirkung zweier Theilchen $e$ und $e'$, deren Massen mit $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ bezeichnet worden, und deren Bewegungsenergie $Q = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon \varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}$ ist, wird dann folgende Gleichung erhalten:

$$P = \pm \int_\infty^{\varrho} \frac{\partial V}{\partial r} dr,$$

wobei zu beachten ist, dass erstens während der Entfernungsänderung ausser der Wechselwirkung eine äussere Einwirkung auf das Theilchenpaar stattfinden soll, durch welche der gegebene Werth von $\frac{\partial r}{\partial t}$ in $V$ constant erhalten wird; ferner dass das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Product $ee'$ positiv oder negativ ist; und endlich dass $P = a$ ist für $Q = 0$, was zur Bestimmung von $\varrho$ dient.

Diese Formel für $P$ kann noch auf folgende Weise transformirt werden. Man kann $P = \pm \int_\infty^{\varrho} \frac{\partial V}{\partial r} dr$ in zwei Theile zerlegen, nämlich:

$$P = \pm \int_\infty^{r} \frac{dV}{dr} dr \pm \int_r^{\varrho} \frac{\partial V}{\partial r} dr,$$

wovon der erstere Theil der absolute Werth des Potentials $V$ ist, worin die gewöhnlichen Differentialzeichen gesetzt sind, weil es gleichgültig ist, ob darin $\frac{dr}{dt}$ variabel gesetzt wird oder nicht. Bei dem letztern Theile bleibt aber zu beachten, dass der gegebene Werth der Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ während der Entfernungsänderung von $r$ bis $\varrho$ constant anzunehmen ist.

Bezeichnet dann $s$ die während der Entfernungsänderung von $r$ bis $\varrho$ durch äussere Einwirkung geleistete Arbeit, so muss nothwendig, um $\frac{dr}{dt}$ constant zu erhalten,

$$\pm \int_r^\varrho \frac{\partial V}{\partial r} dr + s = 0$$

sein, woraus zur Bestimmung der Energie $P$ folgende Formel erhalten wird:

$$P = \pm V - s,$$

wo $V$ das Potential der Theilchen $e$ und $e'$ bezeichnet, und $s$ die Arbeit, welche während der Entfernungsänderung von $r$ bis $\varrho$ durch äussere Einwirkung geleistet werden muss, damit der für $r$ gegebene Werth der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ unverändert bleibe.

## 3.

## Ableitung des elektrodynamischen aus dem elektrostatischen Potentialgesetze mittelst des Energieprincips.

Nach gegebener Definition der beiden Energieen eines elektrischen Theilchenpaars $e$ und $e'$, deren Massen mit $\varepsilon$ und $\varepsilon'$, und deren Entfernung mit $r$ bezeichnet worden, nämlich

der Energie der Bewegung $Q = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}$ *), und

der Energie der Wechselwirkung $P = \pm \int_\infty^\varrho \frac{\partial V}{\partial r} dr$, —

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Product $ee'$ positiv oder negativ ist, und der mit der Grösse $Q$ gegebene Werth der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ während der Entfernungsänderung constant und dem für $Q$ gültigen gleich anzunehmen ist, — ergiebt sich

*) Bezeichnen $\alpha$, $\beta$ die Geschwindigkeiten der Masse $\varepsilon$ in der Richtung $r$ und senkrecht darauf, $\alpha'$, $\beta'$ dieselben Geschwindigkeiten für $\varepsilon'$, wonach $\alpha - \alpha' = \frac{dr}{dt}$ die relative Geschwindigkeit beider Theilchen ist; so ist $\frac{1}{2}\varepsilon(\alpha\alpha+\beta\beta)+\frac{1}{2}\varepsilon'(\alpha'\alpha'+\beta'\beta')$ die ganze den beiden Theilchen zugehörige lebendige Kraft. Setzt man nun

$$\text{für } \alpha,\ \frac{\varepsilon\alpha+\varepsilon'\alpha'}{\varepsilon+\varepsilon'}+\frac{\varepsilon'(\alpha-\alpha')}{\varepsilon+\varepsilon'};\ \text{für } \alpha',\ \frac{\varepsilon\alpha+\varepsilon'\alpha'}{\varepsilon+\varepsilon'}-\frac{\varepsilon(\alpha-\alpha')}{\varepsilon+\varepsilon'};$$

so erhält man die ganze lebendige Kraft der beiden Theilchen als Summe zweier Theile, $=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{(\varepsilon\alpha+\varepsilon'\alpha')^2}{\varepsilon+\varepsilon'}+\varepsilon\beta\beta+\varepsilon'\beta'\beta'\right)$, wovon der erstere, nämlich $\frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon+\varepsilon'}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}$ die relative lebendige Kraft der beiden Theilchen ist, welche oben mit $Q$ bezeichnet worden. — Siehe Abhandlungen d. K. Sächs. Gesellsch. d. Wiss. Bd. X. S. 12.

aus dem Art. 1 ausgesprochenen Energieprincipe, wonach $P + Q = a$ eine constante Summe bildet, folgende Gleichung zwischen den beiden Constanten $a$ und $\varrho$ und den beiden Variabeln $Q$ und $V$, nämlich

$$\pm \int_{\infty}^{\varrho} \frac{\partial V}{\partial r} dr = a - Q. \qquad (1.)$$

Nun ist nach dem Grundgesetze der Elektrostatik für $Q = 0$ das Potential $V = \frac{ee'}{r}$ gegeben. Setzt man diese Werthe der Variabeln $Q$ und $V$ in Gleichung (1.), so erhält man folgende Gleichung zwischen den beiden Constanten $a$ und $\varrho$, wodurch sie auf einander zurückgeführt werden, nämlich

$$\pm \int_{\infty}^{\varrho} \frac{d\frac{ee'}{r}}{dr} dr = a,$$

woraus der Werth der Constanten $\varrho$ gefunden wird

$$\varrho = \pm \frac{ee'}{a}. \qquad (2.)$$

Setzt man nun diesen Werth von $\varrho$ in die Gleichung (1.), so ergiebt sich folgende Gleichung blos zwischen einer Constanten, nämlich $a$, ferner dem gegebenen Werthe der Variabeln $Q$ und dem gesuchten Werthe der Variabeln $V$, nämlich

$$\pm \int_{\infty}^{\pm\frac{ee'}{a}} \frac{\partial V}{\partial r} dr = a - Q, \qquad (3.)$$

woraus $V$ zu bestimmen ist.

Man sieht leicht ein, dass dieser Gleichung (3.) durch folgende Bestimmung von $V$

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{Q}{a}\right)$$

genügt werde; denn substituirt man diesen Werth im ersten Gliede der Gleichung (3.), und berücksichtigt, dass, nach der Art. 2 gegebenen Definition, in der Formel $P = \pm \int_{\infty}^{\varrho} \frac{\partial V}{\partial r} dr$ der gegebene Werth der relativen Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$, folglich auch $Q = \frac{1}{2} \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}$, während der Entfernungsänderung constant anzunehmen ist; so findet man für den einen Grenzwerth, $r = \pm \frac{ee'}{a}$, den Werth von $V = \pm a \left(1 - \frac{Q}{a}\right)$, und für

den andern Grenzwerth $r = \infty$ den Werth $V = 0$; folglich die Differenz dieser Werthe

$$\int_{\infty}^{\pm\frac{ee'}{a}} \frac{\partial V}{\partial r}\, dr = \pm a \left(1 - \frac{Q}{a}\right);$$

folglich

$$\pm \int_{\infty}^{\pm\frac{ee'}{a}} \frac{\partial V}{\partial r}\, dr = a\left(1 - \frac{Q}{a}\right) = a - Q,$$

ganz in Uebereinstimmung mit Gleichung (3.).

Diese aus dem Grundgesetze der Elektrostatik mit Hülfe des Energieprincips abgeleitete Formel des elektrodynamischen Potentialgesetzes, nämlich

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{Q}{a}\right), \qquad (4.)$$

lässt sich nun noch auf folgende Weise umgestalten.

Die constante Energiesumme $a$ ist nach dem Energieprincipe der Grenzwerth der Bewegungsenergie $Q = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}$ für abnehmende Werthe der Energie der Wechselwirkung $P$, d. h. es ist $Q = a$ für $P = 0$. Bezeichnet man daher die relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}$ der beiden Theilchen für diesen Grenzwerth der Bewegungsenergie $a$ mit $c$, so ergiebt sich

$$a = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot cc.$$

Substituirt man nun diese Werthe von $Q = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}$ und $a = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot cc$ in Gleichung (4.), so erhält man für das elektrodynamische Potentialgesetz folgenden Ausdruck:

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{1}{cc} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}\right).$$

Zwischen den drei in dieser Ableitung des elektrodynamischen Potentialgesetzes vorkommenden Constanten $a$, $\varrho$, $c$ eines elektrischen Theilchenpaars $e$, $e'$, dem die Massen $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ zugehören, finden endlich folgende Beziehungen statt, wonach jede derselben aus jeder von den beiden andern bestimmt werden kann, nämlich

$$a = \pm \frac{ee'}{\varrho} = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot cc.$$

Für das elektrodynamische Potential $V$ erhält man durch Vertauschung dieser Constanten folgende Formeln:

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{Q}{a}\right) = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}\right) = \frac{ee'}{r} \mp \frac{e}{r}Q,$$

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Product $ee'$ positiv oder negativ ist.

4.

## Ableitung des gewöhnlichen Princips der Energie aus dem Princip der Erhaltung der Energie.

Das gewöhnliche Energieprincip, wie es Neumann ausgesprochen hat, verlangt, dass für jedes materielle System eine Energiefunction existire, d. i. eine nur vom augenblicklichen Zustande des Systems abhängende Function, welche die Eigenschaft hat, in jedem Zeitraume um ebensoviel anzuwachsen, als die dem System während dieses Zeitraums von Aussen zugeführte Arbeit beträgt. Diese Energiefunction hat man oft kurzweg die Energie genannt.

Im Falle eines Systems von zwei Theilchen in der Entfernung $r$ von einander, auf welches während der Entfernungsänderung $dr$ durch Wechselwirkung die innere Arbeit $Rdr$, und durch äussere Einwirkung die äussere Arbeit $dS$ ausgeübt wird, ist nach einem bekannten allgemeinen Satze der Mechanik die Zunahme der lebendigen Kraft $Q$ eben so gross, wie die Summe aller auf das System ausgeübten innern und äussern Arbeiten, nämlich

$$dQ = Rdr + dS.$$

Giebt es also eine vom augenblicklichen Zustande des Theilchenpaars abhängende Function, welche die Eigenschaft hat, während der Entfernungsänderung $dr$ um $dQ - Rdr = dS$ anzuwachsen, so gilt für ein solches Theilchenpaar das gewöhnliche Energieprincip.

Da nun für ein elektrisches Theilchenpaar $e$, $e'$ durch das, unter Voraussetzung des Princips der Erhaltung der Energie, im vorigen Artikel entwickelte Potentialgesetz bewiesen ist, dass die innere Arbeit $Rdr$ das vollständige Differential der Function $-\frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{dr^2}{c^2dt^2}\right)$ ist, welche ebenso wie $Q$ nur vom augenblicklichen Zustande des Theilchenpaars abhängt, so leuchtet ein, dass die Differenz beider Grössen, welche ebenfalls nur vom augenblicklichen Zustand des Theilchenpaars abhängt, nämlich

$$Q + \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{dr^2}{c^2 dt^2}\right),$$

die Eigenschaft hat, während der Entfernungsänderung $dr$ um $dQ - R\,dr = dS$ anzuwachsen, wonach also für ein solches Theilchenpaar nicht allein das Princip der Erhaltung der Energie, sondern auch das gewöhnliche Energieprincip gilt, und

$$Q + \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{dr^2}{c^2 dt^2}\right)$$

seine Energiefunction ist.

Die gleichzeitige Geltung beider Principien, nämlich des Princips der Erhaltung der Energie, wonach $P + Q = a$ ist, und des gewöhnlichen Energieprincips, wonach $d(Q + V) = dS$ ist, wo $S$ die durch äussere Einwirkung geleistete Arbeit bezeichnet, setzt voraus, wie schon am Schlusse von Art. 1 bemerkt worden, dass

$$dP = dV - dS,$$

oder, da nach Art. 2 $P = \pm V - s$, folglich

$$dP = \pm dV - ds$$

war, dass $\pm dV - ds = dV - dS$ sei, was mit Hülfe der Art. 2 und 3 gefundenen Gleichungen:

$$\pm \int_r^\varrho \frac{\partial V}{\partial r} dr + s = 0, \qquad (1.)$$

$$V = \pm \frac{\varrho}{r}(a - Q), \qquad (2.)$$

und mit Hülfe der als Ausspruch des gewöhnlichen Energieprincips dienenden, schon Art. 1 angeführten, Gleichung

$$dS = d(Q + V) \qquad (3.)$$

leicht bewiesen werden kann. Nämlich aus (1) und (2) ergeben sich die Gleichungen

$$s = (a - Q)\left(\frac{\varrho}{r} - 1\right),$$

$$-ds = \varrho(a - Q)\frac{dr}{rr} + \left(\frac{\varrho}{r} - 1\right)dQ,$$

$$\pm dV = -\varrho(a - Q)\frac{dr}{rr} - \frac{\varrho}{r}dQ,$$

woraus folgt $\pm dV - ds = -dQ.$

Nun ist aber nach (3) auch $dV - dS = -dQ$,

folglich ist $\pm dV - ds = dV - dS$, was zu beweisen war.

5.

## Das allgemeine Gesetz der elektrischen Kraft.

Das Potential zweier elektrischen Theilchen $e$ und $e'$ in der Entfernung $r$ ist Art. 3 gefunden worden

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1 - \frac{Q}{a}\right),$$

worunter die Arbeit verstanden wird, welche durch Wechselwirkung der beiden, die relative lebendige Kraft $Q$ besitzenden, Theilchen $e$ und $e'$ geleistet werden würde, wenn sie aus unendlicher Entfernung in die Entfernung $r$ versetzt würden. Der Differentialquotient $\frac{dV}{dr}$ bezeichnet alsdann die von den Theilchen in der Entfernung $r$ durch Wechselwirkung auf einander ausgeübte Kraft, und zwar, je nachdem er positiv oder negativ ist, eine Anziehungskraft oder Abstossungskraft.

Die relative lebendige Kraft $Q$ beider Theilchen, deren Massen mit $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ bezeichnet werden, wird durch

$$Q = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2}$$

dargestellt, woraus erhellt, dass $Q$ eine Function der Zeit $t$ ist (ausgenommen wenn $\frac{dr}{dt}$ ausdrücklich als constant angenommen wird), ebenso wie $r$, und dass folglich auch jede von diesen beiden Variabelen $r$ und $Q$ als Function der andern betrachtet werden kann.

Es ergiebt sich hiernach die Abstossungskraft

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{Q}{a}\right) + \frac{ee'}{ar} \cdot \frac{\frac{dQ}{dt}}{\frac{dr}{dt}},$$

oder, wenn man hierin die Werthe

$$Q = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} \quad \text{und} \quad a = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot cc$$

substituirt, woraus

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{ddr}{dt^2} = \frac{2a}{cc} \cdot \frac{dr}{dt} \cdot \frac{ddr}{dt^2}$$

folgt, ergiebt sich die Abstossungskraft

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{rr}\left(1 - \frac{1}{cc} \cdot \frac{dr^2}{dt^2} + \frac{2r}{cc} \cdot \frac{ddr}{dt^2}\right).$$

Nun ist aber die relative Beschleunigung $\frac{ddr}{dt^2}$ aus zwei Theilen zusammengesetzt, nämlich aus dem von der Wechselwirkung beider Theilchen abhängigen, und aus dem davon unabhängigen Theile. Der letztere werde mit $f$ bezeichnet; der erstere giebt mit $\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}$

multiplicirt die Abstossungskraft $-\frac{dV}{dr}$, und kann also durch den Quotienten $-\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'}\cdot\frac{dV}{dr}$ dargestellt werden. Es ist also

$$\frac{ddr}{dt^2}=f-\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'}\cdot\frac{dV}{dr}.$$

Substituirt man diesen Werth für $\frac{ddr}{dt^2}$ in obiger Gleichung, und setzt nach Art. 3 $\varrho=\pm 2\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'}\cdot\frac{ee'}{cc}$, wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Product $ee'$ positiv oder negativ ist; so erhält man

$$-\frac{dV}{dr}=\frac{ee'}{rr}\left(1-\frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{2r}{cc}f\right)\mp\frac{\varrho}{r}\cdot\frac{dV}{dr},$$

und hieraus endlich folgenden Ausdruck der Abstossungskraft:

$$-\frac{dV}{dr}=\frac{ee'}{r(r\mp\varrho)}\cdot\left(1-\frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{2r}{cc}f\right),$$

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Product $ee'$ positiv oder negativ ist. Es kann dafür auch gesetzt werden

$$-\frac{dV}{dr}=\frac{ee'}{r\left(r-\frac{ee'}{a}\right)}\cdot\left(1-\frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}+\frac{2r}{cc}f\right).$$

Der Ausdruck der elektrischen Kraft in dieser entwickelten Form kann nun zur leichteren Uebersicht über die von beiden Theilchen unter den verschiedensten Verhältnissen aufeinander ausgeübten Kräfte dienen, jedoch ist dabei zu beachten, dass in dieser Form die Kräfte nicht nach dem Gesetze des Parellelogramms componirt werden können *). Man erkennt z. B. daraus unmittelbar, dass für positive Werthe des Products $ee'$ diese Kraft unendlich gross sein würde nicht blos für $r=0$, sondern auch für $r=\varrho$; erkennt aber zugleich auch, dass in Wirklichkeit der letztere Fall, nämlich wo $r=\varrho$ sei, niemals vorkomme, weil, so gross auch die relative Geschwindigkeit der Theilchen in irgend einer von $\varrho$ um eine endliche Grösse verschiedenen Entfernung sein möge, doch niemals $r=\varrho$ werden könne.

*) Da die Componenten der Beschleunigung bei Kräften, deren Potential von den Geschwindigkeiten der bewegten Punkte abhängt, durch Ausdrücke gegeben sind, welche die Beschleunigungen selbst enthalten, dergestalt, dass die Werthe der letzteren nur durch Auflösung von Gleichungen erhalten werden können, so ist nach einer Bemerkung Carl Neumann's ins Auge zu fassen, dass während vor jener Auflösung die Ausdrücke der Beschleunigungen bei gleichzeitiger Wirkung mehrerer Kräfte nach den gewöhnlichen Regeln componirt werden dürfen, diese letztere Eigenschaft nach Umformung der Ausdrücke durch Auflösung der Gleichungen verloren geht. Das Unendlichwerden der Beschleunigungen wird dabei durch das Verschwinden der Determinante aus den Coefficienten der Beschleunigungen in den einzelnen Gleichungen charakterisirt. Vergl. Mathemat. Annalen Bd. 11, S. 323 Anm.

Denn weil $ee'$ positiv ist, ist die Kraft für $r > \varrho$ abstossend und wächst, während $r$ abnimmt und dem Grenzwerthe $\varrho$ sich nähert, ins Unendliche, woraus einleuchtet, dass die Annäherungsgeschwindigkeit, die wenn auch sehr gross, doch nicht unendlich gewesen war, aufgehoben werden müsse von dieser ins Unendliche wachsenden Abstossungskraft, noch bevor $r = \varrho$ geworden ist, und dass sodann $r$ wieder wachsen werde. Es folgt hieraus, dass in diesem Falle niemals $r = \varrho$ werde, sondern dass die beiden Theilchen nothwendiger Weise stets in grösserer Entfernung als $\varrho$ von einander bleiben müssen.

Für $r < \varrho$ ist die Kraft anziehend und wächst, während $r$ zunimmt und dem Grenzwerth $\varrho$ sich nähert, ins Unendliche, woraus einleuchtet, dass die Entfernungsgeschwindigkeit, die wenn auch sehr gross, doch nicht unendlich gewesen war, von der ins Unendliche wachsenden Anziehungskraft aufgehoben werden müsse, noch bevor $r = \varrho$ geworden sei, und dass sodann $r$ wieder abnehmen werde. Die beiden Theilchen werden also in diesem Falle stets in geringerer Entfernung als $r$ von einander bleiben.

Sollte eine ähnliche Beschränkung der Bewegung, wie für zwei Theilchen, welche darin bestand, dass sie in geringerer Entfernung als $\varrho$ von einander immer bleiben mussten, wenn sie einmal darin waren, auch für eine grössere Zahl in einem eng begrenzten Raume eingeschlossener Theilchen sich ergeben, welche nämlich darin bestände, dass alle diese Theilchen immer in einem gleich begrenzten Raume zusammen bleiben müssten; so würde eine solche grössere Zahl von Theilchen, ebenso wie jene zwei, zusammen ein Molekül bilden, und es würden auf dieselbe Weise unter geeigneten Verhältnissen auch die ausserhalb des von diesem Moleküle eingenommenen Raumes befindlichen Theilchen zu Molekülen vereinigt sein können. Alle diese Moleküle, leuchtet ein, müssten durch Zwischenräume mindestens von der Grösse $\varrho$ von einander geschieden sein, und würden sich einander wechselseitig abstossen. Es würde aber weiterer Untersuchung bedürfen, um zu entscheiden, ob, und unter welchen Verhältnissen ein System solcher Moleküle in stabilem Gleichgewicht verharren könnte, und, wenn dies der Fall sein sollte, nach welchen Gesetzen kleine Störungen des Gleichgewichts fortgepflanzt werden würden, um die Frage zu entscheiden, ob nicht dem Lichtäther und den Lichtwellen im Weltenraume ein stabiler Aggregatzustand solcher von

elektrischen Theilchen gebildeten, im Weltenraume verbreiteten Moleküle zu Grunde liegen und zur Erklärung dienen könne. —

Man pflegt diejenige Kraft, welche zwei elektrische Theilchen $e$ und $e'$ in der Entfernung $r$ auf einander ausüben, wenn sie in relativer Ruhe sich befinden, als ihre elektrostatische Kraft zu bezeichnen und dieselbe nach elektrostatischem Gesetze zu bestimmen, nämlich $=\frac{ee'}{rr}$. In relativer Ruhe befinden sich aber zwei Theilchen, wenn ihre relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt}=0$ ist. Alsdann ergiebt sich aber aus dem gefundenen allgemeinen Gesetze der Abstossungskraft zweier elektrischen Theilchen die Grösse der Kraft nicht $=\frac{ee'}{rr}$, sondern $=\frac{ee'}{r(r\mp\varrho)}\cdot\left(1+\frac{2r}{cc}f\right)$, wo $f$ der von der Wechselwirkung der beiden Theilchen unabhängige Theil ihrer relativen Beschleunigung ist, d. i. die Summe derjenigen Beschleunigung $=\frac{\alpha\alpha}{r}$, welche von der relativen Geschwindigkeit $\alpha$ in einer gegen $r$ senkrechten Richtung, welche die Theilchen besitzen, herrührt, und derjenigen Beschleunigung $=\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'}\varDelta$, welche von der Differenz $\varDelta$ der auf die Theilchen $e$ und $e'$ ausgeübten und nach $r$ zerlegten äusseren Kräfte herrührt, wo $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ die Massen der beiden Theilchen bezeichnen.

Aber auch dann, wenn die beiden Theilchen sich nicht blos in relativer Ruhe befinden, sondern auch der mit $f$ bezeichnete, von ihrer Wechselwirkung unabhängige Theil ihrer Beschleunigung $=0$ ist, ergiebt sich ihre Abstossungskraft noch immer verschieden von dem durch das elektrostatische Gesetz bestimmten Werthe $\frac{ee'}{rr}$; sie ergiebt sich nämlich nach dem obigen allgemeinen Gesetze $=\frac{ee'}{r(r\mp\varrho)}$. —

Um nach diesem allgemeinen Gesetze den durch das statische Gesetz bestimmten Werth $\frac{ee'}{rr}$ zu erhalten, darf der mit $f$ bezeichnete Theil der Beschleunigung nicht $=0$ sein, sondern muss dem anderen von der Wechselwirkung der beiden Theilchen abhängigen Theile, nämlich $\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'}\cdot\frac{ee'}{rr}$ entgegengesetzt gleich sein, d. h.

$$f=-\frac{\varepsilon+\varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'}\cdot\frac{ee'}{rr}=\mp\frac{\varrho cc}{2rr}.$$

Mit diesem Werthe von $f$ findet man nach dem allgemeinen Gesetze, wenn $\frac{dr}{dt}=0$ ist, die Grösse der Abstossungskraft:

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{ee'}{r(r\mp\varrho)}\cdot\left(1+\frac{2r}{cc}f\right) = \frac{ee'}{r(r\mp\varrho)}\cdot\left(1\mp\frac{\varrho}{r}\right) = \frac{ee'}{rr},$$

d. i. gleich dem durch das elektrostatische Gesetz bestimmten Werthe. — Wirkliches statisches Gleichgewicht findet also zwischen zwei in relativer Ruhe befindlichen Theilchen nur dann statt, wenn die aus ihrer Wechselwirkung resultirende Beschleunigung durch die von ihrer Wechselwirkung unabhängige Beschleunigung aufgehoben wird.

## 6.
## Bewegungsgesetze zweier blos durch Wechselwirkung getriebenen elektrischen Theilchen.

Die Bewegungsgesetze zweier blos durch Wechselwirkung getriebenen elektrischen Theilchen, die schon in den Elektrodyn. Maassbest. Bd. X dieser Abhandlungen entwickelt worden sind, sollen hier nur für den Fall, wo diese Theilchen keine relative Bewegung senkrecht gegen ihre Verbindungslinie besitzen, näher betrachtet und graphisch dargestellt werden, um zur Widerlegung irriger aus dem Grundgesetze gezogenen Folgerungen zu dienen.

Nach Art. 3 war das allgemeine Potential zweier elektrischen Theilchen $e$, $e'$ in der Entfernung $r$ von einander

$$V = \frac{ee'}{r}\left(1-\frac{1}{cc}\cdot\frac{dr^2}{dt^2}\right),$$

wo die Abstossungskraft beider Theilchen, wie im vorigen Artikel bemerkt worden, durch $-\frac{dV}{dr}$ dargestellt wurde; soll aber diese Abstossungskraft durch $+\frac{dV}{dr}$ dargestellt werden, so ist das Potential

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{dr^2}{c^2dt^2}-1\right)$$

zu setzen.

Dieser letztern Bestimmung gemäss ergiebt sich die Beschleunigung des Theilchens $e$ in der Richtung $r$, $=\frac{1}{\varepsilon}\cdot\frac{dV}{dr}$, und die Beschleunigung des Theilchens $e'$ in der entgegengesetzten Richtung $=\frac{1}{\varepsilon'}\cdot\frac{dV}{dr}$, wenn $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ die Massen der Theilchen $e$ und $e'$ bezeichnen, woraus die relative Beschleunigung beider Theilchen resultirt,

$$\frac{ddr}{dt^2} = \left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon'}\right)\frac{dV}{dr}.$$

Hieraus ergiebt sich durch Multiplication mit $2dr$ die Differentialgleichung

$$2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{ddr}{dt} = 2\left(\frac{1}{\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon'}\right)\cdot\frac{dV}{dr}dr,$$

durch deren Integration zwischen den Grenzen $r = r_0$ und $r = r$, wo $r_0$ den Werth von $r$ bezeichnet, für welchen die relative Geschwindigkeit $\frac{dr}{dt} = 0$ ist, erhalten wird:

$$\frac{dr^2}{dt^2} = 2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right) \cdot \left[\frac{ee'}{r}\left(\frac{dr^2}{c^2 dt^2} - 1\right) + \frac{ee'}{r_0}\right],$$

oder, wenn $\frac{dr}{c\,dt} = u$ und $2\left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon'}\right) = \pm \frac{\varrho cc}{ee'}$ gesetzt wird,

$$u^2 = \pm \varrho \left[\frac{1}{r}(u^2 - 1) + \frac{1}{r_0}\right],$$

wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Product $ee'$ positiv oder negativ ist.

Wird zunächst nun der Fall betrachtet, wo $ee'$ positiv ist, und drückt man die Entfernungen $r$ und $r_0$ in Theilen der dem Theilchenpaare zukommenden Constanten $\varrho$ aus, so erhält man

$$u^2 = \frac{1}{r}(u^2 - 1) + \frac{1}{r_0}.$$

Sind nun für ein solches Theilchenpaar zu irgend einer Zeit die Entfernung $r$ und die Geschwindigkeit $u$ bestimmt, so ergiebt sich aus obiger Gleichung

$$r_0 = \frac{r}{1 - (1 - r)u^2}.$$

Ist aber auf diese Weise für das betrachtete Theilchenpaar, welches nur durch Wechselwirkung getrieben sich bewegt, die Entfernung $r_0$ bestimmt, für welche $u = 0$ ist, so können nun aus folgender Gleichung

$$u^2 = \left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\frac{1}{1 - r}$$

alle zusammengehörigen Werthe von $r$ und $u$ für den nämlichen Werth von $r_0$ gefunden werden, wenn darin für $r$ eine Reihe beliebiger von $r = 0$ bis $r = \infty$ wachsender Werthe gesetzt wird.

Eine solche Reihe zusammengehöriger Werthe von $r$ und $u$ wird graphisch durch eine Curve dargestellt, deren Abscissen und Ordinaten die zusammengehörigen Werthe von $r$ und $u$ darstellen.

Der Werth von $r_0$ kann nun aber für dasselbe Theilchenpaar zu verschiedenen Zeiten sehr verschieden sein, wenn dazwischen ausser der Wechselwirkung äussere Einwirkungen stattgefunden haben. Für jeden andern Werth von $r_0$ ergiebt sich aber, nach Beseitigung der äussern Einwirkung, eine andere Reihe zusammengehöriger Werthe von $r$ und $u$, welche durch eine andere Curve graphisch dargestellt werden.

Hiernach erhält man für ein ganzes System verschiedener Werthe von $r_0$ folgende nach diesen Werthen geordnete Zahlentafel von zu-

sammengehörigen Werthen von $r$ und $u$, und ein entsprechendes Curvensystem, welches die Figur auf beigefügter Tafel darstellt, wobei zu bemerken ist, dass in dieser graphischen Darstellung die Werthe von $r$ der folgenden Zahlentafel als Abscissen, die von $\pm u$ als Ordinaten aufgetragen sind, und zwar die von $+u$ als positive und die von $-u$ als negative, zur Unterscheidung der Entfernung der Theilchen von ihrer Annäherung. Das der ersten Abtheilung der Zahlentafel entsprechende Curvensystem erfüllt den Raum $AA'B'B$, das der zweiten den Raum $A'A_0B_0B'$, der auf der Seite von $A_0B_0$ ins Unendliche zu erstrecken ist.

Werthe von $u = \sqrt{\frac{1}{1-r}\left(1-\frac{r}{r_0}\right)}$, für Werthe von $r$ und $r_0$ zwischen 0 und 1.

| $r_0 =$ | 0,0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1,0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r =$ 0,0 | 0,00 | ± 1,00 | ± 1,00 | ± 1,00 | ± 1,00 | ± 1,00 | ± 1,00 | ± 1,00 | ± 1,00 | ± 1,00 | ± 1,00 |
| 0,1 | | 0,00 | ± 0,75 | ± 0,86 | ± 0,91 | ± 0,95 | ± 0,97 | ± 0,98 | ± 0,99 | ± 0,99 | ± 1,00 |
| 0,2 | | | 0,00 | ± 0,65 | ± 0,79 | ± 0,86 | ± 0,91 | ± 0,94 | ± 0,97 | ± 0,98 | ± 1,00 |
| 0,3 | | | | 0,00 | ± 0,60 | ± 0,75 | ± 0,84 | ± 0,90 | ± 0,94 | ± 0,97 | ± 1,00 |
| 0,4 | | | | | 0,00 | ± 0,57 | ± 0,75 | ± 0,84 | ± 0,91 | ± 0,96 | ± 1,00 |
| 0,5 | | | | | | 0,00 | ± 0,57 | ± 0,75 | ± 0,86 | ± 0,94 | ± 1,00 |
| 0,6 | | | | | | | 0,00 | ± 0,60 | ± 0,79 | ± 0,91 | ± 1,00 |
| 0,7 | | | | | | | | 0,00 | ± 0,65 | ± 0,86 | ± 1,00 |
| 0,8 | | | | | | | | | 0,00 | ± 0,75 | ± 1,00 |
| 0,9 | | | | | | | | | | 0,00 | ± 1,00 |
| 1,0 | | | | | | | | | | | ± % |

Werthe von $u = \sqrt{\frac{1}{1-r}\left(1-\frac{r}{r_0}\right)}$, für Werthe von $r$ und $r_0$ zwischen 1 und $\infty$.

| $r_0 =$ | 1,0 | 1,2 | 1,4 | 1,6 | 1,8 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 3,5 | 4,0 | 5,0 | 6,0 | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $r =$ 1,0 | ± % | | | | | | | | | | | | |
| 1,2 | ± 1,00 | 0,00 | | | | | | | | | | | |
| 1,4 | ± 1,00 | ± 0,65 | 0,00 | | | | | | | | | | |
| 1,6 | ± 1,00 | ± 0,75 | ± 0,49 | 0,00 | | | | | | | | | |
| 1,8 | ± 1,00 | ± 0,79 | ± 0,60 | ± 0,40 | 0,00 | | | | | | | | |
| 2,0 | ± 1,00 | ± 0,82 | ± 0,65 | ± 0,50 | ± 0,33 | 0,00 | | | | | | | |
| 2,5 | ± 1,00 | ± 0,85 | ± 0,72 | ± 0,61 | ± 0,51 | ± 0,41 | 0,00 | | | | | | |
| 3,0 | ± 1,00 | ± 0,86 | ± 0,75 | ± 0,66 | ± 0,57 | ± 0,50 | ± 0,32 | 0,00 | | | | | |
| 3,5 | ± 1,00 | ± 0,88 | ± 0,77 | ± 0,68 | ± 0,62 | ± 0,55 | ± 0,40 | ± 0,26 | 0,00 | | | | |
| 4,0 | ± 1,00 | ± 0,88 | ± 0,79 | ± 0,71 | ± 0,64 | ± 0,57 | ± 0,45 | ± 0,33 | ± 0,22 | 0,00 | | | |
| 5,0 | ± 1,00 | ± 0,89 | ± 0,80 | ± 0,73 | ± 0,66 | ± 0,61 | ± 0,50 | ± 0,41 | ± 0,33 | ± 0,24 | 0,00 | | |
| 6,0 | ± 1,00 | ± 0,89 | ± 0,81 | ± 0,74 | ± 0,68 | ± 0,63 | ± 0,53 | ± 0,45 | ± 0,37 | ± 0,31 | ± 0,20 | 0,00 | |
| $\infty$ | ± 1,00 | ± 0,91 | ± 0,84 | ± 0,79 | ± 0,74 | ± 0,71 | ± 0,63 | ± 0,57 | ± 0,54 | ± 0,50 | ± 0,45 | ± 0,41 | 0,00 |

Die nach diesen Zahlenwerthen in der beigefügten Figur gegebene graphische Darstellung gewährt nun eine klare Einsicht davon, welche Bewandtniss es mit dem aus der Formel sich ergebenden Resultate habe, dass nämlich die wechselseitige Beschleunigung zweier Theilchen in der sogenannten kritischen Entfernung $\varrho$ unendlich gross sei, was vielseitige Bedenken gegen das dieser Formel zu Grunde liegende allgemeine Gesetz der elektrischen Kraft hervorgerufen hat.

Man ersieht nämlich aus dieser graphischen Darstellung, dass in der Entfernung $\varrho$ zugleich mit der unendlich grossen Beschleunigung ein Sprung in der relativen Geschwindigkeit beider Theilchen von $-c$ bis $+c$, oder umgekehrt, eintritt, und zwar so plötzlich, dass während desselben die Entfernung $\varrho$ nicht die mindeste Aenderung erleidet.

Die Beschleunigung, indem sie unendlich gross wird, wechselt das Vorzeichen, und in Folge davon geht die Geschwindigkeit im selbigen Augenblicke, ohne allen Zeitverlust, von $-c$ zu $+c$ über, oder umgekehrt. Ehe die Entfernung $\varrho$ die kleinste endliche Aenderung erleiden kann, hat der Uebergang der Geschwindigkeit $c$ in die entgegengesetzte schon stattgefunden.

Obige Formel giebt im Grunde nur die Beschreibung einer plötzlichen Zurückwerfung der Theilchen von einander, im Augenblicke, wo sie in die Entfernung $\varrho$ gelangen, geradeso wie die Formel der Mechanik für zwei zusammenstossende elastische Kugeln, die ebenfalls von einander zurückgeworfen werden, und zwar desto plötzlicher, je kleiner die Kugeln und je grösser ihr Elasticitätscoefficient ist. Momentane Zurückwerfung bildet den Grenzfall, der wirklich zwar nicht vorkommt, doch nach den bisherigen Principien der Mechanik keineswegs für ungereimt oder absurd erklärt wird. Dass endlich nach der Formel, für $r = \varrho$, die Beschleunigung zwar unendlich gross sein würde, dass aber der Fall $r = \varrho$ ebenso wenig wirklich vorkommt, wie ein elastischer Körper mit unendlich grossem Elasticitätscoefficienten, verdient besondere Beachtung.

Ferner ersieht man, dass die Gesammtheit aller nach der angeführten Formel darstellbaren Curven zwei von einander ganz getrennte Gruppen bildet, nämlich erstens eine Gruppe, in welcher alle Entfernungen der Theilchen kleiner als $\varrho$, und zweitens eine Gruppe, in der sie grösser als $\varrho$ sind, welche beide von einander dadurch geschieden sind, dass, wie oben gezeigt worden, der Fall, wo die Ent-

fernung $= \varrho$ wäre, gar nicht wirklich vorkommt, noch vorkommen kann.

Beide Gruppen zusammen füllen den ganzen Raum für alle Abscissenwerthe von $r = 0$ bis $r = \infty$ und für alle Ordinatenwerthe von $u = -c$ bis $u = +c$ aus, und keine dieser Curven gestattet eine Fortsetzung über die Grenzen dieses Raums hinaus. Es folgt hieraus, dass zwei durch blosse Wechselwirkung getriebene elektrische Theilchen, deren relative Geschwindigkeit in irgend einem Augenblicke nicht grösser als $+c$ und nicht kleiner als $-c$ ist, stets innerhalb der angegebenen Grenzen bleiben*).

## 7.

## Elektrische Strahlung, insbesondere Reflexion und Zerstreuung der Strahlen.

Die Bewegungen zweier blos durch Wechselwirkung getriebenen elektrischen Theilchen, die sich in Bewegung gegen einander sowohl in der sie verbindenden Geraden, als auch senkrecht darauf befinden, sind in den Elektrodyn. Maassbest. Bd. X dieser Abhandlungen betrachtet und zu ihrer Bestimmung folgende Gleichungen gefunden worden:

---

*) Etwas Anderes wäre es, wenn der bei der Definition des Arbeitsvermögens ausgeschlossene Fall einträte, dass zwei elektrische Theilchen schon anfänglich eine Geschwindigkeit $> +c$ oder $< -c$ besässen, oder wenn die beiden Theilchen nicht blos durch Wechselwirkung, sondern ausserdem noch durch äussere Einwirkung getrieben sich bewegten und dadurch eine solche Geschwindigkeit, entweder $> +c$ oder $< -c$, erhalten hätten. Gesetzt ein solcher Fall käme wirklich vor, so würden die Bewegungen zweier solcher Theilchen, wenn sie von diesem Augenblicke an blos durch Wechselwirkung getrieben sich weiter bewegten, durch ganz andere Curven dargestellt werden, welche vom Gebiete des oben betrachteten Curvensystems ganz ausgeschlossen wären. Alle diese andern Curven würden ein in sich abgeschlossenes System bilden, welches den ganzen übrigen Raum erfüllte. Alle Curven dieser zweiten Art sind in der beigefügten Figur durch punktirte Linien dargestellt worden. Auch diese Bewegungsarten, oder die sie darstellenden Curven, zerfallen in zwei von einander an der durch die kritische Entfernung $\varrho$ bestimmten Stelle ganz geschiedene Gruppen, nämlich eine Gruppe, in welcher alle Entfernungen der Theilchen stets kleiner als $\varrho$, und in eine Gruppe, in welcher sie stets grösser als $\varrho$ sind. Ausserdem findet auch hier eine vollkommene Symmetrie zwischen den Curvenarmen mit Ordinaten $> +c$ und $< -c$ statt. Beide Curvenarme sind ferner bei $r = \varrho$ mit einander verbunden in Folge des plötzlichen Wechsels der Geschwindigkeit von $\pm\infty$ zu $\mp\infty$.

$$\frac{uu}{cc} = \frac{r - r_0}{r - \varrho}\left(\frac{\varrho}{r_0} + \frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0 \alpha_0}{cc}\right), \tag{1.}$$

$$r\alpha = r_0 \alpha_0, \tag{2.}$$

wo $r$ die Entfernung beider Theilchen von einander, und $u$ und $\alpha$ ihre relativen Geschwindigkeiten in der Richtung von $r$ und senkrecht darauf bezeichnen; ferner bezeichnet $r_0$ den Werth von $r$, für welchen $u = 0$ ist, $\alpha_0$ den Werth von $\alpha$, für welchen $r = r_0$ ist, endlich $\varrho$ die von der Natur und den Massen $\varepsilon$ und $\varepsilon'$ der beiden Theilchen $e$ und $e'$ abhängende Constante

$$\varrho = 2\,\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{cc},$$

wo $\varrho$ positiv oder negativ ist wie das Product $ee'$. — Soll $\varrho$ die Bedeutung einer Entfernung beider Theilchen von einander haben, die nur positiv sein kann, wie $r$ und $r_0$, so ist

$$\varrho = \pm 2\,\frac{\varepsilon + \varepsilon'}{\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{ee'}{cc}$$

zu setzen, wo das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem das Product $ee'$ positiv oder negativ ist. Für Gleichung (1.) ist dann zu setzen

$$\frac{uu}{cc} = \frac{r - r_0}{r \mp \varrho}\left(\frac{r + r_0}{r} \cdot \frac{\alpha_0 \alpha_0}{cc} \pm \frac{\varrho}{r_0}\right),$$

mit derselben Bestimmung der Vorzeichen. — Da im Folgenden nur gleichartige elektrische Theilchen betrachtet werden sollen, so werden stets die oberen Vorzeichen gelten. — Die Gleichung $r\alpha = r_0\alpha_0$ ergiebt $\alpha = 0$ für $r = \infty$, bei gegebenen endlichen Werthen von $r_0$ und $\alpha_0$, womit die Existenz einer geradlinigen Asymptote, mit welcher die Bahn im Unendlichen zusammenfällt, verbunden ist.

Es soll nun der Fall betrachtet werden, dass zwei gleiche elektrische Theilchen $e$ und $e'$ aus grosser Entfernung sich einander mit grosser, aber in Folge wechselseitiger Abstossung abnehmender, Geschwindigkeit $u$ nähern, deren grösster Werth, nämlich für $r = \infty$, mit $u_0$ bezeichnet werden soll. Der Einfachheit halber soll bei dieser relativen Bewegung $e$ als ruhend betrachtet werden. In derselben Bahn und relativ gegen $e$ mit gleicher Geschwindigkeit soll dem Theilchen $e'$ eine Reihe gleicher Theilchen $e''$, $e'''$.... folgen, in solchen Intervallen, dass die wechselseitigen Störungen derselben nicht berücksichtigt zu werden brauchen.

Aus dem oben angeführten Gesetze Gleichung (1.) ergiebt sich der für $r = \infty$ geltende Werth von $u$, nämlich

$$u_0 = c\sqrt{\left(\frac{\alpha_0\alpha_0}{cc} + \frac{\varrho}{r_0}\right)}. \tag{3.}$$

Da nun $\varrho$ für gleiche Theilchen gleich ist, und auch $u_0$ als gleich angenommen worden ist, so kann eine Verschiedenheit nur noch in Beziehung auf den Werth von $r_0$ und den daraus nach Gleichung (3.) sich ergebenden Werth von $\alpha_0$ stattfinden.

Das System aller dieser Theilchen heisse ein elektrischer Strahl, und die Asymptote, in der sich die Theilchen befinden, wenn sie sehr weit von $e$ entfernt sind, diene zur Bestimmung der Richtung des Strahls.

Wäre für alle Theilchen $r_0 = \varrho\frac{cc}{u_0^2}$, woraus $\alpha_0 = 0$ folgte, so würden sie alle sich in derselben Geraden fortbewegen bis zur Entfernung $r_0$, worauf sie alle wieder in derselben Geraden rückwärts gehen würden. Ist $\alpha_0$ aber von Null verschieden, und zwar, zugleich mit $r_0$, verschieden für alle Theilchen $e'$, $e''$.., für welche $u_0$ gleich ist, für alle aber sehr klein; so wird jedes Theilchen, wenn $r$ sich dem Werthe $r_0$ nähert, von jener Asymptote abweichen. Der Winkel, welchen dann die Gerade, z. B. $e'e$, in Folge dieser Abweichung, mit der Richtung des Strahls bildet, werde mit $\varphi$ bezeichnet, und es sei $\varphi = \varphi_0$, wenn die abnehmende Entfernung $e'e = r_0$ geworden ist, wo nämlich die Geschwindigkeit in der Richtung $e'e$, $= 0$, in der Richtung senkrecht darauf, $= \alpha_0$ ist.

Von dem Augenblicke an, wo $r = r_0$ geworden, entfernen sich die beiden Theilchen $e$ und $e'$ wieder von einander, und ihre Verbindungslinie nähert sich einer andern Geraden, die mit der Richtung, welche $ee'$ besass, als es $= r_0$ geworden, ebenfalls einen Winkel $= \varphi_0$ bildet und mit der Richtung des ursprünglichen Strahls den Winkel $= 2\varphi_0$, welcher der Reflexionswinkel heissen soll. Dieser Reflexionswinkel ist nun aber für die verschiedenen Theilchenpaare $ee'$, $ee''$..., welche zu demselben Strahl gehören, sehr verschieden, nach Verschiedenheit der Werthe von $\alpha_0$ oder $\frac{r_0}{\varrho}$, woraus sich ergiebt, dass ein solcher reflectirter Strahl zugleich auch zerstreut werde. Diese Zerstreuung elektrischer Strahlen soll nun nach obigen Gesetzen näher bestimmt werden.

Zunächst ergiebt sich aus obigem Gesetze (2.) das Wachsthum des mit $\varphi$ bezeichneten Winkels, nämlich

$$d\varphi = \frac{\alpha dt}{r} = \frac{\alpha_0 r_0}{rr} dt. \tag{4.}$$

Substituirt man ferner in Gleichung (1.) den aus Gleichung (3.) sich ergebenden Werth von $\alpha_0^2 = u_0^2 - \frac{\varrho}{r_0}c^2$, so erhält man

$$\frac{u^2}{c^2} = \frac{dr^2}{c^2 dt^2} = \frac{r-r_0}{r-\varrho}\left(\frac{r+r_0}{r}\cdot\frac{u_0^2}{c^2} - \frac{\varrho}{r}\right), \tag{5.}$$

folglich, wenn $r$ bei wachsendem $t$ abnimmt,

$$dt = -dr\sqrt{\frac{r(r-\varrho)}{(r-r_0)(u_0^2(r+r_0)-\varrho c^2)}}. \tag{6.}$$

Hieraus folgt

$$d\varphi = \frac{\alpha_0 r_0}{rr} dt = -\frac{\alpha_0 r_0}{u_0}\cdot\frac{dr\sqrt{(rr-r\varrho)}}{rr\sqrt{\left(rr-\frac{c^2}{u_0^2}\varrho r\right)-\left(r_0 r_0-\frac{c^2}{u_0^2}\varrho r_0\right)}},$$

oder, wenn $\frac{1}{r} = s$ gesetzt wird,

$$d\varphi = +\frac{\alpha_0 r_0}{u_0}\cdot ds\sqrt{\frac{(1-\varrho s)}{1-\frac{c^2}{u_0^2}\varrho s-\left(r_0 r_0-\frac{c^2}{u_0^2}\varrho r_0\right)s^2}}, \tag{7.}$$

woraus man sieht, dass $\varphi$ durch elliptische Functionen dargestellt werden kann.

Beschränkt man sich nun aber auf diejenigen Fälle, wo der Werth von $\alpha_0^2 = u_0^2 - \frac{\varrho}{r_0}c^2$, und demnach auch der Werth von $\left(r_0 r_0 - \frac{c^2}{u_0^2}\varrho r_0\right)s^2$, entweder ganz verschwindet oder doch sehr klein ist, so reducirt sich obige Gleichung im ersteren Falle auf

$$d\varphi = +\frac{\alpha_0 r_0}{u_0}\cdot ds\sqrt{\frac{1-\varrho s}{1-r_0 s}}; \tag{8.}$$

im letztern Falle, wo $\alpha_0$ sehr klein sein soll, jedoch ohne ganz zu verschwinden, werde $r_0\frac{\alpha_0^2}{u_0^2} = r_0 - \frac{c^2}{u_0^2}\varrho = \beta$ gesetzt und $\beta$ so klein angenommen, dass in Gleichung (7.), welche durch Einführung von $\beta$ in

$$d\varphi = \frac{\alpha_0 r_0}{u_0}\cdot ds\sqrt{\frac{(1-\varrho s)}{(1-r_0 s)(1+\beta s)}}$$

übergeht, $(1-\frac{1}{2}\beta s)$ für den Factor $\sqrt{\frac{1}{1+\beta s}}$ gesetzt werden kann, wodurch für (7.) folgende Gleichung erhalten wird:

$$d\varphi = \frac{\alpha_0 r_0}{u_0}\cdot(1-\tfrac{1}{2}\beta s)\,ds\sqrt{\frac{1-\varrho s}{1-r_0 s}}, \tag{9.}$$

woraus sich ergiebt, wenn $S = 1-(\varrho+r_0)s+\varrho r_0 s^2$ gesetzt wird,

$$\int d\varphi = \frac{\alpha_0 r_0}{u_0}\left[\int\frac{ds}{\sqrt{S}} - (\tfrac{1}{2}\beta+\varrho)\int\frac{s\,ds}{\sqrt{S}} + \tfrac{1}{2}\beta\varrho\int\frac{s^2 ds}{\sqrt{S}}\right].$$

Setzt man $b = -(\varrho + r_0)$ und $c = \varrho r_0$, so erhält man durch Ausführung der Integration *):

$$\frac{u_0}{\alpha_0 r_0}\int d\varphi = \left[1 + \frac{b}{4c}(\beta + 2\varrho) + \frac{\beta\varrho}{4c}\left(\frac{3b^2}{4c} - 1\right)\right]\frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \log\left(\sqrt{S} + s\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right) - \frac{1}{c}\left(\varrho + \frac{\beta}{2}\left(1 + \frac{3b}{4c}\varrho\right) - \frac{\beta\varrho}{4}s\right)\sqrt{S},$$

woraus, wenn man $m = \frac{\varrho}{r_0}$, $n = \frac{c}{u_0}$, folglich nach Gleichung (3.) $\frac{\alpha_0}{u_0} = \sqrt{(1 - mn^2)}$ setzt, erhalten wird:

$$\varphi_0 = \int_{s=0}^{s=\frac{1}{r_0}} d\varphi = \sqrt{(1 - mn^2)} \cdot \left[\frac{1-m}{2}\left(1 - \frac{1+3m}{8m}(1 - mn^2)\right)\sqrt{\frac{1}{m}} \cdot \log\frac{1+\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} + 1 + \frac{1-3m}{8m}(1 - mn^2)\right]. \quad (10.)$$

Hiernach ist folgende Tafel der Werthe von $\varphi_0$, für verschiedene Werthe von $m$ und $n$, berechnet worden:

| | $n = 1$ | $n = 2$ |
|---|---|---|
| $m = 1$ | 0 | |
| $\frac{1}{2}$ | 0,9658 | |
| $\frac{1}{3}$ | 1,1269 | |
| $\frac{1}{4}$ | 1,1479 | 0 |
| $\frac{1}{5}$ | 1,2272 | 0,7776 |
| $\frac{1}{6}$ | 1,2486 | 0,9688 |
| $\frac{1}{7}$ | 1,2629 | 1,0690 |
| $\frac{1}{8}$ | 1,2732 | 1,1302 |
| 0 | 1,2500 | 1,2500 |

Es ergiebt sich hieraus für alle Theilchen $e'$, $e''$... eines elektrischen Strahls, welche sich dem Theilchen $e$ aus grosser Entfernung mit der Geschwindigkeit $u_0$ nähern, dass sie, wenn sie bis zur Entfer-fernung $r_0$ gelangt sind, umkehren und sich von $e$ wieder entfernen, mit einer Geschwindigkeit, die in grosser Entfernung bis $u_0$ wieder wächst; dass aber die beiden Richtungen, in welchen beide Theilchen mit der Geschwindigkeit $u_0$ sich erst näherten und dann entfernten,

---

*) Nämlich

$$\int\frac{ds}{\sqrt{S}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \cdot \log\left(\sqrt{S} + s\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right),$$

$$\int\frac{s\,ds}{\sqrt{\;}} = -\frac{b}{2c\sqrt{c}}\log\left(\sqrt{S} + s\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right) + \frac{\sqrt{S}}{c},$$

$$\int\frac{s^2\,ds}{\sqrt{S}} = \frac{3b^2 - 4c}{8c^2\sqrt{c}}\log\left(\sqrt{S} + s\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right) + \frac{1}{2c}\left(s - \frac{3b}{2c}\right)\sqrt{s}.$$

einen Winkel $2\varphi_0$ mit einander bilden, der für die verschiedenen Paare nach Verschiedenheit des Werths von $r_0$ sehr verschieden ist.

Die Verschiedenheit des Winkels $2\varphi_0$, welcher der Reflexionswinkel genannt worden ist, für die verschiedenen Theilchenpaare nach Verschiedenheit des Werths von $r_0$, bildet das mit dem Namen der Zerstreuung elektrischer Strahlen durch Reflexion bezeichnete Faktum, und das gefundene Gesetz der Abhängigkeit des Reflexionswinkels $2\varphi_0$ von $m$ und $n$ giebt von dieser Zerstreuung genaue Bestimmung, wenn man beachtet, dass $n$ für alle Theilchen eines und desselben Strahls denselben von $u_0$, nach der Gleichung $n = \frac{c}{u_0}$, abhängigen Werth besitzt; ferner dass $m$ für jedes Theilchenpaar durch die 3 Gleichungen $m = \frac{\varrho}{r_0}$, $\alpha_0^2 = u_0^2 - \frac{\varrho}{r_0}c^2$ und $\alpha_0 r_0 = \alpha r$, nach Elimination von $r_0$ und $\alpha_0$, aus der relativen Geschwindigkeit $\alpha$ beider Theilchen in der Richtung senkrecht auf ihre Verbindungslinie, für jede beliebige Entfernung $r$ bestimmt werden kann, nämlich durch die Gleichung:

$$m^2 + \frac{\varrho^2 c^2}{r^2 \alpha^2} m = \frac{\varrho^2 u_0^2}{r^2 \alpha^2}.$$

## 8.

## Anwendung der Theorie der Zurückwerfung und Zerstreuung elektrischer Strahlen auf Lichtäther und Gase nach der Krönig-Clausius'schen Theorie der molecularen Stösse.

Die Zurückwerfung und Zerstreuung elektrischer Strahlen, welche aus elektrisch gleichartigen Theilchenpaaren bestehen, die im leeren Raume mit gleicher Wurfgeschwindigkeit sich nähern oder entfernen, führt zu einem ähnlichen Aggregatzustand des ganzen Systems solcher im leeren Raume befindlichen Theilchen, als in der Gastheorie nach Krönig und Clausius den Gasen zugeschrieben wird, blos mit dem Unterschiede, dass die in Wurfbewegung befindlichen Theilchen der Gase ponderable Theilchen sind, während jene elektrischen Theilchen als imponderabel bezeichnet zu werden pflegen, weil die Geltung des allgemeinen Gravitationsgesetzes von ihnen bisher wenigstens nicht bewiesen ist. Nur nach Mosotti's Gravitationstheorie (siehe Zöllner, Wissenschaftliche Abhandlungen. Erster Band. Nr. 2. Leipzig 1878), wonach alle Gravitationskräfte aus elektrischen Abstossungs- und Anziehungskräften resultiren, würden alle Wechselwirkungen, ponderabler

sowohl als elektrischer Theilchen, unter gemeinsame Bestimmungen gefasst werden, indem jedes ponderable Theilchen hienach ein elektrisches Doppeltheilchen (gleich einem Doppelsterne) wäre, nämlich ein positiv und ein negativ elektrisches Theilchen, die sich um einander drehten.

Nach dieser Mosotti'schen Vorstellung ponderabler Theilchen ergiebt sich von selbst, dass, wenn diese Theilchen sich im leeren Raum in Wurfbewegung befinden, wie nach der Krönig-Clausius'schen Gastheorie bei den Gasen angenommen wird; so würden aus den Gesetzen der elektrischen Wechselwirkung für diese im leeren Raum in Wurfbewegung befindlichen ponderablen Theilchen ähnliche Zurückwerfungs- und Zerstreuungsgesetze sich ergeben, als im vorigen Artikel für gleichartige elektrische in Wurfbewegung befindliche Theilchen gefunden worden sind, wie leicht erkannt wird, wenn man beachtet, dass jene Gesetze vorzugsweise für Paare von gleichartigen Theilchen gelten, die sich bei ihrer relativen Wurfbewegung bis auf eine Entfernung $r_0$ nähern, die $\varrho$ zur unteren Grenze hat. Denn zwei ponderable Molecule enthalten zwei Paare gleichartig elektrischer Theilchen, und für jedes dieser beiden Paare giebt es eine Entfernung $\varrho$, bis zu welcher die Theilchen des Paares nicht gelangen können, weil ihre Abstossungskraft unendlich werden würde, was nur dadurch verhindert wird, dass die beiden Theilchen durch die immer schneller wachsende Abstossungskraft zum Stillstand gebracht werden, und zwar bevor sie zur Entfernung $\varrho$ gelangen, worauf sie durch die in Folge ihrer Wechselwirkung fortdauernde Abstossungskraft sich wieder ebenso von einander entfernen, als sie sich vorher genähert hatten.

Es lassen sich hienach die im vorigen Artikel gefundenen Gesetze der Zurückwerfung und Zerstreuung für Strahlen gleichartig elektrischer Theilchen auch auf Strahlen ponderabler, nach Mosotti's Vorstellung zusammengesetzter, Molecule übertragen. Und sind nun diese ponderabeln Molecule Gasmolecule, so wird dadurch ein Aggregatzustand des Gases gebildet, welcher dem nach der Krönig-Clausius'schen Theorie den Gasen zugeschriebenen Aggregatzustande ganz entspricht, ohne dass es nöthig wäre, diesen ponderablen Gasmoleculen mit Krönig eine besondere Form und Elasticität, oder mit Clausius und Maxwell besondere, einer höheren Potenz der Entfernung umgekehrt proportionale Abstossungskräfte zuzuschreiben.

Giebt es aber einen Raum, z. B. den Weltraum, worin keine ponderabeln Molecule sich befinden; so leuchtet doch die Möglichkeit ein, dass sich in diesem Raume die Theilchen eines der beiden Bestandtheile dieser ponderabeln Molecule, d. h. entweder die positiv oder die negativ elektrischen Theilchen, befinden, die in Wurfbewegung ebenfalls einen Körper von besonderem Aggregatzustand bilden würden, der aber, weil er nur aus gleichartig elektrischen Theilchen bestände, nicht als ponderabler Körper bezeichnet werden dürfte, sondern als imponderabler Aether, für den aber ebenfalls die von Maxwell (Philos. Transact. 1867) für dynamische Medien entwickelten Bewegungsgesetze, namentlich die mit den Verbreitungsgesetzen der Lichtwellen übereinstimmenden Gesetze der Wellenverbreitung gelten würden. Eine solche Vorstellung von einem Raum erfüllenden Medium, bestehend aus wechselseitig sich abstossenden Theilchen, scheint ohne feste Raumbegrenzung nur unter Voraussetzung einer ganz unbegrenzten Erstreckung ins Unendliche möglich zu sein; jedoch scheint eine Beschränkung eines solchen Mediums auf einen endlichen Raum ohne feste Begrenzung nach Mosotti dadurch ermöglicht, dass dieses Medium einen Mosotti'schen ponderabeln Körper umgäbe, welcher auf dasselbe anziehend wirken, und es dadurch zusammenhalten würde.

## 9.

## Bewegungsgesetze zweier durch Wechselwirkung und äussere Einwirkung getriebenen elektrischen Theilchen.

Es soll nur der einfache Fall betrachtet werden, wo die äussere Einwirkung auf das Theilchen $e$ in einer constanten Kraft nach Richtung der verlängerten Geraden $e'e$ besteht, welche, mit der Summe $\varepsilon + m$ der eigenen Masse des Theilchens $e$ und der damit fest verbundenen ponderabelen Masse dividirt, den Quotienten $g$ giebt. — Die äussere Einwirkung auf das andere Theilchen $e'$ bestehe in einer Kraft, welche der aus der Wechselwirkung von $e$ und $e'$ resultirenden auf $e'$ wirkenden Kraft entgegengesetzt gleich ist.

Das Potential $V$ der beiden Theilchen $e$ und $e'$ in der Entfernung $r$ ist nach Art. 5, wenn man unter $V$ diejenige Function versteht, deren Differentialquotient $\frac{dV}{dr}$ die Abstossungskraft beider Theilchen darstellt,

$$V = \frac{ee'}{r}\left(\frac{dr^2}{c^2dt^2} - 1\right).$$

Hieraus folgt nun die Beschleunigung durch Wechselwirkung des Theilchens $e$ nach $r$, $= \frac{1}{\varepsilon + m} \cdot \frac{dV}{dr}$, und die des Theilchens $e'$ in entgegengesetzter Richtung $= \frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{dV}{dr}$, woraus die relative Beschleunigung beider Theilchen durch Wechselwirkung resultirt:

$$= \left(\frac{1}{\varepsilon + m} + \frac{1}{\varepsilon'}\right) \cdot \frac{dV}{dr}.$$

Hiezu kommt die Beschleunigung durch äussere Einwirkung, welche für $e$ in der Richtung $r$, $= g$ ist, und für $e'$, in derselben Richtung, $= \frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{dV}{dr}$, woraus die relative Beschleunigung beider Theilchen durch äussere Einwirkung resultirt:

$$= g - \frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{dV}{dr}.$$

Die ganze relative Beschleunigung ergiebt sich hieraus:

$$\frac{ddr}{dt^2} = \frac{1}{\varepsilon + m} \cdot \frac{dV}{dr} + g.$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $2dr$, so erhält man

$$2\frac{dr}{dt} \cdot \frac{ddr}{dt} = \frac{2}{\varepsilon + m} \cdot \frac{dV}{dr}\, dr + 2g\,dr,$$

und hieraus durch Integration zwischen den Grenzen $r = r_0$ und $r = r$, wo $r_0$ den Werth von $r$ zur Zeit, wo $\frac{dr}{dt} = 0$ ist, bezeichnet:

$$\frac{dr^2}{dt^2} = \frac{2}{\varepsilon + m}\left[\frac{ee'}{r}\left(\frac{dr^2}{c^2dt^2} - 1\right) + \frac{ee'}{r_0}\right] + 2g\,(r - r_0).$$

Bezeichnet man $\frac{dr}{c\,dt}$ mit $u$, und beachtet, dass $\pm \frac{ee'}{\varrho} = a = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'}\,cc$ ist, so erhält man

$$uu = \pm \frac{\varepsilon\varepsilon' \cdot \varrho}{(\varepsilon + m)(\varepsilon + \varepsilon')}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} + \frac{1}{r}\,uu\right) + \frac{2g}{cc}\,(r - r_0),$$

und hieraus

$$uu = \frac{\pm \frac{\varepsilon\varepsilon' \cdot \varrho}{(\varepsilon + m)(\varepsilon + \varepsilon')} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right) + \frac{2g}{cc}\,(r - r_0)}{1 \mp \frac{\varepsilon\varepsilon' \cdot \varrho}{(\varepsilon + m)(\varepsilon + \varepsilon')} \cdot \frac{1}{r}}.$$

Setzt man nun $\frac{\varepsilon\varepsilon' \cdot \varrho}{(\varepsilon + m)(\varepsilon + \varepsilon')} = \varrho'$, so ergiebt sich:

für positive Werthe von $ee'$, $uu = \frac{\varrho'}{\varrho' - r}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\left(1 + \frac{2g}{cc} \cdot \frac{rr_0}{\varrho'}\right)$, (1.)

für negative Werthe von $ee'$, $uu = \frac{\varrho'}{\varrho' + r}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)\left(1 - \frac{2g}{cc} \cdot \frac{rr_0}{\varrho'}\right)$, (2.)

oder, wenn $r$ und $r_0$ in Theilen von $\varrho'$ ausgedrückt werden:

für positive Werthe von $ee'$, $uu = \frac{1}{1 - r}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right) \cdot \left(1 + \frac{2g\varrho'}{cc} \cdot rr_0\right)$, (3.)

für negative Werthe von $ee'$, $uu = \frac{1}{1 + r}\left(1 - \frac{r}{r_0}\right) \cdot \left(1 - \frac{2g\varrho'}{cc} \cdot rr_0\right)$. (4.)

Es ergeben sich hieraus, wie man sieht, wenn $g = 0$ gesetzt wird, die Art. 6 gefundenen Gleichungen für zwei blos durch Wechselwirkung getriebene Theilchen; wenn dagegen $\varepsilon$ oder $\varepsilon' = 0$ gesetzt wird, wo $\varrho' = 0$ wird, erhält man aus (1.) und (2.)

$$uucc = \frac{dr^2}{dt^2} = 2g(r - r_0),$$

d. i. das Fallgesetz, worin $(r - r_0)$ den Fallraum bezeichnet.

Die graphische Darstellung dieser Bewegungsarten eines elektrischen Theilchenpaars durch Wechselwirkung und äussere Einwirkung ergiebt sich leicht für positive Werthe von $ee'$ aus der in der Figur zu S. 669 gegebenen graphischen Darstellung der Bewegungsarten eines Theilchenpaars durch Wechselwirkung allein, ohne äussere Einwirkung; es brauchen in obiger Figur, bei unveränderten Abscissen $r$, alle Ordinaten $\pm u$ der durch einen bestimmten Werth der Constante gegebenen Curve, nur im Verhältniss von $1 : \sqrt{\left(1 + \frac{2g\varrho'}{cc} r_0 r\right)}$ vergrössert zu werden, um diejenige Curve zu erhalten, welche die Bewegungen des Theilchenpaars unter den angegebenen äussern Einwirkungen darstellt, wobei nur zu beachten ist, dass $r_0$ und $r$ in Theilen von $\varrho'$, statt von $\varrho$, dargestellt sind, und dass $\varrho' : \varrho = \frac{\varepsilon\varepsilon'}{\varepsilon + \varepsilon'} : \varepsilon + m$, d. i. nahezu $= \varepsilon : m$, für kleine Werthe von $\varepsilon$, sich verhält.

Man ersieht hieraus, dass auch bei äusserer Einwirkung wie die oben angegebene, für eine bestimmte Entfernung $\varrho'$ gleichartiger Theilchen von einander, ihre relative Beschleunigung durch Wechselwirkung zwar nach der Formel unendlich gross sein würde; dass aber diese Entfernung $\varrho'$ niemals eintreten könne, aus dem im vorigen Artikel angeführten Grunde, der auch hier stattfindet. Denn sollte der Fall, wo die Entfernung der Theilchen $= \varrho'$ wäre, wirklich eintreten; so müsste er eintreten, entweder indem beide Theile sich einander näherten oder von einander entfernten. Findet nun während der Annäherung Abstossung, während der Entfernung Anziehung statt, und wächst jene Abstossung und diese Anziehung nach dem angeführten Gesetz in der Art, dass sie für die Entfernung $\varrho'$ unendlich werden würde; so werden die Theilchen in keinem von beiden Fällen bis zur Entfernung $\varrho'$ gelangen, sondern zum Stillstand und zur Umkehr gebracht werden, ehe sie dahin gelangt sind. Dies findet nach unserm Gesetze statt und es leuchtet daraus der Grund ein, warum

der Fall unendlicher Beschleunigung nach diesem Gesetz wirklich niemals eintreten kann.

Es bietet also auch der in diesem Artikel erörterte Fall der Verbindung von Wechselwirkung mit äusserer Einwirkung keinen Grund dar zu Bedenken gegen das aufgestellte Gesetz, und es ist daher gar nicht nöthig, zur Vertheidigung dieses Gesetzes in der Annahme Zuflucht zu suchen, dass, weil $\varrho$ und $\varrho'$ Moleculardistanzen seien, besondere Molecularkräfte noch in Betracht kommen können, durch welche der Fall unendlicher Beschleunigung in den Molecularentfernungen $\varrho$ oder $\varrho'$ beseitigt würde.

Es bleiben übrigens die Entfernungen $\varrho$ und $\varrho'$ stets Molecularentfernungen, weil nämlich, wenn auch durch Vergrösserung der auf einander wirkenden elektrischen Massen $\varrho$ vergrössert werden kann, doch wenigstens eine von den beiden auf einander wirkenden elektrischen Massen an eine ponderable Masse gebunden sein wird, welche mit ihr fortbewegt werden muss, wie in dem eben betrachteten Falle, wodurch eine Verkleinerung von $\varrho$ eintritt, im Verhältniss der ganzen Masse $\varepsilon + m$ zur elektrischen $\varepsilon$, wo $m$ eine ponderable Masse bezeichnet, gegen welche $\varepsilon$ verschwindet.

Der in diesem Artikel betrachtete Fall zweier durch Wechselwirkung und äussere Einwirkung getriebenen elektrischen Theilchen ist der nämliche, auf welchen sich der von Helmholtz erhobene Einwand bezog, welchen Neumann in seiner Abhandlung, S. 91 ff. dieses Bandes, einer nähern Prüfung unterworfen hat.

Neumann erblickte S. 92 in dem von Helmholtz gerügten »absurden Resultate unendlicher Beschleunigung«*) in der sogenannten kritischen Entfernung, ein neues Argument dafür, dass mein elektrisches Grundgesetz (ähnlich wie das Newton'sche) für ausserordentlich kleine Entfernungen einer gewissen Modification bedürfe; erhob indessen selbst den Einwand dagegen, dass jener Fall unendlicher Beschleunigung sich so einrichten lasse, dass nur grosse Entfernungen in Betracht kämen, welche eine Modification des Resultats durch Molecularkräfte ausschlössen.

*) Eine unendliche Beschleunigung kommt bei Betrachtung zusammenstossender Körper häufig vor und wird in der Mechanik nicht als absurd betrachtet, sondern als Grenzfall bei wachsender Elasticität. Kommt dieser Grenzfall niemals vor, so gilt das nämliche auch von obigem Falle, wie sogleich gezeigt werden wird.

Von diesen Fällen, wo nur grosse Werthe als kritische Entfernungen in Betracht kämen, sei nur, bemerkt Neumann, die Wirklichkeit oder Realisirbarkeit nicht nachgewiesen, ohne welche diese Fälle nicht als Controle eines physikalischen Gesetzes benutzt werden könnten, und der von Helmholtz erhobene Einwand würde ernstliche Bedeutung nicht früher gewinnen, als bis dieser Nachweis geliefert worden sei.

Dagegen ist nun in diesem und im vorigen Artikel der Beweis geliefert worden, dass die Möglichkeit des Falls, in welchem nach Helmholtz das »absurde Resultat unendlicher Beschleunigung« stattfinden würde, dadurch ganz ausgeschlossen werde, dass die beiden Theilchen, ehe sie zur kritischen Entfernung gelangen können, sich derselben vorher genähert haben müssen, entweder aus kleinerer oder aus grösserer Entfernung; dass sie aber wegen der, bei der Annäherung, ins Unendliche wachsenden Beschleunigung rückwärts, d. i. Verlangsamung, welche stattfindet, sowohl wenn die Theilchen aus kleinerer als auch wenn sie aus grösserer Entfernung der kritischen Entfernung nahen, zur kritischen Entfernung niemals gelangen können, woraus folgt, dass das von Helmholtz gerügte »absurde Resultat unendlicher Beschleunigung« gar nicht existirt, und dass nur ein von Helmholtz begangener und bisher nicht widerlegter Irrthum dazu geführt hat. — Auf die Grösse der kritischen Entfernung kommt übrigens hiebei gar nichts an. —

Doch sollen in den beiden nächsten Artikeln noch ein Paar Fälle näher erörtert werden, in denen man eine sehr bedeutende Vergrösserung der sogenannten kritischen Entfernung erreichen zu können geglaubt hat, und welche durch die daran geknüpften Folgerungen besonderes Interesse auf sich gezogen haben.

## 10.

## Bewegungsgesetze eines in elektrischer Hohlkugel eingeschlossenen, durch elektrische Wechselwirkung und äussere Einwirkung getriebenen Elektricitätstheilchens.

In diesen Abhandlungen hat S. 103—106 dieses Bandes C. Neumann folgenden Fall besonders hervorgehoben und erörtert:

»Es sei gegeben eine gleichmässig mit Elektricität belegte und fest

aufgestellte Kugelschaale (vom Radius $\alpha$). Im Innern dieser Schaale befinde sich ein mit Elektricität belegter, um seine fest aufgestellte horizontale Axe drehbarer Cylinder (dessen Radius $= a$ und dessen Trägheitsmoment $= \mathfrak{M}$ sei). Auf diesen Cylinder sei ein Faden aufgewickelt, und das freie Ende dieses Fadens mit einem Gewicht $Mg$ beschwert. — Es soll die Bewegung, welche der Cylinder unter der Einwirkung der elektrischen Kugelschaale einerseits und unter der Einwirkung des Gewichts $Mg$ andererseits annehmen wird, näher untersucht werden.«

»Dabei soll vorausgesetzt sein, dass der Cylinder mit der in ihm vorhandenen elektrischen Materie starr und unlöslich verbunden sei, und dass Gleiches auch stattfinde bei der Kugelschaale.«

Neumann ist für diesen Fall, wenn dabei die elektrischen Ladungen des Cylinders und der Kugelschaale constant angenommen werden, schliesslich Seite 106 zu folgender Gleichung gelangt:

$$L\vartheta'\vartheta' = Mga\vartheta + \text{Const.},$$

oder, nach $t$ differentiirt,

$$2L\vartheta'' = Mga,$$

wo $\vartheta$ den Drehungswinkel, $\vartheta'$ die Drehungsgeschwindigkeit und $\vartheta''$ die Drehungsbeschleunigung des Cylinders bezeichnet, und, wenn $H$ die Dichtigkeit der Elektricität auf der Kugelschale und $\Sigma e$ die Ladung der Cylinderoberfläche bezeichnet,

$$L = \frac{Maa + \mathfrak{M}}{2} - \frac{4\pi\alpha H \cdot aa\Sigma e}{3cc}$$

gesetzt und constant angenommen ist.

Neumann hat hieran nun folgenden Ausspruch geknüpft: »Ist die Constante $L =$ pos., so wird das angehängte Gewicht $Mg$ mit beschleunigter Geschwindigkeit sinken. Ist $L = 0$, so entsteht eine unendlich grosse Beschleunigung. Ist endlich $L =$ neg., so wird jenes Gewicht mit beschleunigter Geschwindigkeit gehoben werden. In diesem letztern Falle könnte, falls man den Faden unendlich lang annimmt, das Gewicht unendlich hoch emporgehoben, also unendlich grosse Arbeit geleistet werden.«

»Untersucht man aber, ob die Fälle $L = 0$ und $L =$ neg. wirklich eintreten können, so stösst man auf dieselben Schwierigkeiten wie früher.« — —

Von diesen hier von Neumann angedeuteten Schwierigkeiten mögen folgende zwei besonders hervorgehoben werden, nämlich

erstens diejenige, welche von den durch die Natur der Körper den elektrischen Scheidungskräften gesetzten Schranken herrühren, zweitens die mit der Annahme eines constanten Werths von $L$ verbundenen Schwierigkeiten, welche darin bestehen, dass mit dieser Annahme die Voraussetzung bestimmter unveränderlicher Ladungen der Kugel und des Cylinders verbunden ist.

**1) Schwierigkeiten, welche von den durch die Natur der Körper den elektrischen Scheidungskräften gesetzten Schranken herrühren.**

Bezeichnet man die Elektricität des Cylinders und der Kugelschaale kurz mit $e$ und $e'$ (statt mit $\Sigma e$ und $4\pi\alpha^2 H$), und setzt das Trägheitsmoment des Cylinders $\mathfrak{M} = maa$, so ist

$$L = \left(\frac{M+m}{2} - \frac{ee'}{3\alpha cc}\right) aa;$$

folglich ist für $L = 0$

$$ee' = \frac{3}{2}\alpha cc(M+m).$$

Nun ist $\frac{2e'}{\alpha}$ die zur Ladung $e'$ einer Kugelschaale erforderliche Scheidungskraft*); die Grösse dieser Scheidungskraft ist

---

*) Die von einer mit der Elektricität $e'$ gleichförmig belegten Kugelschaale vom Halbmesser $\alpha$ auf einen ausserhalb befindlichen linearen Leiter von unbegrenzter Länge $l$, welcher in der Verlängerung eines Radius liegt, ausgeübte Scheidungskraft ist die Differenz der auf die in jeder Längeneinheit des Leiters befindliche Einheit positiver Elektricität ausgeübten Abstossungskraft $= e'\int_0^l \frac{dx}{(\alpha+x)^2}$, und der auf die in jeder Längeneinheit befindliche Einheit negativer Elektricität ausgeübten Anziehungskraft $= -e'\int_0^l \frac{dx}{(\alpha+x)^2}$; folglich

$$= 2e'\int_0^l \frac{dx}{(\alpha+x)^2} = 2e'\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+l}\right),$$

woraus sich bei unbegrenztem Werthe von $l$ die Scheidungskraft $= \frac{2e'}{\alpha}$ ergiebt, wie oben angegeben worden ist.

Ist in diesem Leiter eine Säule eingeschaltet, durch welche die Kugelladung unverändert erhalten wird, so wird dadurch bewiesen, dass die von der Kugelladung und die von der Säule auf den Leiter ausgeübten Scheidungskräfte entgegengesetzt gleich sind, wodurch auch die Scheidungskraft der Säule bestimmt wird, nämlich $= -\frac{2e'}{\alpha}$.

aber beschränkt und hängt von den in der Natur vorhandenen Scheidungsmitteln ab; denn bei aller Mannichfaltigkeit dieser Mittel giebt es doch kein Mittel für unendlich grosse Scheidungskräfte.

Soll nun $L = 0$ sein, so muss nach obiger Gleichung

$$\frac{2e'}{\alpha} = 3cc \,.\, \frac{M+m}{e},$$

oder es muss, da $c = 439450 \,.\, 10^6$ ist,

$$\frac{2e'}{\alpha} \cdot \frac{e}{2(M+m)} = 289670 \,.\, 10^{18} \text{ sein.} —$$

Es wird schwer halten, einen mit fester Drehungsaxe versehenen geladenen Cylinder darzustellen, dessen Ladung $e$, nach absolutem Maasse, grösser wäre als die in Milligrammen ausgedrückte ponderable Masse $2m$; fügt man aber zu $2m$ noch die doppelte Masse des Gewichts $= 2M$ hinzu, so kann sicher $\frac{e}{2(M+m)}$ als echter Bruch angenommen werden, woraus folgt, dass zur Ladung der Kugelschaale, wenn $L = 0$ werden sollte, eine Scheidungskraft erforderlich wäre, die nach mechanischem Maasse $= \frac{2e'}{\alpha} > 289670 \,.\, 10^{18}$ sein müsste, d. i. eine Scheidungskraft, welche die grösste von den in den Elektrodyn. Maassbest. Bd. V dieser Abhandlungen S. 243—250 gemessenen, nämlich $= 2\frac{6410,5}{11,567} = 1108$, mindestens 261 Trillionen Mal überträfe. Dass es uns noch unbekannte Körper in der Natur gebe, welche die Möglichkeit so grosser Scheidungskräfte gewährten, darf mit Recht bezweifelt werden. Eine Vergrösserung der beiden Coefficienten $\frac{e}{M+m}$

---

Es leuchtet ferner aber ein, dass, wenn die Kugelschaale noch nicht geladen wäre, sie durch die Säule geladen werden würde, und dass diese Ladung wachsen würde, bis sie $= e'$ geworden wäre, bei einem Kugelhalbmesser $= \alpha$, d. h. bis die Scheidungskraft der Kugelladung $= \frac{2e'}{\alpha}$ geworden wäre und die Scheidungskraft der Säule aufhöbe.

Ferner folgt hieraus, dass zwei Kugeln mit den Ladungen $e'$ und $ne'$, deren Halbmesser $\alpha$ und $n\alpha$ sind, deren Potentiale folglich für alle Punkte im Innern, nämlich $\frac{e'}{\alpha}$ und $\frac{ne'}{n\alpha}$, einander gleich sind, leitend verbunden sein können, ohne dass irgend ein Theil der Ladung von der einen Kugel zur andern überginge, in Uebereinstimmung mit dem Satze, dass bei Gleichheit der Potentiale im Innern zweier Leiter kein Uebergang der Elektricität bei leitender Verbindung der Leiter stattfinde. —

Noch ist zu bemerken, dass obige Scheidungskräfte in mechanischem Maasse ausgedrückt sind und mit $155370 \,.\, 10^6 = \frac{c}{2\sqrt{2}}$ zu multipliciren sind, um sie in magnetischem Maasse ausgedrückt zu erhalten.

und $\frac{e'}{\alpha}$ um das 10- oder 100fache würde gar nicht in Betracht kommen; ist in der Natur der Körper nicht die Möglichkeit gegeben, das Product dieser beiden Coefffcieten viele Trillionen Mal zu vergrössern, so bleibt die Darstellung des Falls $L = 0$ immer unmöglich.

Wäre aber auch in der Natur der Körper die Möglichkeit so grosser Scheidungskräfte gegeben, so würden doch auch mit diesen Scheidungskräften die geforderten Ladungen nicht zu effectuiren sein, weil kein Isolator existirt, welcher fest genug wäre, um den Expansivkräften solcher Ladungen zu widerstehen, welche stärker wie Pulverladungen explodiren und Alles zerstören würden.

Gäbe es endlich aber auch so feste und vollkommene Isolatoren, welche selbst den ungeheuern Expansivkräften solcher Ladungen zu widerstehen vermöchten, und könnte auch demnach die Kugelladung bis zu der geforderten Grösse gebracht werden, so würde zwar alsdann $L = 0$ werden, aber die Beschleunigung $\vartheta''$ würde auch dann nicht unendlich werden, auch nicht nach dem der obigen Rechnung zu Grunde liegenden Gesetze, wie im folgenden Artikel nachgewiesen werden soll.

## 11.

## Fortsetzung.

### 2) Schwierigkeiten, welche mit der Annahme eines constanten Werths von $L$ verbunden sind.

Abgesehen von dem im vorigen Artikel erörterten Zweifel, ob, bei den durch die Natur der Körper den elektrischen Scheidungskräften gesetzten Schranken, $L = 0$ werden könne, bleibt noch die Frage zu erörtern übrig, ob das für $L = 0$ genau bestimmte Product der beiden Ladungen $e$ und $e'$ constant erhalten werden könne, was angenommen werden muss, wenn $L$ constant und zwar $= 0$ sein soll. Es fragt sich ferner, welchen Einfluss es haben würde, wenn eine der beiden Ladungen veränderlich wäre.

Der Werth von $L$ hängt von den Ladungen $e$ und $e'$ des Cylinders und der Kugelschaale ab, und zwar kommt es, wenn der Werth von $L = 0$ constant sein soll, nicht blos auf die Grösse der Ladungen $e$ und $e'$ an, sondern auch auf die Art der Herstellung eines genau bestimmten Werthes.

Wäre auch die eine von beiden Ladungen, nämlich die Cylinderladung $e$, constant gegeben, so müsste doch die Ladung der Kugelschaale $e'$ veränderlich bleiben, um durch ihr allmähliges Wachsthum dahin zu gelangen, dass $L=0$ würde. Die Ladung $e'$ würde aber auch dann nicht plötzlich aufhören sich zu ändern, um von nun an vollkommen constant zu bleiben, sondern sie würde ohne Zweifel innerhalb gewisser Grenzen immer schwanken, weil die Herstellung der geforderten Ladung mit absoluter Genauigkeit gar nicht möglich ist, sondern nur innerhalb gewisser weiterer oder engerer Grenzen. Die Ladung $e'$ würde folglich stets als eine Function der Zeit zu betrachten sein, welche für irgend einen kürzeren Zeitraum durch $e'=p+qt$ dargestellt werden kann.

Für diesen Fall, wo $e'$ variabel ist, gilt nun die von Neumann S. 105 dieses Bandes aufgestellte Gleichung, nämlich:

$$T=P-U+Mga\vartheta+\text{Const.},$$

wo $T=\frac{M+m}{2}\cdot aa\vartheta'\vartheta'$, $P=\frac{ee'}{3\alpha cc}\cdot aa\vartheta'\vartheta'+\text{Const.}$ und $U=\frac{ee'}{\alpha}$, was also mit $e'$ zugleich sich ändert.

Setzt man nun $e'=p+qt$ und $L=\left(\frac{M+m}{2}-\frac{ee'}{3\alpha cc}\right)aa$, so erhält man

$$L\vartheta'\vartheta'=Mga\vartheta-\frac{e}{\alpha}(p+qt)+\text{Const.},$$

oder, nach $t$ differentiirt,

$$2L\vartheta''=Mga-\frac{eq}{\alpha\vartheta'},$$

woraus für $L=0$ folgt entweder $\vartheta''=\infty$ oder (wenn $\vartheta''$ nicht unendlich ist), $\vartheta'=\frac{eq}{Mga\alpha}$.

Diese Alternative wird nun entschieden, wenn man beachtet, dass $L$ mit der Zeit $t$ variirt. Man rechne die Zeit $t$ von dem Augenblicke an, wo nach der Gleichung $e'=p+qt$ $L=0$ sein würde, woraus folgt

$$\frac{M+m}{2}=\frac{ep}{3\alpha cc}.$$

Es ist alsdann nach Verlauf des Zeitelements $\delta$

$$L=-\frac{eq\delta}{3\alpha cc}aa,$$

folglich, wenn dieser Werth für $L$ in obiger Gleichung gesetzt wird,

$$2L\vartheta''=-\frac{2eq\delta}{3\alpha cc}aa\cdot\vartheta''=Mga-\frac{eq}{\alpha\vartheta'}.$$

Da nun für $L=0$ und $t=0$ bei endlichem Werthe von $\vartheta''$

$$\vartheta'=\frac{eq}{Mga\alpha}$$

gefunden worden ist, und der Werth von $\vartheta'$ für $t=\delta$, wenn $\delta$ ver-

schwindend klein ist, nicht merklich verschieden ist von dem Werthe von $\vartheta''$ für $t = 0$, so ergiebt sich:

$$2L\vartheta'' = -\frac{2eq\delta}{3\alpha cc}aa\cdot\vartheta'' = Mga - \frac{eq}{a}\cdot\frac{Mgaa}{eq} = 0,$$

wonach $\vartheta'' = 0$ ist.

Dieser Werth $\vartheta'' = 0$ gilt nun, so klein auch $q$ sein möge, er gilt folglich auch noch, wenn $q = 0$ ist.

Man sieht hieraus, wenn der Fall, dass $L = 0$ sei, nur der Uebergang ist von kleineren Werthen zu grösseren oder umgekehrt, dass die Beschleunigung $\vartheta''$ für $L = 0$ keineswegs unendlich, sondern $= 0$ ist, wodurch alle von der behaupteten unendlichen Beschleunigung hergenommenen Einwände beseitigt werden.

## 12.

## Schluss.

Schon bevor Neumann den im vorigen Artikel betrachteten Fall bemerkt und untersucht hatte, war von Helmholtz die Aufmerksamkeit auf einen ähnlichen Fall gerichtet worden, wo nämlich ein elektrischer Massenpunkt $\varepsilon$ im Innern einer elektrischen Kugelfläche sich befindet, und es war von ihm das überraschend einfache Resultat gefunden worden, dass die Componenten der von der elektrischen Kugelfläche auf $\varepsilon$ ausgeübten Kraft den Beschleunigungen $x''$, $y''$, $z''$, mit einem constanten Factor multiplicirt, gleich seien.

Es war ferner von Helmholtz (Borchardt's Journal, Bd. 75) aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung die Gleichung der lebendigen Kraft entwickelt worden, die sich für den Fall blos eines beweglichen Massenpunkts $\mu$ mit dem elektrischen Quantum $\varepsilon$ in einem Raume ergiebt, welcher von einer gleichmässig mit Elektricität belegten Kugeloberfläche vom Halbmesser $R$ begrenzt ist, nämlich die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\left(\mu - \frac{8\pi}{3cc}\cdot R\varepsilon\varepsilon'\right)qq - V + C = 0\ ^{*)},$$

wo $\varepsilon'$ das Quantum Elektricität auf der Flächeneinheit der Kugelober-

*) Der Factor von $\frac{1}{2}qq$ in obiger Gleichung ist nicht $\left(\mu - \frac{4\pi}{3cc}R\varepsilon e\right)$, wie Helmholtz angegeben, sondern $\left(\mu - \frac{8\pi}{3cc}R\varepsilon\varepsilon'\right)$. Vergl. Neumann, § 3 und 7 seiner Abhandlung in diesem Bande.

fläche, $q$ die Geschwindigkeit des Massenpunkts $\mu$ in seiner Bahn $s$, also $q = \frac{ds}{dt}$, und $V$ das Potential der nicht elektrischen Kräfte bezeichnet. Es ergiebt sich aus dieser Gleichung durch Differentation nach $s$:

$$\mu q \frac{dq}{ds} - \left(\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon' \cdot q\frac{dq}{ds} + \frac{dV}{ds}\right) = 0,$$

wo $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon' \cdot q\frac{dq}{ds}$ die auf $\mu$ in Richtung der Bahn $s$ wirkende elektrische Kraft, und $\frac{dV}{ds}$ die auf $\mu$ in derselben Richtung wirkende nicht elektrische Kraft ist.

Da nun $q = \frac{ds}{dt}$ die Geschwindigkeit des Punkts $\mu$ in seiner Bahn $s$ bezeichnet und $q\frac{dq}{ds} = \frac{dq}{dt} = \frac{dds}{dt^2}$ die Beschleunigung von $\mu$ in seiner Bahn ist, so ergiebt sich, dass die aus obiger Gleichung gefundene, auf $\mu$ wirkende elektrische Kraft $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon' \cdot q\frac{dq}{ds}$ das Product dieser Beschleunigung $q\frac{dq}{ds}$ multiplicirt mit dem constanten Factor $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon'$ ist, ganz in Uebereinstimmung mit dem oben angeführten Resultate.

Ist nun die auf $\mu$ wirkende elektrische Kraft der Beschleunigung $q\frac{dq}{ds}$ des Punkts $\mu$ proportional, auf welchen zwei Kräfte wirken, nämlich ausser der angegebenen elektrischen Kraft $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon' \cdot q\frac{dq}{ds}$, die nicht elektrische Kraft $\frac{dV}{ds}$; so leuchtet ein, dass $q\frac{dq}{ds}$ durch Division der Summe dieser beiden Kräfte mit $\mu$ erhalten wird, nämlich:

$$q\frac{dq}{ds} = \frac{\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon' \cdot q\frac{dq}{ds} + \frac{dV}{ds}}{\mu},$$

woraus gefunden wird

$$q\frac{dq}{ds} = \frac{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{dV}{ds}}{1 - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon'}.$$

Substituirt man diesen Werth für $q\frac{dq}{ds}$ im Ausdrucke der auf $\mu$ wirkenden elektrischen Kraft, so erhält man einen von der Beschleunigung unabhängigen Ausdruck dieser Kraft, nämlich

$$\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon' \cdot q\frac{dq}{ds} = \frac{\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon'}{\mu - \frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon'} \cdot \frac{dV}{ds},$$

woraus man leicht erkennt, dass diese elektrische Kraft in der Bahn $s$ nach derselben Seite gerichtet ist, wie die nicht elektrische Kraft $\frac{dV}{ds}$, so lange als $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon' < \mu$ ist; dass sie aber die entgegengesetzte

Richtung hat, sobald als $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon' > \mu$ wird. Während aber $\frac{8\pi}{3cc} R\varepsilon\varepsilon'$, indem es wächst, $= \mu$ wird, wächst gleichzeitig die elektrische Kraft stetig bis $+\infty$, springt alsdann plötzlich über von $+\infty$ zu $-\infty$, und wächst mit $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon'$, was $> \mu$ geworden, wieder stetig von $-\infty$ bis zu 0. Wenn dagegen $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon'$, indem es abnimmt, $= \mu$ wird, nimmt gleichzeitig die elektrische Kraft stetig bis $-\infty$ ab, springt alsdann plötzlich von $-\infty$ zu $+\infty$, und nimmt, nachdem $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon' < \mu$ geworden, wieder stetig ab, von $+\infty$ bis zu 0.

Sowohl das Wachsthum einer solchen Kraft ins Unendliche, als auch der Wechsel ihrer Richtung, im Augenblicke, wo sie unendlich gross geworden ist, könnte nun wohl als eine Verletzung der in der Natur sonst herrschenden Stetigkeit erscheinen und zur Bestreitung allgemeiner Gültigkeit des Gesetzes, woraus solche Stetigkeitsverletzungen gefolgert werden, angeführt werden. Indessen lässt sich leicht beweisen, dass aus jenem Gesetze diese Folgerungen mit Recht gar nicht gezogen werden können, weil nämlich diese Folgerungen noch an ganz unerfüllbare Bedingungen geknüpft sind, wie schon in Poggendorff's Annalen Bd. 156, Seite 29 bemerkt worden*), was einer nähern Nachweisung zu bedürfen scheint, die hier schliesslich noch gegeben werden soll.

Die Beschleunigung von $\mu$ durch die oben angeführte elektrische und nicht elektrische Kraft hat sich aus der von Helmholtz aus dem Grundgesetze der elektrischen Wirkung abgeleiteten Gleichung ergeben, nämlich:

$$q\frac{dq}{ds} = \frac{\frac{dV}{ds}}{\mu - \frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon'},$$

*) Es heisst an der angeführten Stelle: Ein solcher Sprung in der Grösse und Richtung der elektrischen Kraft, nämlich von $+\infty$ zu $-\infty$, tritt wirklich nach dem Gesetze gar nicht ein, weil nämlich die Masse $\mu$ mit ihrer Ladung $e$, in Folge der immer wachsenden Beschleunigung, gar nicht im Innern des Kugelraums so lange verweilen kann, bis $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon' = \mu$ geworden ist, sondern schon früher bis an die vom festen Isolator gebildete Kugeloberfläche getrieben worden sein müsste, durch deren Widerstand Ruhe wiederhergestellt worden wäre, und die in der Rechnung vorausgesetzten Verhältnisse gar nicht mehr stattfänden.

wo die Beschleunigung von $\mu$, statt mit $q\frac{dq}{ds}$, auch mit $\frac{dq}{dt}$ oder $\frac{dds}{dt^2}$ bezeichnet werden kann.

Diese Beschleunigung ist unendlich gross, wenn der Werth von $\varepsilon' = \frac{3cc\mu}{8\pi R\varepsilon}$ ist. Die Bestimmung dieses Werths von $\varepsilon'$, welcher mit $\eta$ bezeichnet werden soll, setzt hiernach voraus, dass der Werth von $\varepsilon$ schon vorher bestimmt sei. Es könnte zwar scheinen, dass auch umgekehrt $\eta$ vorher bestimmt werden könnte, indem die Bestimmung von $\varepsilon$ abhängig von der Kenntniss von $\eta$ gemacht würde; indess leuchtet ein, dass, nachdem die Kugelschaale geladen und $\eta$ bestimmt worden wäre, keine Ladung im Innern der Kugel, also auch nicht die Ladung $\varepsilon$ des Theilchens $\mu$, mehr vorgenommen werden könnte.

Ist also die Ladung $\varepsilon$ des Theilchens $\mu$ im Innern der Kugel gegeben, so kann die Ladung der Kugeloberfläche, bei welcher die Kraft unendlich wird, voraus berechnet werden, nämlich für jede Flächeneinheit, wie schon angegeben worden ist,

$$\eta = \frac{3cc}{8\pi} \cdot \frac{\mu}{R\varepsilon};$$

es würde aber die wirkliche Herstellung dieser Ladung nothwendig mit einem allmähligen Wachsthum der Ladung von $\varepsilon' = 0$ bis $\varepsilon' = \eta$ verbunden sein.

Dies vorausgesetzt, bezeichne man die Zeit, wo $\varepsilon' = \eta$ geworden ist, mit $t = 0$, und die Zeit, wo $\varepsilon' = 0$ war, mit $t = -\theta$. Setzt man nun ferner das Wachsthum der Ladung $\varepsilon'$ der Zeit proportional, nämlich

$$\varepsilon' = \eta\left(1 + \frac{t}{\theta}\right),$$

und nimmt man, zur Vereinfachung der Betrachtung, den Mittelpunkt der Kugel zum Anfangspunkt der Bahn $s$, wo das Theilchen $\mu$ zur Zeit $t = -\theta$ (d. i. zur Zeit, wo $\varepsilon' = 0$ ist) sich in Ruhe befindet, also mit $\varepsilon' = 0$ zugleich auch $s = 0$ und $q = 0$ ist, und nimmt man endlich die auf $\mu$ wirkende nicht elektrische Kraft $\frac{dV}{ds} = a$ constant an; so ergiebt sich aus der angeführten Gleichung, nämlich aus

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\frac{dV}{ds}}{\mu - \frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon'},$$

nach den Substitutionen $\varepsilon' = \eta\left(1 + \frac{t}{\theta}\right)$, $\mu = \frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\eta$ und $\frac{dV}{ds} = a$,

$$dq = -\frac{a\theta}{\mu} \cdot \frac{dt}{t}.$$

46*

Das Integral dieser Gleichung kann geschrieben werden:

$$q = -\frac{a\theta}{2\mu}\cdot\log c^2 t^2.$$

Hieraus folgt, da $q = 0$ für $t = -\theta$ ist, $c^2 = \frac{1}{\theta^2}$.

Substituirt man diesen Werth für $c^2$ in der vorhergehenden Gleichung, und setzt $\frac{ds}{dt}$ für $q$, so erhält man

$$ds = -\frac{a\theta}{2\mu}\cdot\log\frac{tt}{\theta\theta}\cdot dt.$$

Hieraus folgt durch Integration

$$s = \frac{a\theta t}{\mu}\left(1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{tt}{\theta\theta}\right) + C.$$

Da nun $s = 0$ für $t = -\theta$ ist, so ergiebt sich $C = \frac{a\theta\theta}{\mu}$; folglich

$$s = \frac{a\theta\theta}{\mu}\left[1 + \frac{t}{\theta}\left(1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{tt}{\theta\theta}\right)\right].$$

Die beiden gefundenen Formeln, welche, wenn die auf $\mu$ wirkende nicht elektrische Kraft $a = g\mu$ gesetzt wird, geschrieben werden können:

$$q = -\frac{g\theta}{2}\cdot\log\frac{tt}{\theta\theta},$$

$$s = g\theta\theta\left[1 + \frac{t}{\theta}\left(1 - \tfrac{1}{2}\log\frac{tt}{\theta\theta}\right)\right],$$

lassen sich nun leicht in tabellarischer Uebersicht auf folgende Weise darstellen, worin $e$ die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet:

| $\frac{t}{\theta}$ | $\frac{s}{g\theta\theta}$ | $\frac{q}{g\theta}$ | $\frac{\varepsilon'}{\eta} = \left(1 + \frac{t}{\theta}\right)$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $0$ | $0$ | $0$ |
| $-e^{-1}$ | $1 - 2e^{-1}$ | $1$ | $1 - e^{-1}$ |
| $-e^{-2}$ | $1 - 3e^{-2}$ | $2$ | $1 - e^{-2}$ |
| . | . | . | . |
| . | . | . | . |
| . | . | . | . |
| $0$ | $1$ | $\infty$ | $1$ |
| . | . | . | . |
| . | . | . | . |
| . | . | . | . |
| $+e^{-2}$ | $1 + 3e^{-2}$ | $2$ | $1 + e^{-2}$ |
| $+e^{-1}$ | $1 + 2e^{-1}$ | $1$ | $1 + e^{-1}$ |
| $+1$ | $2$ | $0$ | $2$ |
| $+e$ | $1$ | $-1$ | $1 + e$ |
| $+e^2$ | $1 - e^2$ | $-2$ | $1 + e^2$ |

Man sieht aus dieser Uebersicht, dass das Theilchen $\mu$, welches durch die von der nicht elektrischen Kraft herrührenden Beschleunigung $g$ in der Zeit $\theta$ den Weg $\frac{1}{2}g\theta\theta$ zurückgelegt haben würde, unter Mitwirkung der elektrischen Kraft den doppelten Weg macht, und, während es ohne elektrische Kraft die Geschwindigkeit $g\theta$ erreicht hätte, mit elektrischer Kraft zu unendlicher Geschwindigkeit gelangt.

Mit dieser erlangten unendlich grossen Geschwindigkeit legt es aber nicht das kleinste endliche Wegelement zurück, in Folge davon, dass die unendlich gross gewordene positive Beschleunigung plötzlich in unendlich grosse negative Beschleunigung umschlägt, und dass in Folge davon die Geschwindigkeiten gleich lange vor und nach diesem Augenblicke einander gleich sind, wonach also die Geschwindigkeit $q$ zur Zeit $t = +\theta$ (d. i. nach Verlauf des Zeitraums $2\theta$ vom Beginn der Bewegung an gerechnet) gleich der am Anfang zur Zeit $t = -\theta$, nämlich $q = 0$ ist, wobei der Weg $s$, wenn die Kugelschaale gross genug ist, dass $s$ darin Platz findet, auch wieder um $g\theta\theta$ zugenommen haben würde, also $s = 2g\theta\theta$ geworden wäre. Die Ladung $\varepsilon'$ würde dabei bis $2\eta$ gestiegen sein. Es würde aber von nun an, bei fortgesetztem Wachsthum der Zeit und der Ladung, die Entfernung $s$ des Theilchens $\mu$ vom Kugelmittelpunkte schnell wieder abnehmen bis zu $s = 0$, und darauf negativ werden bis zu $s = -R$, wo das Theilchen $\mu$ gegen die Kugelschaale stossen würde, zur Zeit $t$, welche aus der Gleichung $-R = g\theta\theta\left[1 + \frac{t}{\theta}\left(1 - \frac{1}{2}\log\frac{tt}{\theta\theta}\right)\right]$ bestimmt werden kann, und mit der Geschwindigkeit $q$, die, nachdem $t$ bestimmt worden, $= \frac{g\theta}{2}\log\frac{tt}{\theta\theta}$ gefunden wird.

Es ist bisher, wie schon bemerkt, angenommen worden, dass der Kugelhalbmesser $R$ grösser sei als der Maximum-Werth $2g\theta\theta$, welchen $s$ zur Zeit $t = +\theta$ erreicht. Wäre $R$ kleiner, so leuchtet von selbst ein, dass das Theilchen $\mu$ früher gegen die Kugelschaale stossen würde, nämlich in dem Augenblicke, wo $s = R$ geworden wäre, zur Zeit $t$, welche aus der Gleichung $R = g\theta\theta\left[1 + \frac{t}{\theta}\left(1 - \frac{1}{2}\log\frac{tt}{\theta\theta}\right)\right]$ bestimmt werden könnte.

Es soll nun aber kein fortwährendes Wachsthum der elektrischen Ladung betrachtet werden, sondern der Fall, wo die Ladung, nachdem sie den Werth $\eta$ etwas überstiegen hat, constant bleibt. Es werde z. B. diese constante Ladung $\varepsilon' = \eta\left(1 + \frac{1}{ee}\right)$ angenommen, wobei $\mu$ die

Geschwindigkeit $q = 2g\theta$ besitzt und in der Entfernung $s = \left(1 + \frac{3}{ee}\right) g\theta\theta$ vom Kugelmittelpunkte sich befindet.

Setzt man demnach in der Helmholtz'schen Gleichung

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\frac{dV}{ds}}{\mu - \frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\varepsilon'}$$

den Werth $\eta\left(1 + \frac{1}{ee}\right)$ für $\varepsilon'$, also

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\frac{dV}{ds}}{\mu - \frac{8\pi}{3cc}\, R\varepsilon\eta\left(1 + \frac{1}{ee}\right)},$$

und setzt hierin wieder wie früher $\frac{dV}{ds} = a$ und $\frac{8\pi}{3cc} \cdot R\varepsilon\eta = \mu$; so erhält man die Differentialgleichung

$$dq = -\frac{aee}{\mu} \cdot dt,$$

und durch Integration derselben

$$q = -\frac{aee}{\mu} t + C.$$

Wird nun die Zeit von dem Augenblicke an gerechnet, wo $\varepsilon' = \eta\left(1 + \frac{1}{ee}\right)$ geworden war, so ist für $t = 0$ der Werth von $q = 2g\theta$ schon oben gefunden worden, folglich, wie oben $a = g\mu$ gesetzt,

$$C = 2g\theta,$$

also

$$q = 2g\theta - eegt,$$

oder

$$ds = (2g\theta - eegt)\, dt,$$

woraus durch Integration

$$s = 2g\theta t - \frac{ee}{2} gtt + C'.$$

Nun war, wenn die Zeit von dem Augenblicke an gerechnet wird, wo $\varepsilon' = \eta\left(1 + \frac{1}{ee}\right)$ geworden war, für $t = 0$ der Werth von $s = \left(1 + \frac{3}{ee}\right) g\theta\theta$ gefunden worden, folglich

$$C' = \left(1 + \frac{3}{ee}\right) g\theta\theta,$$

also

$$s = \left(1 + \frac{3}{ee}\right) g\theta\theta + 2g\theta t - \frac{ee}{2} g \cdot tt.$$

Diese Formel nebst der vorhergehenden

$$q = 2g\theta - eegt$$

lassen sich nun ebenfalls leicht so übersichtlich, wie die früheren Formeln für $s$ und $q$, tabellarisch darstellen, wie folgt:

| $\frac{t}{\theta}$ | $\frac{s}{g\theta\theta}$ | $\frac{q}{g\theta}$ | $\frac{\varepsilon'}{\eta}$ |
|---|---|---|---|
| 0 | $1+\frac{3}{ee}$ | 2 | $1+\frac{1}{ee}$ |
| 1 | $3+\frac{3}{ee}-\frac{ee}{2}$ | $2-ee$ | $1+\frac{1}{ee}$ |
| 2 | $5+\frac{3}{ee}-2ee$ | $2-2ee$ | $1+\frac{1}{ee}$ |

Diese Tafel lässt sich leicht weiter fortsetzen; man ersieht aber schon hieraus, dass von $t=\frac{2\theta}{ee}$ an, nachdem die Ladung constant geworden, die Entfernung $s$ des Theilchens $\mu$ vom Kugelmittelpunkte abnimmt und sehr bald negativ wird, bis endlich das Theilchen $\mu$, wenn $s=-R$ geworden, gegen die Kugelschaale stösst, zur Zeit $t$ und mit der Geschwindigkeit $q$, welche aus den beiden Gleichungen

$$-R=\left(1+\frac{3}{ee}\right)g\theta\theta+2g\theta t-\frac{ee}{2}gtt,$$

$$q=2g\theta-eegt$$

bestimmt werden können.

Man sieht aus dieser Darstellung des ganzen Processes in seinem Zusammenhange, dass keine von den »ungereimten oder absurden« Consequenzen, durch welche Helmholtz das aufgestellte Grundgesetz hat widerlegen wollen, wirklich eintritt.

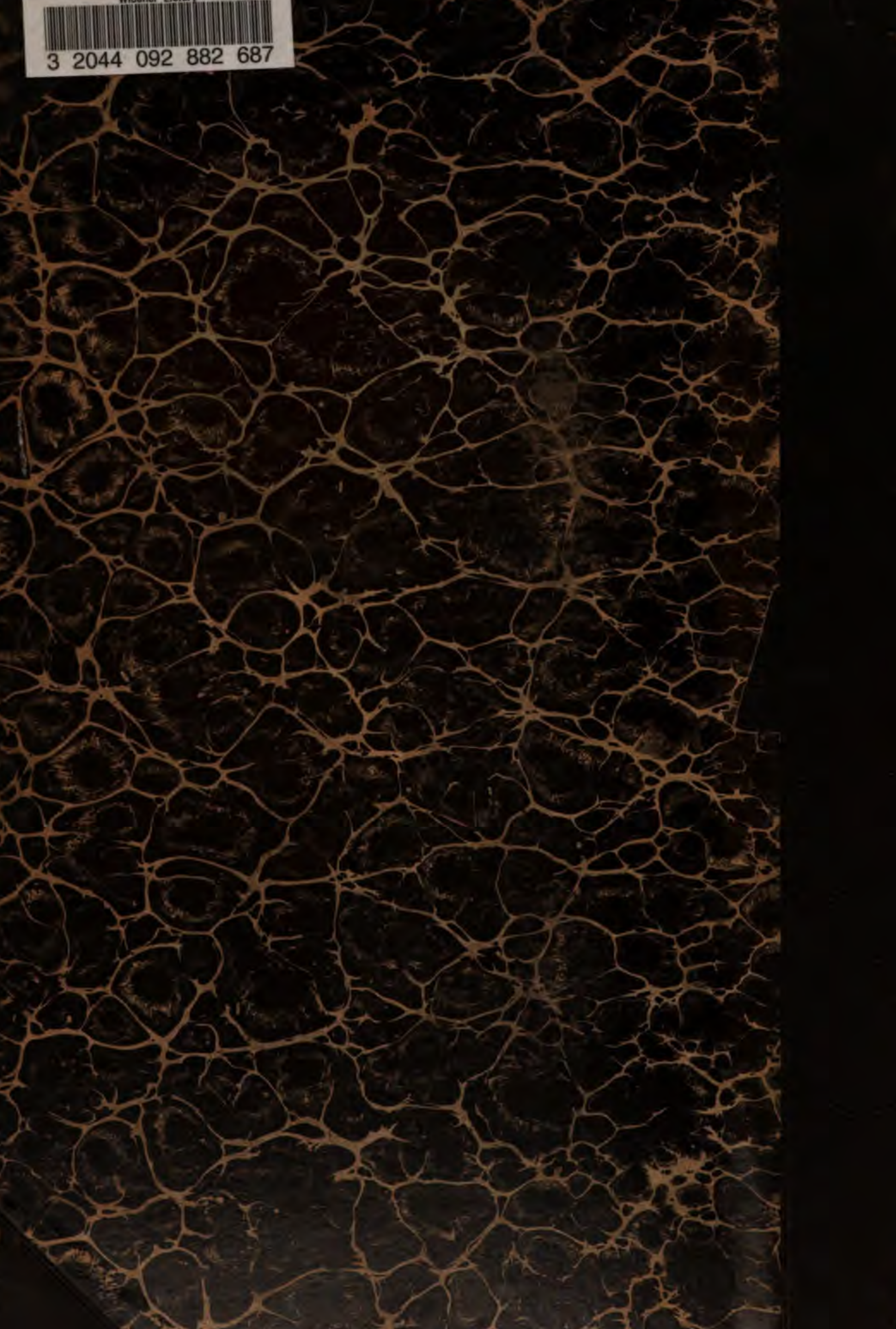
Zwar ist hiebei noch nicht der Helmholtz'sche Einwand (A) in Borchardt's Journal, Bd. 72 S. 61 und Bd. 75 S. 38 erörtert worden, der in der Behauptung besteht, dass das aufgestellte Grundgesetz der elektrischen Wirkung, oder vielmehr die aus diesem Gesetz entspringenden Kirchhoff'schen Differentialgleichungen, zu einer labilen Gleichgewichtslage der elektrischen Materie, respective zu einer Bewegung dieser Materie hinführe, deren Geschwindigkeit mit der Zeit ins Unendliche wachse. Aber es hat Neumann schon in den Ber. d. K. S. Ges. Oct. 1871 S. 477 nachgewiesen, dass die Kirchhoff'schen Differentialgleichungen, ausser auf jenem Grundgesetze, noch auf mancherlei andern accessorischen Voraussetzungen beruhen, und dass also jenes Gesetz durch ein gegen diese Differentialgleichungen im Allgemeinen erhobenes Bedenken nicht erschüttert werden könne.

Nach dieser schon von Neumann gegebenen Berichtigung, für welche besonders auf die von Neumann in seiner Abhandlung S. 128—149 dieses Bandes gegebenen näheren Erörterungen zu verweisen ist, bedarf es keiner weitern Erörterung dieses Einwands, die, da sie hauptsächlich doch nur jene accessorischen Voraussetzungen betreffen würde, ganz ausserhalb der der vorliegenden Abhandlung gesetzten Schranken liegen würde.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.






3 2044 092 882 687